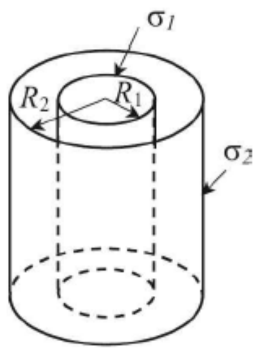
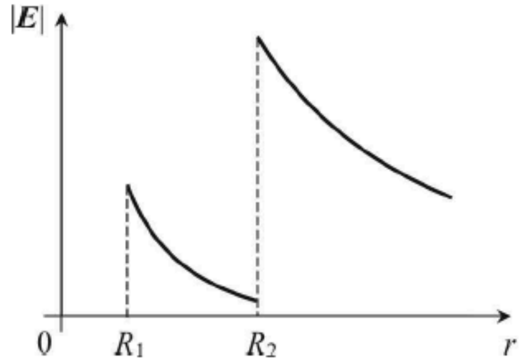
Esercizio 1.



Una carica elettrica è distribuita, con densità superficiale positiva σ_1 e σ_2, su due superfici cilindriche coassiali infinite di raggi R_1 e R_2 rispettivamente, come mostrato in figura. Si calcolino il campo elettrostatico e il potenziale in tutto lo spazio, assumendo nullo il potenziale sulla superficie di raggio R_2.

Data la simmetria della distribuzione di carica possiamo calcolare il campo elettrostatico applicando il teorema di Gauss. Il campo è radiale ed assume lo stesso modulo su superfici cilindriche coassiali con la distribuzione di carica assegnata. Assumendo come superficie di Gauss Σ una di tali superfici cilindriche di altezza arbitraria h e di raggio r, si ottiene che il flusso uscente del campo $\mathbf{E}$ è dato da:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 2\pi r h E. \tag{1}$$



Per $0 < r < R_1$, applicando il teorema di Gauss si ha:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = 0 \tag{2}$$

dal momento che non c'è alcuna carica all'interno della superficie cilindrica di raggio r. Dalle (1) e (2) si ottiene:

$$\mathbf{E} = 0. \tag{3}$$

Procedendo allo stesso modo, per $R_1 < r < R_2$ si ha:

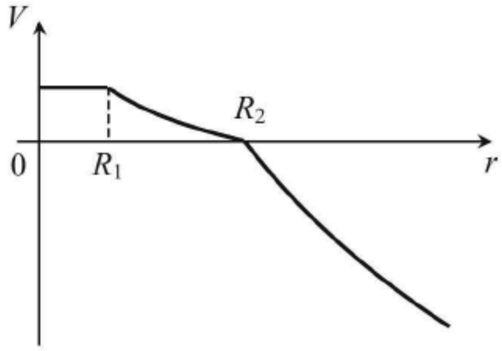
$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \frac{\sigma_1 2\pi R_1 h}{\epsilon_0} \tag{4}$$

dal momento che la carica interna alla superficie Σ è distribuita sulla superficie cilindrica di raggio R_1. Utilizzando le (1) e (4) si ottiene:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r}\,\mathbf{u_r} \tag{5}$$

essendo $\mathbf{u_r}$ il versore radiale uscente. Infine, per $r > R_2$ si ottiene:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \frac{2\pi h(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\epsilon_0} \tag{6}$$



Dalle (1) e (6) si ha:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r}\ \mathbf{u_r} \tag{7}$$

L'andamento del campo elettrico in funzione di r è mostrato in figura. Si noti che in corrispondenza delle due distribuzioni di carica superficiali il campo elettrostatico è discontinuo. Calcoliamo ora il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica, ricordando che si assume nullo il potenziale per $r = R_2$. Per $r \geq R_2$ si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\int_{R_2}^{r} E\ dr = -\frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \int_{R_2}^{r} \frac{dr}{r} \tag{8}$$

da cui si ricava:

$$V(r) = -\frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0}\ \ln \frac{r}{R_2} \tag{9}$$

Per $R_1 \leq r \leq R_2$ si ha:

$$\int_0^{V(r)} dV = -\int_{R_2}^{r} E\ dr = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^{r} \frac{dr}{r} \tag{10}$$

da cui:

$$V(r) = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0}\ \ln \frac{r}{R_2} \tag{11}$$

Infine, per $0 \leq r \leq R_1$, dal momento che il campo elettrostatico è nullo, il potenziale è costante. Poichè per $r = R_1$ il potenziale deve essere continuo (il campo non diverge), si ottiene:

$$V(r) = V(R_1) = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0}\ \ln \frac{R_1}{R_2} \tag{12}$$

L'andamento del potenziale elettrostatico in funzione di r è mostrato in figura.

Esercizio 2. (da completare)

Si consideri una sfera con centro in O_1 e raggio R_1, uniformemente carica con densità di carica volumetrica ρ. All'interno della sfera viene praticato un foro sferico con centro in O_2 e raggio $R_2 < R_1$, all'interno del quale c'è il vuoto, come mostrato in figura. Sia R la distanza fra O_1 e O_2. Si calcoli il campo elettrico all'interno del foro.