25 Mattina

Limite di successioni

Data una successione $\{x_n\}$ di numeri reali e dato $L \in \mathbb{R}$ si dice $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \text{t.c.} \quad n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

<u>Osservazione</u> La successione $\{x_n\}$ è una funzione

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(n) = x_n$.

<u>Def</u> Sia $f: X \to \mathbb{R}$ dove $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$.

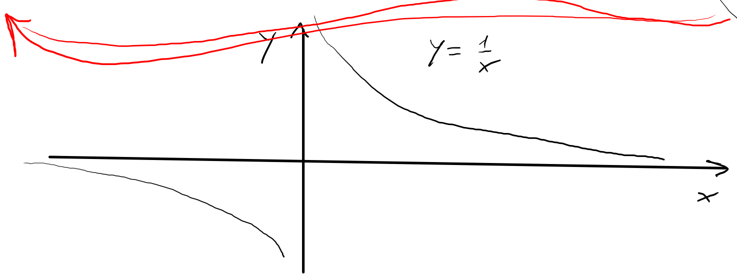
Dato $L \in \mathbb{R}$ si dice $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \text{t.c.} \quad x > N_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon} \quad *$$

Ad esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad$ (Ricordare $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$)

$\mathrm{Dom}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad \sup\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right) = +\infty$

$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$ se $x > 0 \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$



Concludiamo che $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$

Abbiamo dimostrato che

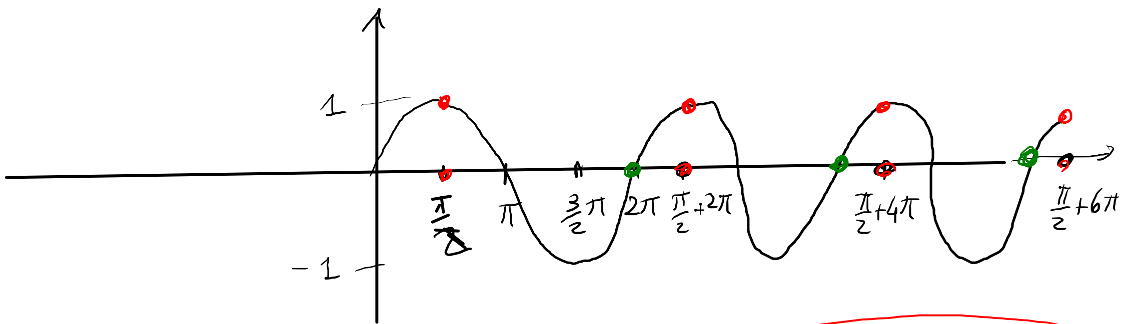
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon$ (abbiamo scelto $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$)

t.c. $x > N_\varepsilon$ e $x \in \mathrm{dom}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$

Cioè $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Verifichiamo che $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(x)$ non esiste

$\operatorname{Dom}(\sin(x)) = \mathbb{R}$ con $\sup \mathbb{R} = +\infty$, quindi ha senso considerare il limite.



Dobbiamo dimostrare che la proposizione $\exists\, L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x > N_\varepsilon \Rightarrow |\sin(x) - L| < \varepsilon \qquad (1)$$

è falsa. Procediamo per assurdo.

Osservo che $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \forall n$

Se (1) fosse vera, siccome $\forall N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n > N_\varepsilon \left(\iff n > \frac{N_\varepsilon - \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right)$, allora,

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n > N_\varepsilon \Rightarrow \Big|\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}_{1} - L\Big| < \varepsilon \iff |1 - L| < \varepsilon$$

Concludiamo che $|1 - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \boxed{L = 1}$

Osservo che $\operatorname{sen}(2\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se (1) fosse vera, siccome $\forall N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$2\pi n > N_\varepsilon \left(\iff n > \frac{N_\varepsilon}{2\pi} \right)$ allora

$$2\pi n > N_\varepsilon \Rightarrow \Big|\overbrace{\operatorname{sen}(2\pi n)}^{0} - L\Big| < \varepsilon \iff |L| < \varepsilon.$$

Concludiamo che $|L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \boxed{L = 0}$

$0 = 1$
Assurdo!

