18/10/2021

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Problema Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T-periodica e localmente integrabile in $\mathbb{R}$. Fissiamo $x_0\in\mathbb{R}$, sotto quali condizioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x_0} = f(x_0) \qquad \left[\omega=\frac{2\pi}{T}\right]$$

$$\| $$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x_0)$$

Esempio (Du Bois-Reymond, 1873)

Non basta la continuità, $\exists f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continua e T-periodica

$$S_N(0) \overset{N\to\infty}{\not\to} f(0)$$

Questo vuol dire che non vi è convergenza puntuale in 0.

Teorema (Dirichlet-Weierstrass)

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ T periodica e localmente integrabile in $\mathbb{R}$ e sia $x_0\in\mathbb{R}$. Supponiamo che esistano finiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \quad , \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

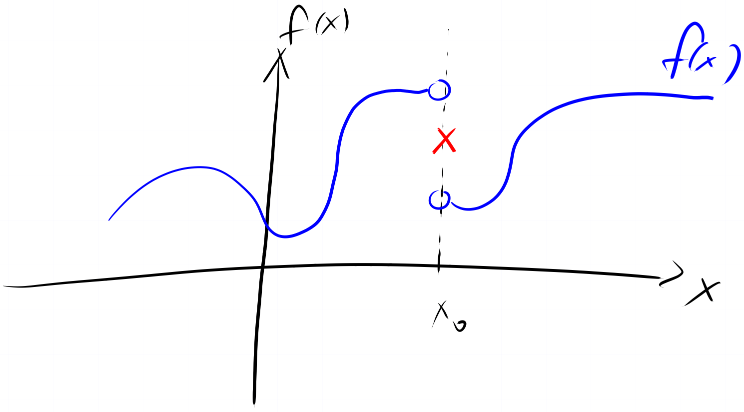
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0^-} = f'(x_0^-) \, ,$$

Possono essere $\neq$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0^+} = f'(x_0^+)$$

Si ha dunque che

$$\exists \lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-)+f(x_0^+)\right)$$



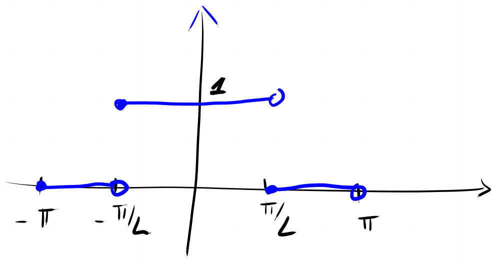
OSS Ovviamente se f è C^1 in x_0 $\leadsto$ $S_N(x_0)\to f(x_0)$

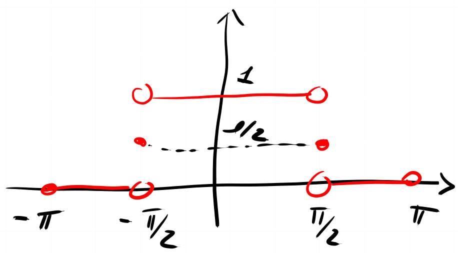
Questo semplicemente perché se $f\in C^1$

1) $f\in C^0$

2) $f'\in C^0$ e dunque $\exists$ limite dx e sx della funzione rapporto incrementale.

Esempio $f(x) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2)}(x)$, $x\in[-\pi,\pi)$





$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$$

La dimostrazione del thm di D.-W. si basa su dei risultati ausiliari che hanno un'importanza autonoma

Energia di un polinomio trigonometrico

Sia $$P_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} p_n \, e^{in\omega x}$$

Vogliamo calcolare l'energia di P_N, ossia

$$\|P_N\|_2^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |P_N(x)|^2 \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} P_N(x) \cdot \overline{P_N(x)} \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-N}^{N} p_n \, e^{in\omega x} \right) \overline{\left(\sum_{m=-N}^{N} p_m \, e^{im\omega x} \right)} \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-N}^{N} p_n \, e^{in\omega x} \right) \left(\sum_{m=-N}^{N} \overline{p_m} \, e^{-im\omega x} \right) dx$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \int_{-T/2}^{T/2} p_n \overline{p_m} \, e^{i(n-m)\omega x} \, dx$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} p_n \overline{p_m} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)\omega x} \, dx}_{= \begin{cases} T & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} = T \delta_{n,m}}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} |p_N|^2 \, T$$

Abbiamo dunque ottenuto che

$$\|P_N\|_{L^2} = T \sum_{n=-N}^{N} |p_n|^2$$

Disuguaglianza di Bessel

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e localmente integrabile allora

$$(1) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

OSS La disuguaglianza (1) si esprime quando i coefficienti di $\mathcal{F}_0$ $(c_n)_n$ (o spettro di f) sono dati da

