20/10/2021

Recap:

Q: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ localmente integrabile, $x_0\in\mathbb{R}$ quando

$$\lim_N S_N(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x_0} = f(x_0)$$

A: Thm D-W Se $\exists$ finiti

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm) \quad , \quad \lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0^\pm)}{x-x_0^\pm} = f'(x_0^\pm)$$

allora

$$\exists \lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$$

Risultati introduttivi alla dimostrazione del thm di DW

1) Disuguaglianza di Bessel: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$

Lemma (di Riemann - Lebesgue)

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, T-periodica e localmente int, allora

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \xrightarrow{|n|\to\infty} 0$$

Oss La scorsa volta abbiamo visto che il Lemma di RL è una conseguenza immediata della disuguaglianza di Bessel se $|f|^2$ è loc int. Questo, tuttavia, è più che chiedere che f sia loc int. Per questo la lezione odierna concentrerà una buona parte nella dim di RL.

Per dimostrare il teorema di RL avremo bisogno di alcuni risultati ausiliari

Def Si dice funzione semplice o funzione a scalini una funzione φ del tipo

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{L} \alpha_j\, \chi_{[a_j,b_j)}(x) \qquad , L\in\mathbb{N}, \alpha_j\in\mathbb{C}$$

$[a_j,b_j)$ disgiunti

OSS φ è una funzione costante a tratti.

Def Definiamo con $L^1 = L^1([-T/2, T/2])$ la chiusura topologica dello spazio di funzioni semplici rispetto alla norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|\, dx$$

Def Definiamo con $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ lo spazio di successioni

$$n \in \mathbb{Z} \longmapsto z_n \in \mathbb{C} \qquad \text{tc}$$

$$\|z\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |z_n| < \infty$$

Lemma Considero l'operatore

$$\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow \ell^\infty$$
$$f \longmapsto c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx \quad , n \in \mathbb{Z}$$

è un operatore lineare continuo tra L^1 e ℓ^∞.

Dim $f, g \in L^1$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$c_n(f) + \lambda c_n(g) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} + \frac{\lambda}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\, e^{-in\omega x}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (f(x) + \lambda g(x))\, e^{-in\omega x}\, dx \;.\!= c_n(f + \lambda g)$$

Questo prova che è lineare.

Proviamo che è continuo

$$\|c_n(f) - c_n(g)\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f) - c_n(g)|$$

$$\le \sup_n \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - g(x)|\, \underbrace{|e^{-in\omega x}|}_{\le 1}\, dx = \frac{1}{T}\|f - g\|_{L^1}$$

Dunque se $\|f-g\|_{L^1} \to 0$ allora

$\|c_n(f)-c_n(g)\|_{\ell^\infty} \to 0$. #

Dim del Lemma di RL

Dividiamo la dim in step

Step 1 $f = \chi_{[a,b)}$ $\quad [a,b) \subseteq [-T/2, T/2]$, abbiamo che

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_a^b e^{-in\omega x}\,dx = \frac{e^{-inb\omega}-e^{-ina\omega}}{T(-in\omega)} = O(n^{-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Step 2 $f=\varphi$ funzione semplice

$$c_n(f) = \sum_{j=1}^{L} \alpha_j\, c_n(\chi_{[a_j,b_j)}) = \underbrace{\sum_{j=1}^{L} \alpha_j \frac{e^{-inb_j\omega}-e^{-ina_j\omega}}{T(-in\omega)}}_{=O(n^{-1})} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Step 3 $f \in L^1$ generica.

Se $f\in L^1$ allora $\forall \delta>0\ \exists \varphi=\varphi_\delta$ tc $\|f-\varphi\|_{L^1}<\delta$.

L'applicazione $\mathcal{F}$ è continua tra L^1 e ℓ^∞, dunque

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tc se $\|f-\varphi\|_{L^1}<\delta$ allora

$\|c_n(f)-c_n(\varphi)\|_{\ell^\infty}<\varepsilon$.