Def Un insieme $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ è periodico rispetto ad un $T > 0$ se $\boxed{\boxed{x \in X \Rightarrow x + nT \in X} \ \forall n \in \mathbb{Z}}$.

Esercizio Dimostrare che se $X \neq \emptyset$ è periodico rispetto ad un $T > 0$ allora $\sup X = +\infty$, $\inf X = -\infty$

Risposta. Sia $x_0 \in X$. Allora $Y = \{ x_0 + nT : n \in \mathbb{Z} \} \subseteq X$.

$\lim_{n \to +\infty} (x_0 + nT) = +\infty$ è facile da dimostrare.

Questo implica $\sup Y = +\infty \Rightarrow \sup X = +\infty$

Def Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, con X un sottoinsieme periodico di periodo $T > 0$ di $\mathbb{R}$, si dice periodico di periodo T se $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in X$.

Esercizio Dimostrare che dato una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, periodica di periodo $T > 0$ e non costante, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste.

Teor Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$

Se L_1 ed L_2 sono numeri reali, entrambi limiti di f a $+\infty$, allora $L_1 = L_2$

Dim $L_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $L_2 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{1\varepsilon} \text{ t.c. } x > N_{1\varepsilon} \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{2\varepsilon} \text{ t.c. } x > N_{2\varepsilon} \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Sia ora $N_{3\varepsilon} = \max(N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon})$. Allora, per

$$x > N_{3\varepsilon} \text{ e } x \in X \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq \underbrace{|L_1 - f(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{< \varepsilon}$$

$$< 2\varepsilon$$

Conclusione $|L_1 - L_2| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\left(|L_1 - L_2| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\right) \Longleftrightarrow \left(|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\right)$$

, e siccome si ha

Concludiamo $|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow L_1 = L_2$

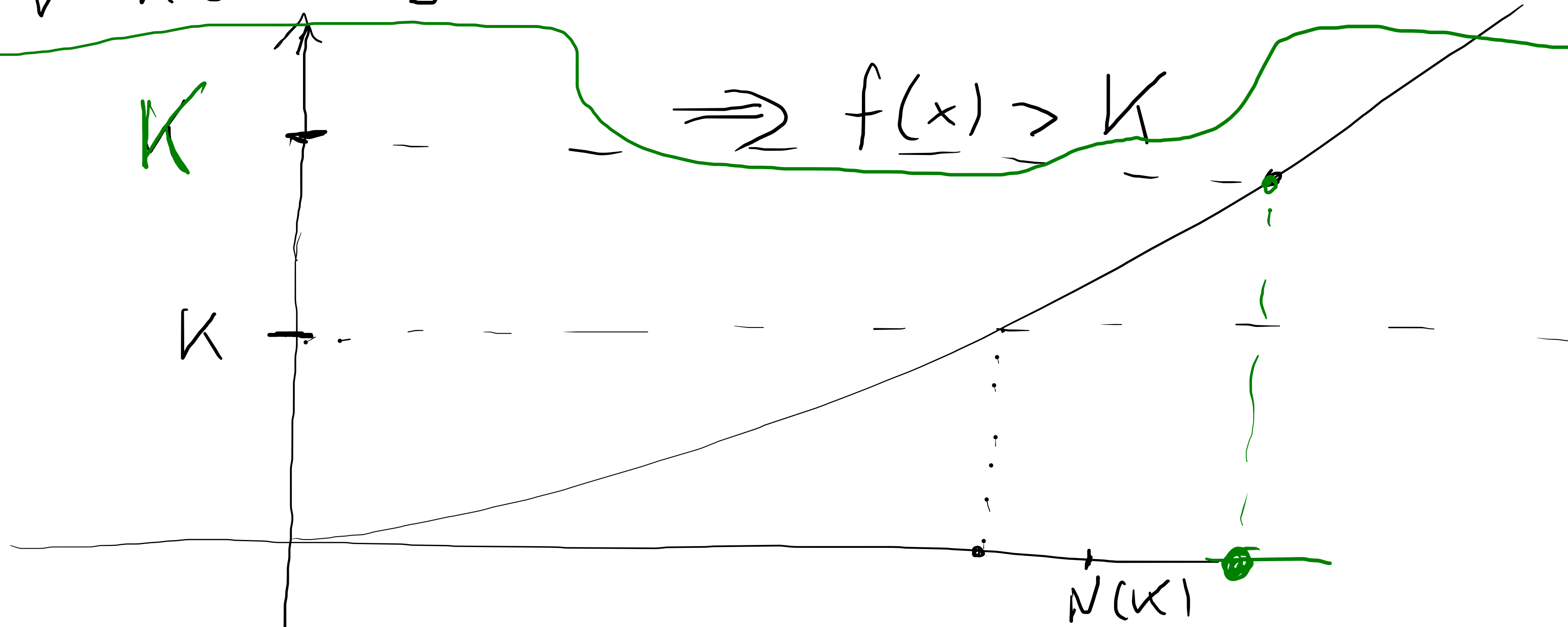
Finora dato $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$ e dato $L \in \mathbb{R}$ abbiamo definito cosa vuole dire

