

Variabili Aleatorie e Misurabilità

Variabili Aleatorie

- Idea:

- ▶ per un dato esperimento aleatorio rappresentato da Ω , si possono calcolare diverse **quantità, o enti, che dipendono dal risultato del esperimento**
- ▶ formalmente, si tratta di applicazioni

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	variabile aleatoria
$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$	vettore di variabili aleatorie
$X : \Omega \rightarrow E$	ente aleatorio a valori in E

- ▶ il vero $\omega \in \Omega$ che si realizza non è noto, quindi non è noto $X(\omega)$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, definire le seguenti variabili aleatorie: risultato del primo e del secondo dado; somma, prodotto, massimo, minimo, scarto fra i due dadi
- Esercizio. Infiniti lanci di una moneta, definire le seguenti variabili aleatorie: $X_n = 1$ se esce T al lancio n -esimo, 0 altrimenti; $T_n =$ numero di T nei primi n lanci; $D_n =$ differenza tra il numero di T e C nei primi n lanci; $C_n =$ numero massimo di T consecutive nei primi n lanci

Variabili Aleatorie

- Per varie ragioni, solo applicazioni **misurabili** possono essere considerate
 - ▶ $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$ due spazi misurabili
 - ▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ **misurabile** se

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ per ogni } A' \in \mathcal{F}'$$

\rightsquigarrow ogni controimmagine di insiemi in \mathcal{F}' è in \mathcal{F}

- ▶ $f^{-1}(A')$ è la **controimmagine** di A' tramite f :

$$f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A'\} \subset \Omega$$

Variabili Aleatorie

- Proprietà della controimmagine: $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, $A' \subset \Omega'$,
 $(A'_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \Omega'$
 - ▶ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
 - ▶ $f^{-1}(\Omega') = \Omega$
 - ▶ $f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}$
 - ▶ $f^{-1}(\cup_\alpha A'_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$
 - ▶ $f^{-1}(\cap_\alpha A'_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(A'_\alpha)$
- la controimmagine **commuta** con le operazioni tra insiemi

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Esempi su applicazioni misurabili

- ▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ **applicazione costante**: fissato $\bar{\omega}' \in \Omega$, $f(\omega) = \bar{\omega}'$ per ogni $\omega \in \Omega$; è sempre misurabile
- ▶ $\Omega = \Omega'$, f **applicazione identica**: $f(\omega) = \omega$; quando è misurabile?
- ▶ $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile allora è anche $\mathcal{G} / \mathcal{G}'$ misurabile per ogni $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}, \mathcal{G}' \subset \mathcal{F}'$
- ▶ ogni $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ è $2^\Omega / \mathcal{F}'$ e $\mathcal{F} / \{\emptyset, \Omega'\}$ misurabile

Variabili Aleatorie

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità
 - ▶ una **variabile aleatoria** è una applicazione

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathcal{F} / \mathcal{B}$ misurabile

- ▶ un **vettore aleatorio** è una applicazione

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{F} / \mathcal{B}^n$ misurabile

- ▶ un **ente aleatorio** è una applicazione

$$X : \Omega \rightarrow E$$

$\mathcal{F} / \mathcal{E}$ misurabile, con \mathcal{E} σ -algebra su E

Variabili Aleatorie

- X variabile aleatoria su (Ω, \mathcal{F}, P)

- ▶ per ogni Boreliano $B \in \mathcal{B}$,

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

- ▶ notazione:

$$X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \text{"}X \text{ sta in } B\text{"}$$

- ▶ perché si richiede la misurabilità? si può calcolare

$$P(X^{-1}(B)) = P(\{X \in B\}) = P(X \in B)$$

(si possono omettere le parentesi)

Variabili Aleatorie

- Esempio. (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, $A \subset \Omega$; l'indicatore di A è

$$1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \notin A \\ 1 & \text{se } \omega \in A \end{cases}$$

- ▶ è una variabile aleatoria $\iff A \in \mathcal{F}$
- ▶ 1 se A è V, 0 altrimenti
- Esercizio. Scrivere tramite 1_A e 1_B i seguenti indicatori:
 $1_{\bar{A}}, 1_{A \cup B}, 1_{A \cap B}, 1_{A-B}, 1_{A \Delta B}$

Variabili Aleatorie

- Su (Ω, \mathcal{F}, P)
 - ▶ X **variabile aleatoria semplice** se prende un numero finito di determinazioni ($X(\Omega)$ finito); tutte e sole le variabili aleatorie del tipo

$$X = \sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, m$

- ▶ X **variabile aleatoria discreta** se prende al più un numerabile di determinazioni

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

- In uno spazio di probabilità finito (discreto) tutte le variabili aleatorie sono semplici (discrete)

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili
 - ▶ [Criterio standard di misurabilità] (Ω, \mathcal{F}) , (Ω', \mathcal{F}') con $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C}')$
 $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ tale che

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \text{ per ogni } A' \in \mathcal{C}'$$

allora f è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile

Prova: mostrare che la classe dei “buoni insiemi”

$$\mathcal{G}' = \{A' \subset \Omega' \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{F}\}$$