Quindi

$$|c_n(f)| \le |c_n(f)-c_n(\varphi)| + |c_n(\varphi)|$$
$$< \varepsilon + O(n^{-1})$$

$\mathcal{F}$ è continua $\qquad$ Step 2

Per arbitrarietà di $\varepsilon>0$ concludo

Def Il nucleo di Dirichlet di ordine $N \in \mathbb{N}$ è la funzione

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x} .$$

Proprietà

1) D_N è T-periodica
2) D_N è pari

Formule di Dirichlet

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e loc int e T-periodica allora

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x-t) D_N(t) \, dt$$

o equivalentemente

$$S_N(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+t) D_N(t) \, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) D_N(x-t) \, dt$$

Dim

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} \, dt \right) e^{in\omega x}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega (x-t)} \, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \underbrace{\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(x-t)} \right]}_{= D_N(x-t)} dt$$

Con il cambio di variabile $s = x - t$ si ottiene che

$$S_N(x) = -\int_{x+T/2}^{x-T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds = \int_{x-T/2}^{x+T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds$$

Con l'ulteriore cambio di variabile $u = -s$

$$S_N(x) = -\int_{T/2}^{-T/2} f(x+u)\, D_N(-u)\, du = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+u)\, D_N(u)\, du$$

##

Lemma 1 si ha che $\int_0^{T/2} D_N(x)\, dx = 1/2$

OSS Siccome il nucleo di Dirichlet è una funzione pari il lemma 1 implica

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x)\, dx = 1 \quad e \quad \int_{-T/2}^{0} D_N(x)\, dx = 1/2$$

Dim

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x)\, dx = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-iN\omega x}\, dx + \_\_ + \int_{-T/2}^{T/2} 1\, dx + \_\_ + \int_{-T/2}^{T/2} e^{iN\omega x}\, dx \right)$$

Provare per caso

$$= \frac{1}{T}\left(\left[\cancel{\frac{e^{-iN\omega x}}{-iN\omega}} \right]_{-T/2}^{T/2} + \_\_ + T + \_\_ + \left[\cancel{\frac{e^{iN\omega x}}{iN\omega}} \right]_{-T/2}^{T/2} \right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(0 + \_\_ + T + \_\_ + 0 \right) = 1$$

##

Lemma 2 Si ha che

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} \dfrac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{in\omega x} - 1} & \text{se } x \neq kT,\ k \in \mathbb{Z} \\[2ex] \frac{1}{T}(2N+1) & \text{se } x = kT,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dim Se $x = kT$ la dimostrazione è immediata.

$$D_N(kT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(kT)} = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\frac{2\pi}{\cancel{T}}k\cancel{T}} = \frac{2N+1}{T}$$

Sia ora $x \neq kT$, $k \in \mathbb{Z}$, poniamo $z = e^{i\omega x}$

$$D_N(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x} = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} z^n$$

$$= \frac{1}{T}\left(z^{-N} + \_\_ + 1 + \_\_ + z^N\right)$$

$$= \frac{z^{-N}}{T}\left(1 + \_\_ + z^{2N}\right) = \frac{z^{-N}}{T}\,\frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1}$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} \underset{z = e^{i\omega x}}{=} \frac{1}{T}\,\frac{e^{i\omega(N+1)x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1}$$

OSS
$$D_N(x) = \frac{1}{T}\,\frac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega x}}{e^{i\frac{\omega}{2}x} - e^{-i\frac{\omega}{2}x}} \cdot \frac{\frac{1}{2i}}{\frac{1}{2i}}$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega x}}{2i} \Bigg/ \frac{e^{i\frac{\omega}{2}x} - e^{-i\frac{\omega}{2}x}}{2i}$$

$$= \frac{1}{T} \quad \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega x}{\sin\left(\frac{\omega}{2}x\right)}$$

Dimostrazione del thm di DW

Vogliamo provare che $\lim_N S_N(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$

Utilizziamo la formula di Dirichlet per esprimere S_N come operatore integrale

$$S_N(x_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt$$

Calcoliamo ora

$$S_N(x_0) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2} f(x_0^-)$$

$$+ \int_{0}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2} f(x_0^+)$$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \int_{-T/2}^{0} D_N(t)\, f(x_0^-)\, dt$$

$$+ \int_{0}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \int_{0}^{T/2} f(x_0^+)\, D_N(t)\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{0} \left[\bar{f}(x_0+t) - f(x_0^-)\right] D_N(t)\, dt$$

$$+ \int_{0}^{T/2} \left[\bar{f}(x_0+t) - f(x_0^+)\right] D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} \left[f(x_0+t) - f(x_0^-)\right] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1}\, dt$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} \left[\bar{f}(x_0+t) - f(x_0^+)\right] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1}\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t}-1} \left(e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}\right) dt$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t}-1} \left(e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}\right) dt$$

Notiamo che $e^{i\omega t} - 1 = (\cos(\omega t) - 1) + i \sin(\omega t)$

e dunque definiamo la funzione ausiliaria

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \dfrac{t}{(\cos(\omega t)-1) + i\sin(\omega t)} & -\pi \le t < 0 \\[2ex] \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \dfrac{t}{(\cos(\omega t)-1) + i\sin(\omega t)} & \end{cases}$$

e prolunghiamo g periodicamente in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo ora