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Come esprimiamo il fatto che si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

Si esprime dicendo che

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists N(K) \text{ t.c. } x > N(K) \text{ e } x \in X \Longrightarrow f(x) > K$$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\quad \forall K \ \exists N(K)$ t.c. $x > N(K)$ e $x \in X \Rightarrow f(x) > K$

Esempio

$b > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty$.

Poniamo $a = b - 1 \iff b = 1 + a$

$b > 1 \iff a > 0$

$b^n = (1+a)^n \geq 1 + na$. Per K fissato

cerchiamo gli n t.c. $1 + na > K \iff n > \frac{K-1}{a}$

Quindi $n > \frac{K-1}{a} \Rightarrow K < 1 + na \leq b^n$

Cioè $n > \frac{K-1}{a} \Rightarrow b^n > 1$ $\qquad N(K) = \frac{K-1}{a}$

Abbiamo dimostrato che

$\forall K \ \exists N(K) \left(= \frac{K-1}{a}\right)$ t.c. $n > N(K) \Rightarrow b^n > K$.

Conclusione $\lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty$

Definite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,

Definite $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\inf X = -\infty$

Estendiamo parzialmente somma e prodotto in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$a + (+\infty) = +\infty \qquad \forall\ a > -\infty$$

$$a + (-\infty) = -\infty \qquad \forall\ a < +\infty$$

($+\infty + (-\infty)$ resta non definito)

$$a\,(+\infty) = +\infty \qquad \forall\ a > 0$$

$$a\,(+\infty) = -\infty \qquad \forall\ a < 0$$

(resta indefinito $0 \cdot (\pm\infty)$)

$$a\,(-\infty) = -\infty \qquad \forall\ a > 0$$

$$a\,(-\infty) = +\infty \qquad \forall\ a < 0$$

$$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\begin{cases} (+\infty) + (-\infty) & \text{resta indefinito} \\ (\pm\infty) \cdot 0 & \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

$$3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$+\infty - 7 = +\infty$$

Teor. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$ e siano

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x) \right) = a + b$, eccetto per $(a,b) = \begin{cases} (+\infty, -\infty) \\ (-\infty, +\infty) \end{cases}$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) g(x) = a b$, eccetto $(a,b) = \begin{cases} (0, \pm\infty) \\ (\pm\infty, 0) \end{cases}$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ per $b \neq 0$

$(a,b) = (\pm\infty, \pm\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x^2} = ? \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = 0 - 0 = 0$$