è una σ -algebra su Ω'

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se

$$f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R}$$

allora f è \mathcal{F}/\mathcal{B} misurabile

▶ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, se

$$f^{-1}((-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n]) \in \mathcal{F} \text{ per ogni } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

allora f è $\mathcal{F}/\mathcal{B}^n$ misurabile

- Esercizio. verificare che

▶ $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \cos x$ sono \mathcal{B}/\mathcal{B} misurabili

▶ $f(x, y) = (x + y, x, y)$ è $\mathcal{B}^2/\mathcal{B}^3$ misurabile

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili

▶ [Composizione] $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}'), (\Omega'', \mathcal{F}'')$

$$f : \Omega \rightarrow \Omega', \quad g : \Omega' \rightarrow \Omega''$$

se f $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile, g $\mathcal{F}' / \mathcal{F}''$ misurabile, allora

$$g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega'', \quad g \circ f(\omega) = g(f(\omega))$$

è $\mathcal{F} / \mathcal{F}''$ misurabile

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili

- ▶ [Operazioni fra funzioni misurabili] $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{F}/\mathcal{B} misurabili, allora

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad c \cdot f \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\}$$

$$\frac{1}{f} \quad (\text{se } f(\omega) \neq 0 \text{ per ogni } \omega \in \Omega)$$

sono \mathcal{F}/\mathcal{B} misurabili

(nell'ultimo caso, basta che $f \neq 0$ q.c.)

Variabili Aleatorie

- Variabili aleatorie **estese**: a volte conviene considerare applicazioni che prendono valori $+\infty$ e/o $-\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

(convenzione: $-\infty \leq a \leq +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$)

- ▶ Esempio. infiniti lanci di una moneta: W tempo di attesa per la prima T
- ▶ σ -algebra dei Boreliani su $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathcal{B}} = \sigma(\{[-\infty, a] \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\})$$

si ottengono tutti i Boreliani di \mathbb{R} a cui si aggiungono uno o entrambi i simboli $+\infty, -\infty$

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili; (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità

$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{F}/\mathcal{B} misurabile per ogni $n \geq 1$

- ▶ allora

$$\sup_n f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \inf_n f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

sono \mathcal{F}/\mathcal{B} misurabili

- ▶ riesce

$$E_1 = \{\omega \in \Omega \mid \lim_n f_n(\omega) \text{ esiste in } \mathbb{R}\} \in \mathcal{F}$$

$$E_2 = \{\omega \in \Omega \mid \lim_n f_n(\omega) \text{ esiste in } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{F}$$

- ▶ se $P(E_1) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è \mathcal{F}/\mathcal{B} misurabile
se $P(E_2) = 1$ allora $\lim_n f_n$ è $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ misurabile

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili

- ▶ [Restrizione] $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ misurabile, $D \in \mathcal{F}$; la restrizione

$$f_D : D \rightarrow \Omega', \quad f_D(\omega) = f(\omega)$$

è $\mathcal{F}_D / \mathcal{F}'$ misurabile, dove

$$\mathcal{F}_D = \{A \cap D \mid A \in \mathcal{F}\}, \quad (\sigma\text{-algebra traccia})$$

inoltre, se $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$, allora

$$\mathcal{F}_D = \sigma(\{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}\})$$

- ▶ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^n$, la σ -algebra da considerare in D è

$$\mathcal{B}_D^n = \sigma(\{I \cap D \mid I \text{ iper-rettangoli}\})$$

↪ Boreliani su D

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili

- ▶ [Ricomposizione] $\mathbb{P} = (D_n)_{n \geq 1}$ partizione discreta di Ω ,

$$f_n : D_n \rightarrow \Omega'$$

$\mathcal{F}_{D_n} / \mathcal{F}'$ misurabile per ogni $n \geq 1$, allora

$$f : \Omega \rightarrow \Omega', \quad f(\omega) = \begin{cases} f_1(\omega) & \text{se } \omega \in D_1 \\ f_2(\omega) & \text{se } \omega \in D_2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile

- ▶ si possono definire le funzioni “a pezzi”

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili
 - ▶ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; se l'insieme dei punti di discontinuità è discreto, allora f è $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}$ misurabile
 - ▶ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cioè

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

con $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, è $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}^m$ misurabile se ogni f_i è $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}$ misurabile

Variabili Aleatorie

- Proprietà delle applicazioni misurabili
 - ▶ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; se l'insieme dei punti di discontinuità è discreto, allora f è $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}$ misurabile
 - ▶ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cioè

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

con $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, è $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}^m$ misurabile se ogni f_i è $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}$ misurabile

Variabili Aleatorie

- Tutte le funzioni di uso pratico da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m sono misurabili
- operazioni con variabili aleatorie, **purché ben definite**, portano a nuove variabili aleatorie
 - ▶ se $X, Y, (X_n)_{n \geq 1}$ sono variabili aleatorie, tali sono

$$X + Y, XY, \frac{X}{Y}, \max\{X, Y\}, \min\{X, Y\}$$

$$\sup_n X_n, \inf_n X_n, \lim_n X_n, \sum_n X_n$$

$$f(X) \text{ con } f \text{ misurabile: } e^X, \log X, X^\alpha, \dots$$

- ▶ se $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}/\mathcal{B}^n$ misurabile, $X \in D$ q.c. ($D \in \mathcal{B}^n$),
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}$ misurabile, allora $f(X)$ è una (ben definita) variabile aleatori

