ESERCIZI svolti durante l'ESERCITAZIONE 1 del 13/10/2022

Due palline ($m = 1$ g) cariche della stessa carica q sono appese allo stesso punto O tramite un filo lungo L= 10 cm. All'equilibrio il filo di ciascuna forma un angolo $\theta = 30°$ con la verticale. Calcolare il valore della carica q.

Soluzione 1

Bilanciando le forze lungo l'asse y (verticale):

$$T\cos\theta = F_g \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{F_g}{\cos\theta}$$

e combinandolo nel bilanciamento delle forze lungo l'asse x (orizzontale):

$$T\sin\theta = F_e \qquad \Rightarrow \qquad F_g\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = F_e\ .$$

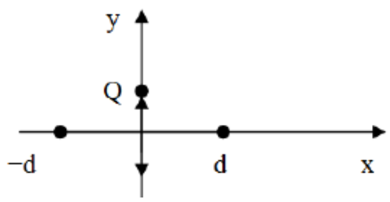
Utilizzanndo l'equazione di Coulomb per la forze elettrostatica si ha

$$mg\tan\theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0(L\sin\theta)^2}$$

da cui si può ricavare la carica

$$q^2 = mg\tan\theta 16\pi\epsilon_0 L^2\sin^2\theta = 6.3\cdot 10^{-15}\ C^2 \qquad \Rightarrow \qquad q = 7.9\cdot 10^{-8}\ C$$

Due cariche uguali, $q_1=q_2=1$pC**, vengono tenute ferme nel vuoto nei punti dell'asse** x **di ascisse** $x_1=d=10^{-2}$ m **e** $x_2=$ d**, rispettivamente. Una particella di massa** m=10 g **e carica** q= 1 μC **oscilla lungo l'asse** y **sotto l'azione delle forze dovute alle cariche** q_1 **e** q_2**: quanto vale il periodo delle piccole oscillazioni?**



Chiamiamo per semplicità q le cariche fisse sull'asse x e Q quella mobile costretta a muoversi lungo y, le componenti x delle due forze elettrostatiche a cui è sottoposta Q si elidono avendo versi contrari ed identico modulo, sopravvivono solo le componeneti y, per cui la forza complessiva su Q vale

$F = 2\ F_y = 2\ k\ qQ/R^2)\ \cos\alpha$

dove α è l'angolo di F con l'asse y, e dove abbiamo introdotto la costante k

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Questa notazione sarà mantenuta per tutto il testo.

inoltre con R abbiamo indicato la distanza fra Q e q e vale evidentemente $y = R\cos\alpha$ ossia $\cos\alpha = y/R$ dunque

$F = (2kqQ/R^3)\ y$

se ora teniamo conto che essendo lo spostamento y molto piccolo rispetto a d di ha che R coincide praticamente con d, dunque

$F = (2kqQ/d^3)\ y$

e se ora scriviamo la seconda Legge della dinamica si ha (tenendo conto del verso negativo di F)

$m\ddot{y} = \quad (2kqQ/d^3)\ y$

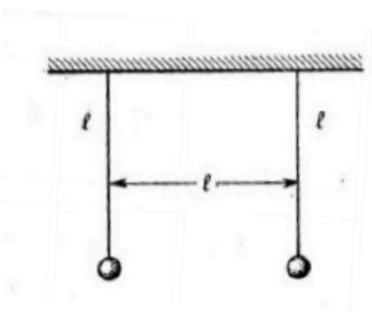
che possiamo scrivere anche così

$\ddot{y} = \quad \omega^2\ y$

che non è altro che l'eq. dell'oscillatore armonico che come noto descrive un moto armonico con periodo $T = 2\pi / \omega$ dunque

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{md^3}{2kqQ}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 d^3}{qQ}} = 4.7s$$

Due sferette di massa $M_1=M_2=M=30$ g **sono appese a due fili di uguale lunghezza** $\ell=40$ cm **posti a distanza** ℓ**; le due sferette possiedono cariche opposte** Q **e** – Q **e vengono lasciate libere con velocità nulle nella posizione indicata in figura. Qual'è il valore minimo di** Q **che permette alle due palline di arrivare ad una distanza relativa** $\ell/2$ **?**



Il sistema in esame è simmetrico: è sufficiente studiare il comportamento di una sola pallina e scrivere la condizione di equilibrio utilizzando una sola delle equazioni cardinali della statica poiché si tratta di un corpo vincolato. Utilizziamo perciò la condizione di annummento della somma dei momenti ad esempio sulla pallina di destra.

Le forze agenti sono la forza peso la forza elettrostatica e la tensione della fune

$\mathbf{P} = mg\ \mathbf{j};$
$\mathbf{F} = 2\ q^2/(\ \ell/2)^2\ \mathbf{i}$
$\mathbf{T} = T_x\ \mathbf{i} + T_y\ \mathbf{j}$

Scegliendo come polo il punto si sospensione del filo , la tensione del filo non compare nell'equazione perchè la sua retta di azione passa per il polo, scegliendo il senso orario come positivo, si ha

$$mg\ \ell\ \sin\alpha = (kq^2/(\ \ell/2)^2)\ \ell\ \cos\alpha$$

Considerando che lo spostamento lungo x della pallina è $\ell/4$ osservando il triangolo rettangolo con base $\ell/4$ ed ipotenusa ℓ si ha $\ell/4 = \ell \sin\alpha$ e quindi $\sin\alpha = ¼$ e $\cos\alpha = (1\ \ 1/16)^{1/2}$
dunque

$$mg/4 = k\ 4\ q^2/\ \ell^2\ (15/16)^{1/2} \quad \text{da cui}$$

$$q = \sqrt{\frac{mg}{16k}\ell^2\sqrt{\frac{16}{15}}} = 0.58\mu C$$

Si considerino due cariche q_1 e q_2 (stesso segno di carica) di cui la prima ferma e la seconda, ad una distanza infinita dalla prima, che si muove in direzione di quella con una velocità iniziale v_∞. Si calcoli la distanza di arresto della seconda carica in funzione delle altre quantità.

Ricordando la seconda legge della dinamica, sappiamo che in questo caso

$$m\frac{d^2r}{dt^2 = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = mv(r)\frac{dv}{dr} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

che si può riscrivere come

$$v(r)dv = \frac{q_2\ q_1}{\pi\epsilon_0 m}\frac{dr}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v(r)^2}{2} = -\frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r} + C$$

e fissando C all'infinito quale

$$r \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{v_\infty^2}{2}$$

si ha che

$$\frac{v(r)^2}{2} = -\frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r} + \frac{v_\infty^2}{2}\ .$$

Imponiamo che si fermi quando $v(r) = 0$ ottenendo la distanza di arresto

$$0 = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{q_1\ q_2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r} = \frac{v_\infty^2}{2}\frac{4\pi\epsilon_0 m}{q_1\ q_2} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{q_1\ q_2}{v_\infty^2 2\pi\epsilon_0 m}$$