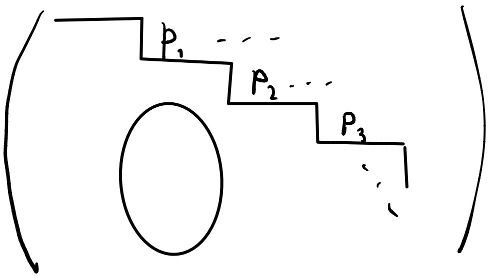
Lezione 10

Matrice a gradini

$A =$ 

$p_1, p_2, \dots, p_k \neq 0$
pivot di A

Sistema a gradini

$$\begin{cases} p_1 x_{i_1} + \cdots & = b_1 \\ \quad p_2 x_{i_2} + \cdots & = b_2 \\ \qquad p_3 x_{i_3} + \cdots & = b_3 \\ \qquad\quad \ddots & \vdots \end{cases}$$

$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \cdots \leq n$

$AX = B$ con A a gradini

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vettore incognito

Risoluzione di un sistema a gradini e parametri liberi

$S: AX = B$ a gradini

1) Se compare equazione del tipo

$$0 = b \quad \text{con } b \neq 0$$

allora S è incompatibile e abbiamo finito. Altrimenti:

2) si eliminano le eventuali equazioni del tipo $0 = 0$
3) $\forall$ incognita x_i che non corrisponde ad un pivot si assegna ad x_i un valore arbitrario $x_i = t_i \in \mathbb{K}$ (parametri liberi)
4) partendo dall'ultima equazione si risolve rispetto alle incognite che hanno pivot come coefficiente e si sostituisce nelle equazioni precedenti, fino a terminare.

Es

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

è a gradini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Le incognite con coefficiente pivot sono x_1, x_2, x_3 mentre x_4 diventa un parametro libero

$$\begin{cases} x_4 = t \\ x_3 = -5t + 1 \\ x_2 = 6t - 1 \\ x_1 = -11t + 7 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Soluzione generale di S

dando a t tutti i valori reali si ottengono tutte le soluzioni di S che in questo caso sono infinite.

Si dice anche che le soluzioni sono ∞^1 (1 è il numero di parametri liberi)

Lo spazio delle soluzioni è pertanto

$$\Sigma_S = \{(-11t + 7,\ 6t - 1,\ -5t + 1,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Per esempio per $t = 0$ si ottiene la soluzione $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma_S$

Per $t = 1$ si ha $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_S$

Dato che siamo interessati a trovare tutte le soluzioni consideriamo la <u>soluzione generale</u>.

Es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y + 2z = 0 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{a gradini} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tutte le incognite hanno un pivot quindi non ci sono parametri liberi. Si risolve dall'ultima equaz. (già risolta)

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = -2 \\ x = 8 \end{cases} \quad \text{unica soluzione} \quad \Sigma_S = \{(8, -2, 3)\}$$

Es

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{a gradini} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

x_1, x_3 hanno il pivot

x_2, x_4 parametri liberi

$$\begin{cases} x_2 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_3 = -\frac{4}{3} t_2 \\ x_1 = -t_1 + \frac{1}{3} t_2 + 1 \end{cases} \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \text{Soluzione generale}$$

oppure in forma vettoriale

In generale è comunque bene riscrivere la soluzione con le incognite ordinate per bene (si evita confusione)

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 + \frac{1}{3} t_2 + 1 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -\frac{4}{3} t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione di un sistema lineare qualunque

Operazioni elementari sulle righe

Consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Operiamo sulle righe di A con i seguenti tre tipi di operazioni elementari:

I tipo scambiare due righe $\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$, $i \neq j$

II tipo moltiplicare una riga per uno scalare non nullo $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

III tipo Sommare ad una riga un multiplo di un'altra

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} + \lambda A^{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad i \neq j$$

Applicando un numero finito di queste operazioni elementari è possibile trasformare una qualunque matrice in una a gradini.

Es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Vedremo ora in generale come si procede.

Metodo di eliminazione di Gauss

Dato un sistema (in forma matriciale)

$$S: \ AX = B$$

dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si considera la <u>matrice completa</u> di S

$$\tilde{A} = (A \mid B) \in M_{m,n+1}(\mathbb{K})$$

Le operazioni elementari I, II e III applicate ad $\tilde{A}$ trasformano S in un altro sistema S' equivalente, infatti

I : scambiare due righe di $\tilde{A}$ corrisponde a scambiare due equazioni di S;

II : moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$ equivale a moltiplicare un'equazione per $\lambda \neq 0$

III : corrisponde a sommare ad un'equazione un'altra equazione moltiplicata per $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pertanto I e II non cambiano le soluzioni. Per la III se S' si ottiene con operazione di tipo III da S allora S' si deduce da S quindi le soluzioni di S sono anche soluzioni di S'. Anche S si riottiene da S' con un'operazione di tipo III, basta sottrarre λ volte la riga di prima e quindi anche S si deduce da S' e le soluzioni di S' sono anche soluzioni di S.

Quindi le operazioni elementari di tipo I, II, III applicate ad $\tilde{A} = (A \mid B)$ non modificano le soluzioni.

Trasformiamo S in S' a gradini operando su $\tilde{A}$

1) si individua una riga col pivot più a sinistra a meno di uno scambio (tipo I) possiamo supporre che sia la prima riga (preferibile 1 come pivot)

2) $\forall\, i > 1$ si somma ad $A^{(i)}$ un multiplo opportuno di $A^{(1)}$ in modo da annullare il pivot (tipo III)

3) si trascura la 1ª riga (senza però cancellarla) e si ripetono i passi (1) e (2) fino ad ottenere una matrice a gradini.

<u>OSS</u> Le operazioni di tipo II sono ausiliarie e permettono semplificazioni.

<u>Es</u>
$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

a gradini

$\rightsquigarrow$ si scrive il sistema e lo si risolve

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

x_4 è l'unica senza pivot ⇝ parametro libero

$$\begin{cases} x_4 = t \\ x_3 = -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{3}{4}t - \frac{3}{4} \\ x_1 = -t + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -t + 2 \\ x_2 = \frac{3}{4}t - \frac{3}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2} \\ x_4 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$