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = \lim_{t\to 0^-} \underbrace{\frac{f(x_0+t)-f(x_0^-)}{t}}_{f'(x_0^-)} \quad \underbrace{\frac{t}{\underbrace{(\cos(\omega t)-1)}_{\sim t^2} + i\underbrace{\sin(\omega t)}_{\sim \omega t}}}_{\to \frac{1}{i\omega}}$$

$$= f'(x_0^-)\,\frac{1}{i\omega}$$

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = f'(x_0^+)\,\frac{1}{i\omega}$$

Otteniamo dunque che g è limitata in $[-T/2, T/2]$.

La funzione integrale

$$G(x) = \int_{-T/2}^{x} g(t)\,dt$$

è uniformemente continua in $[-T/2, 0]$ e dunque esiste finito

$$\lim_{x\to 0^-} G(x) = \int_{-T/2}^{0} g(t)\,dt$$

$\rightsquigarrow$ g è integrabile in $[-T/2, 0]$

Si può analogamente vedere che g è int in $[0, T/2]$

$\rightsquigarrow$ g è int in $[-T/2, T/2]$ $\rightsquigarrow$ g è loc int

$$S_N(x_0) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} g(t)\left[e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t}\right] dt$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} g(t)\left[e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t}\right] dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{i(N+1)\omega t}\, dt - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{iN\omega t}\, dt$$

$$= c_{N+1}(g) - c_N(g)$$

Siccome g è localmente integrabile applichiamo il lemma di RL ed otteniamo che

$$c_{N+1}(g) - c_N(g) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$, provando dunque finalmente che

$$S_N(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Problema di Basilea (Proposto da Mengoli nel 1644 e risolto da Eulero nel 1735)

Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Consideriamo la funzione

$f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$, estesa periodicamente

La serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

e per il thm di DN la serie converge puntualmente a f $\forall x \in \mathbb{R}$

Se $x = \pi$ allora si ha che

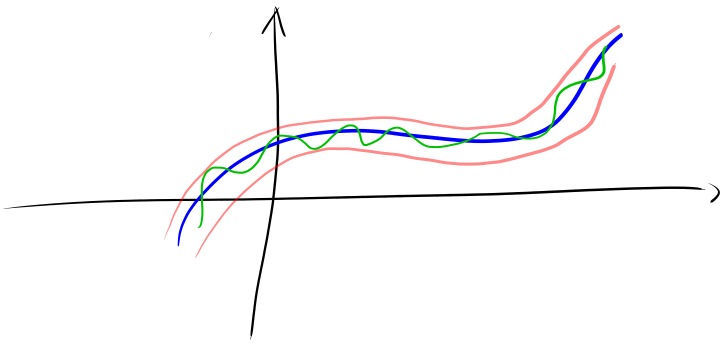
$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \boxed{(-1)^n (-1)^n}_{\equiv 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

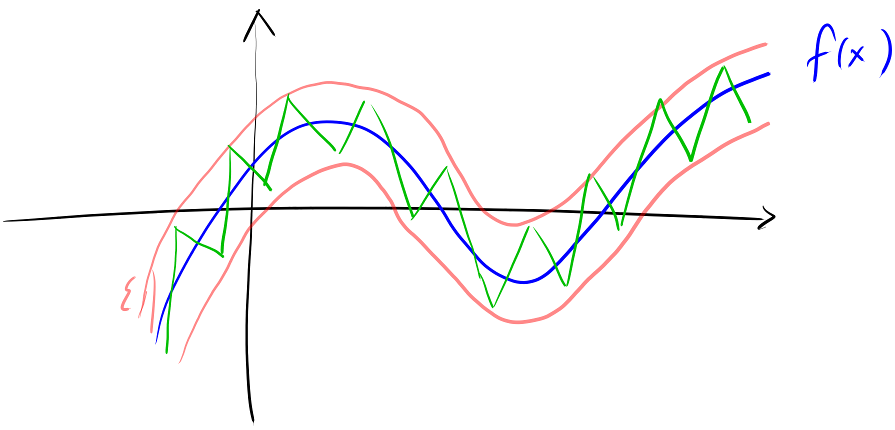
OSS Convergenza uniforme di una funzione e delle sue derivate

Recap una successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$ se

$$\lim_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$



Esempio di una successione di funzioni che convergono unif ad una funzione $f \in C^\infty$ ma per le quali non è vero che f'_n converga a f'



In questo esempio grafico otteniamo che f'_n non converge a f'