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x} dx ,$$

Tuttavia potremmo riformulare (1) utilizzando i valori $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ validi per serie a valori reali. Tale risultato si può dedurre da (1) utilizzando le formule di cambio di coefficienti

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \end{cases}$$

Dim Sia $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$ e calcoliamo

$$0 \leq \|f - S_N\|_2^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} (f(x) - S_N(x)) \cdot \overline{(f(x) - S_N(x))} \, dx$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} |f|^2 dx - \int_{-T/2}^{T/2} f \overline{S_N} dx - \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f} S_N dx + \int_{-T/2}^{T/2} |S_N|^2 dx$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} \left(\overline{c_n} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx - c_n \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f}(x) e^{in\omega x} dx \right)$$

$$+ \underbrace{T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2}_{= \|S_N\|_{L^2}^2} = (*)$$

Ci ricordiamo ora che

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx = T c_n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f}(x) e^{in\omega x} dx = \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(x) e^{-in\omega x}} \, dx$$

$$= \overline{\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx} = T \overline{c_n}$$

Con la quale semplifichiamo $(*)$ ottenendo

$$(*) = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} T c_n - \sum_{n=-N}^{N} c_n T \overline{c_n} + T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

$$= \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Pertanto abbiamo ottenuto che

$$0 \leq \|f\|_{L^2}^2 - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \quad , \text{ ossia}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2$$

Possiamo dunque far tendere $N \to \infty$ ed otteniamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2 .$$

#

OSS 1 Dalla disuguaglianza (1) ne deduciamo che, se f è localmente integrabile, $|c_n| \to 0$. La formulazione classica del lemma di Riemann-Lebesgue è formulata in termini di decadimento dei coeff di Fourier

OSS 2 I calcoli sviluppati per dimostrare la disuguaglianza (1) hanno un interessante risultato addizionale, ossia

$$\|f - S_N\|_{L^2}^2 + \|S_N\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

Ossia otteniamo che le funzioni $f - S_N$ e S_N sono ortogonali rispetto $\langle \cdot , \cdot \rangle_{L^2}$. Otteniamo dunque una generalizzazione infinito-dimensionale del th di Pitagora.

Lemma di Riemann-Lebesgue

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e loc integrabile in $\mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n = 0.$$

Dim dalla disuguaglianza di Bessel otteniamo che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty$

$$\Rightarrow |c_n| \xrightarrow{|n| \to \infty} 0 \Rightarrow \text{Ipotesi} \quad \#$$

Def Sia $T > 0$, $\omega = 2\pi/T$ e definiamo il nucleo di Dirichlet di ordine $N \in \mathbb{N}$ come la funzione

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x}$$

Proprietà

1) D_N è T-periodica

2) La funzione D_N è una funzione pari.

$$D_N(x) \stackrel{?}{=} D_N(-x)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x} \underset{n=-m}{=} \frac{1}{T} \sum_{m=-N}^{N} e^{-im\omega x}$$

Def Siano $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrabili, definiamo con $f * g$ che denoteremo come convoluzione di f e g la funzione

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

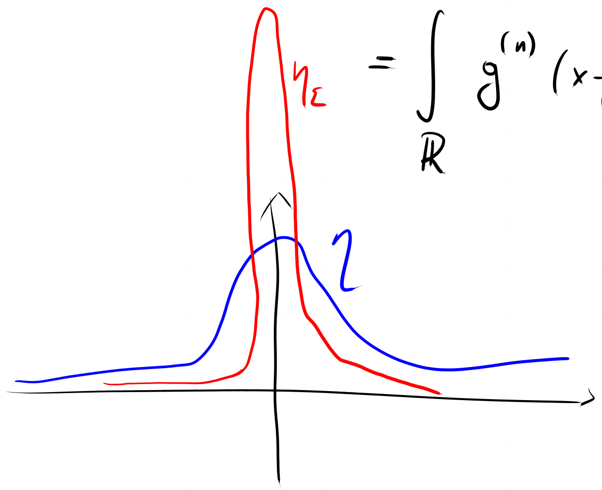
Discussione in formule

Supponiamo che f sia arbitraria (ma localmente integrabile) e g sia C^∞

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \overset{\text{per casa}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x-y)\, f(y)\, dy$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (f*g)(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\, f(y)\, dy \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g^{(n)}(x-y)\, f(y)\, dy$$



$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, \eta\!\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$ questa è una funzione <u>liscia</u> che "approssima" f.