Variabili Aleatorie

- $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, \mathcal{F}' σ -algebra in Ω' ; la σ -algebra generata da f è

$$\begin{aligned}\sigma(f) &= \cap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega, f \text{ è } \mathcal{G} / \mathcal{F}' \text{ misurabile} \} \\ &= \{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{F}' \}\end{aligned}$$

- $\mathcal{F} = \sigma(f)$ è la **più piccola σ -algebra su Ω che rende f misurabile**; è caratterizzata da
 - ▶ \mathcal{F} è una σ -algebra su Ω
 - ▶ f è $\mathcal{F} / \mathcal{F}'$ misurabile
 - ▶ per ogni σ -algebra \mathcal{G} su Ω tale che f è $\mathcal{G} / \mathcal{F}'$ misurabile, è $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

Variabili Aleatorie

- $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha : \Omega \rightarrow \Omega'$, \mathcal{F}' σ -algebra in Ω' ; la σ -algebra generata da f_α , $\alpha \in I$ è

$$\begin{aligned}\sigma(f_\alpha, \alpha \in I) &= \cap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega, \\ &\quad f_\alpha \text{ è } \mathcal{G} / \mathcal{F}' \text{ misurabile per ogni } \alpha \in I \} \\ &= \sigma(\{f_\alpha^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{F}', \alpha \in I\})\end{aligned}$$

- $\sigma(f_\alpha, \alpha \in I)$ è la più piccola σ -algebra su Ω che rende f_α misurabile per ogni $\alpha \in I$

Variabili Aleatorie

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità
 - ▶ X variabile aleatoria

$$\sigma(X) = \{\{X \in B\} \mid B \in \mathcal{B}\}$$

informazione data dall'osservazione di X

- ▶ $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ variabili aleatorie

$$\sigma(X_\alpha, \alpha \in I) = \sigma(\{X_\alpha \in B\} \mid B \in \mathcal{B}, \alpha \in I)$$

informazione data dall'osservazione di ogni $X_\alpha, \alpha \in I$

Variabili Aleatorie

- $\mathbb{P} = (A_n)_{n \geq 1}$ partizione discreta di Ω , $\mathcal{F} = \sigma(\mathbb{P})$ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è \mathcal{F}/\mathcal{B} misurabile se e solo se f è costante su ognuno degli A_n
- Esempio.

- ▶ $\sigma(1_A) = \sigma(\{A, \bar{A}\}) = \sigma(\{A\})$

- ▶ X variabile aleatoria discreta con determinazioni x_1, x_2, \dots

$$\sigma(X) = \sigma(\{\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}, \dots\})$$

se Y è $\sigma(X)/\mathcal{B}$ misurabile $\iff Y$ è funzione di X

Variabili Aleatorie

- (Ω, \mathcal{F}, P) , $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$; Y è $\sigma(X)/\mathcal{B}^m$ misurabile se e solo se **esiste una funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathcal{B}^n/\mathcal{B}^m$ misurabile** tale che

$$Y = g(X)$$

- Y è $\sigma(X)/\mathcal{B}^m$ misurabile:
 - ▶ se e solo se $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$
 - ▶ **significa che si può calcolare Y partendo da X**

Variabili Aleatorie

- Esercizio. X_1, \dots, X_n variabili aleatorie,

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

.....

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n$$

allora

$$\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$$

- Esercizio. X e Y sono variabili aleatorie su (Ω, \mathcal{F}, P) $c \in \mathbb{R}$; mettere in ordine crescente di inclusione

$$\mathcal{F}, \sigma(X, X + Y), \sigma(|X|), \sigma(X), \sigma(X + Y, X - Y),$$

$$\sigma(X^2), \sigma(X, Y), \{\emptyset, \Omega\}, \sigma(X + c), \sigma(X, X^2 - Y^2).$$

Variabili Aleatorie

- Esercizio. Lancio di due dadi, X_1, X_2 risultato del primo e secondo dado; $Z = X_1 + X_2$, $W = X_1 \cdot X_2$, $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$; dire quali delle seguenti relazioni sono V o F

1 $\sigma(X_1 \cdot X_2) = \sigma(Z, W)$

2 $\sigma(X_1 \cdot X_2) = \sigma(U, V)$

3 $\sigma(Z, U) = \sigma(Z, V)$

4 $\sigma(X_1 - X_2) = \sigma(V - U, 1_{\{X_1 > X_2\}})$

5 $\sigma(X_1, U) = \sigma(X_2, V)$

6 $\sigma(Z) \cap \sigma(W) = \{\emptyset, \Omega\}$

7 $\sigma(U) \cap \sigma(V) = \{\emptyset, \Omega\}$