Home
LE PAGINE DEL PROF
Moduli per l'elettronica | Ali... per la mente | Biografie notevoli | Moduli per la matematica | Link interessanti | Pubblicazioni | @ E-MAIL

Elementi di Goniometria e Trigonometria

- Angoli ed unità di misura
- Angoli orientati
- Circonferenza goniometrica
- Funzioni goniometriche
- Relazione fondamentale della goniometria
- Periodicità delle funzioni goniometriche
- Significato geometrico della tangente e cotangente
- Angoli associati
- Formule goniometriche

Formule goniometriche

Addizione e sottrazione

Formula di sottrazione per il coseno

Introduciamo la formula di sottrazione del coseno e cerchiamo di dimostrarla.

Per ogni α e per ogni β vale la regola:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

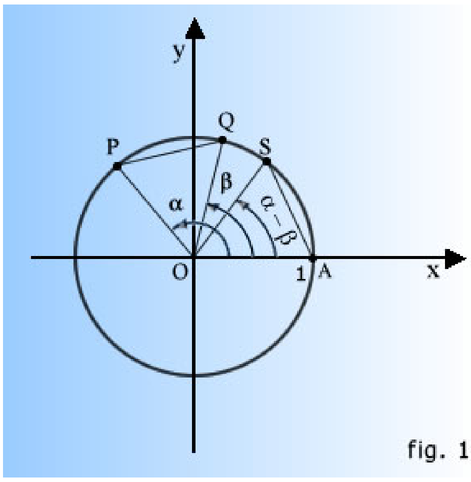

fig. 14

Vediamo la dimostrazione.
Consideriamo la figura 14, nella quale sono stati tracciati l'angolo α, l'angolo β e l'angolo $\alpha-\beta$.
In base alle definizioni delle funzioni goniomentriche possiamo affermare che i punti P, Q e S hanno coordinate:

P $(\cos\alpha;\ \operatorname{sen}\alpha)$
Q $(\cos\beta;\ \operatorname{sen}\beta)$
S $(\cos(\alpha-\beta);\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$

Ricordando che la misura del segmento che unisce i punti P_1 $(x_1;y_1)$ e P_2 $(x_2;y_2)$ vale:

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

applichiamo tale relazione per determinare le corde $\overline{PQ}$ e $\overline{SA}$, ricordando le coordinate di $A(1;0)$:

$$\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2}$$
$$\overline{SA}=\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)}$$

che, eliminando le radici, possono essere riscritte:

$$\overline{PQ}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2$$

$$\overline{SA}^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$

Osservando la figura possiamo affermare che le corde $\overline{PQ}$ e $\overline{SA}$ sono congruenti in quanto su di esse insistono gli stessi angoli al centro (l'angolo al centro corrispondente alla corda $\overline{SA}$ è per costruzione $\alpha-\beta$; quello al centro relativo alla corda $\overline{PQ}$ è anch'esso $\alpha-\beta$. Sviluppando le potenze, quindi, ed egualiando le espressioni delle corde:

$$\overline{PQ}^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=$$
$$\overline{SA}^2=\cos^2(\alpha-\beta)+1-2\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

eguagliando, dividendo per 2 e cambiando di segno:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Formula di addizione per il coseno

Dimostriamo ora la formula di addizione per il coseno. Ovvero:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Per fare ciò riscriviamo il primo membro della precedente ugualianza in questo modo:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$$

alla quale possiamo applicare il teorema, appena dimostrato, del coseno di una differenza degli angoli α e β:

$$\cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

ricordando, in base a quanto dimostrato per glia angoli opposti, che:

$\cos\ \alpha = \cos(-\alpha)$ e $\operatorname{sen}\ \alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$

possiamo scrivere:

$$\cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

Formula di sottrazione per il seno

Dimostriamo ora la formula di sottrazione per il seno. Ovvero:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Ricordando che:

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$ e $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

possiamo scrivere:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)] = \cos[(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta] =$$
$$= \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

che è ciò che dovevamo dimostrare.

Formula di addizione per il seno

Dimostriamo infine il teorema del seno di una somma di angoli:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Il primo membro lo possiamo riscrivere:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)]$$

applicando il teorema del seno di una differenza appena dimostrato abbiamo:

$$\operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha$$

e ricordando le formule per gli angoli opposti:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Formula di addizione e sottrazione per tangente e cotangente

In modo del tutto analogo si può dimostrare che:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\ \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\ \operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}$$

con α e $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Torna su