

Coefficienti, polinomi e serie di Fourier

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, T -periodica, localmente integrabile in \mathbb{R} o, equivalentemente, integrabile $[-T/2, T/2]$

• I coefficienti

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si dicono coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$. Le ridotte

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega x}$$

si dicono polinomi di Fourier di f , e, infine

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

Si dice serie di Fourier di f .

• Possiamo definire analogamente a sopra i coefficienti

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) dx \quad n \in \mathbb{N}$$

che si dicono coefficienti di Fourier di f e la quantità

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

si dice serie di Fourier di f rispetto al sistema

$$\left(1, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x) \right)_{n \geq 1}$$

Analisi di Fourier (o analisi di frequenza) di una funzione periodica

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica e loc. integrabile e siamo $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$,
i coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$, ossia

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx$$

Si definisce

$$\text{spettro di } f = (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Si come ogni $c_n \in \mathbb{C}$ sappiamo che

$$c_n = |c_n| e^{i\varphi_n},$$

dove $(|c_n|)_n \subseteq \mathbb{R}_+$ e $(\varphi_n)_n \subseteq [0, 2\pi)$, ovviamente

$\varphi_n = \arg(c_n)$ ed è detto fase di c_n

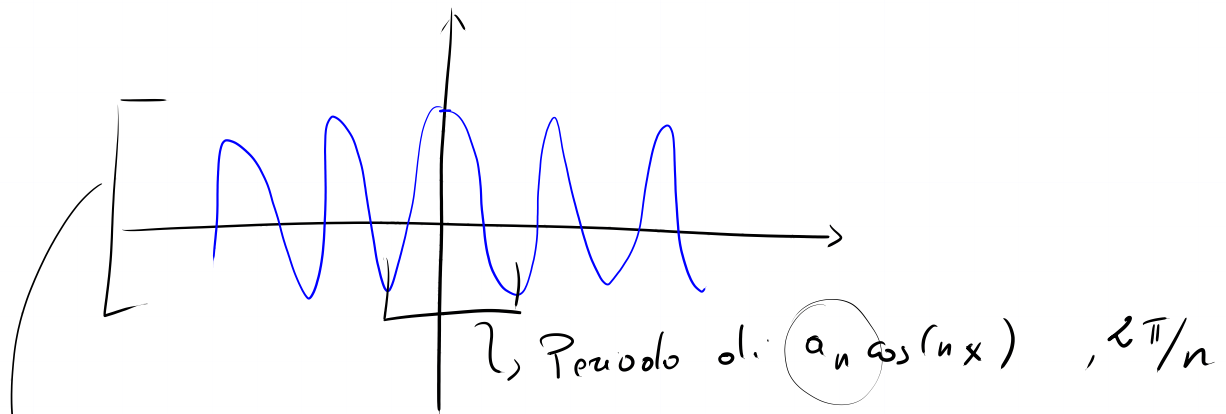
Si definiscono

- spettro di ampiezza di $f = (|c_n|)_{n \in \mathbb{Z}}$
- spettro di fase di $f = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Discussione euristica:

$$\underbrace{(a_n \cos(n\omega x))}_{\text{ampiezza}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{fase}}$$

Ampiezza



la fase indica la lunghezza del periodo e dunque me determina la frequenza dell'onda

L'ampiezza determina, letteralmente, l'ampiezza dell'onda

L'analisi di Fourier di f consiste nel determinare il suo spettro e quindi la corrispondente serie di Fourier.

La sintesi consiste invece nel ricostruire f attraverso la sua serie di Fourier

Analisi : $f \longmapsto (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Sintesi : $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \xrightarrow{?} f$

Problema Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodica e loc. int. allora è determinato il suo spettro e quindi la sua serie di Fourier. Viceversa, dato lo spettro di f la serie di F. di f converge in qualche senso? Qualora converga, converge ad f ?

Esempi : Determinare le serie di F. delle seguenti funzioni: 2π -per

a) $f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x^2$

Programma del corso

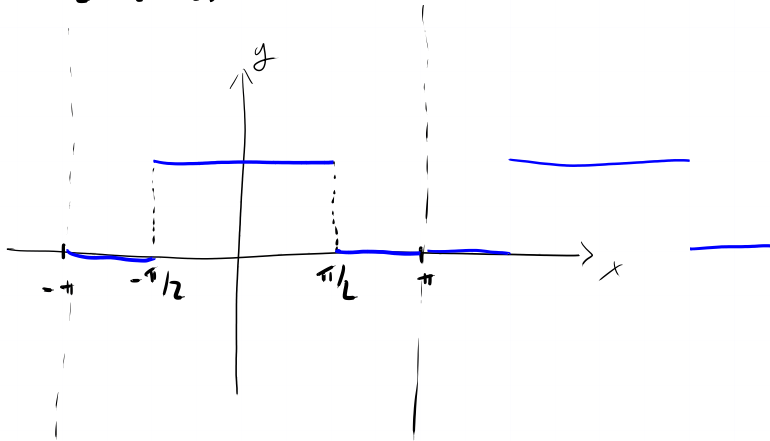
Discutere

- la convergenza puntuale
- la convergenza uniforme
- la convergenza in energia

delle serie di Fourier.

Esempio a)

$$f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2)}(x) \quad -\pi \leq x \leq \pi$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [-\pi, -\pi/2) \\ 1 & \text{in } [-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{in } [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

ed estesa periodicamente in tutto \mathbb{R}

Abbiamo dunque $T=2\pi$, $\omega=1$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = 1$$

Per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx =$$

$$\left(\sin(nx) \right)' = \cos(nx) \cdot n$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n=2k \\ \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} & n=2k-1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \sin(nx) dx$$

$$- \sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$$

$$\equiv 0 \quad \forall n \geq 1$$

Abbiamo dunque ottenuto la serie di F. di f in forma reale

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \cos(nx)$$

OSS Possiamo scrivere la serie in forma complessa utilizzando le relazioni

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2 = 1/2 \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_{-n} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Esempio 6 $f(x) = x$ $-\pi \leq x \leq \pi$ estesa periodicamente

Abbiamo che $T = 2\pi, \omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

Siccome $x \mapsto x \cos(nx)$ è dispari

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$$

Integriamo per parti ed otteniamo

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \left[-x \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \left(-\pi \cos(n\pi) \right) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \left[\sin(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Ottendiamo dunque la serie di F. per f

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx) .$$