Mercoledì 26 ottobre

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$, X ed f periodica di periodo $T > 0$ $\quad (x \in X \Rightarrow x + nT \in X \ \forall n \in \mathbb{Z})$

$f(x+T) = f(x) \quad \forall \ x \in X$

$(f(x+nT) = f(x) \quad \forall x \in X$ e $\forall n \in \mathbb{Z})$

Dimostrare che se f non è costante allora $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste.

<u>Verifica</u> f non costante significa che esistono due punti $x_0, y_0 \in X$ t.c. $f(x_0) \neq f(y_0)$

Supponiamo per assurdo che $\exists \ L \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$. Cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ t.c. $\cancel{x} > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
$x \in X$

x_0

y_0

$\forall \varepsilon > 0$
So che $\exists \ n \in \mathbb{N}$ t.c. $x_0 + nT > N(\varepsilon)$ $\quad (y_0 + nT > N(\varepsilon))$ $\iff n > \frac{N(\varepsilon) - x_0}{T}$ $\quad \left(n > \frac{N(\varepsilon) - y_0}{T}\right)$

$|f(x_0 + nT) - L| < \varepsilon \iff |f(x_0) - L| < \varepsilon$

$|f(y_0) - L| < \varepsilon$

Conclusione che $\forall \varepsilon > 0$ si ha $|f(x_0) - L| < \varepsilon \Rightarrow \boxed{f(x_0) = L}$

$\forall \varepsilon > 0$ si ha $|f(y_0) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(y_0) = L$

Siccome per ipotesi $f(x_0) \neq f(y_0)$ si ottiene un assurdo.

<u>Esercizio</u> Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$

Dimostrare che se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ allora,

per ogni successione $\{x_n\}$ in X con $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

allora $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

Come utilizzare ~~utilizzare~~ quest'ultimo esercizio nell'esercizio precedente?

Se per assurdo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ allora, visto che $\lim_{n \to +\infty} (x_0 + nT) = +\infty$ $\quad \lim (y_0 + nT) = +\infty \Rightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} f(x_0 + nT) = L$, $\lim_{n \to +\infty} f(y_0 + nT) = L$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, inoltre $\lim_{n \to +\infty} (x_0 + nT) = +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} (y_0 + nT) = +\infty$

segue $\lim_{n \to +\infty} \overbrace{f(x_0 + nT)}^{f(x_0)} = L = f(x_0)$

$$\not\parallel$$

$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{f(y_0 + nT)}_{f(y_0)} = L = f(y_0)$

Assurdo.

$b > 1 \qquad N \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^N = +\infty$$

Questo limite ci dice che b^n cresce molto più rapidamente di n^N.

$$b = (1+a)^{N+1}$$

$$\sqrt[N+1]{b} > 1 \qquad \sqrt[N+1]{b} = 1+a \qquad a > 0$$

$$\frac{b^n}{n^N} = \frac{\left((1+a)^{N+1}\right)^n}{n^N} = \frac{\left((1+a)^n\right)^{N+1}}{n^N}$$

Per Bernoulli $(1+a)^n \geq 1 + na \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (poiché $a>0$)

$$\left((1+a)^n\right)^{N+1} \geq (1+na)^{N+1}$$

$$+\infty > \frac{b^n}{n^N} = \frac{\left((1+a)^n\right)^{N+1}}{n^N} \geq \frac{(1+na)^{N+1}}{n^N}$$

se dimostro che $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+na)^{N+1}}{n^N} = +\infty} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+na)^{N+1}}{n^N} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{N+1} a^{N+1}}{n^N} = \lim_{n\to+\infty} a^{N+1} n = +\infty$$

$(1+x)^{N+1} = x^{N+1} +$ termini di grado più piccolo

$(1+na)^{N+1} = n^{N+1} a^{N+1} +$ termini di grado più piccolo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \qquad \forall\, b > 1$$

$$n! \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\, \frac{n^n}{e^n} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Vi ricordo che se $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ si dice monotona se f è una funz. crescente oppure se f è una funz. decrescente

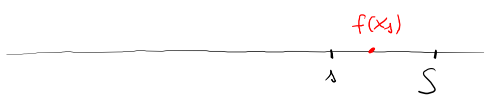
<u>Teor</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $\boxed{f \text{ crescente}}$ (decrescente) Allora

1) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f(X)}$ $(\inf f(X))$ dove $\underline{f(X)} = \{ f(x) : x \in X \}$ immagine di f

2) Se $\inf X = -\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf f(X)$ $\big(\sup f(X)\big)$

<u>Dim</u> Solo nel caso f crescente e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f(X)$.

Denoto $S = \sup f(X)$, $S \in (-\infty, +\infty]$



Sia $s \in \mathbb{R}$ con $s < S$. So che $\exists\, x_s \in X$ t.c.
$s < f(x_s) \le S$

Infatti, altrimenti avremmo $f(x) \le s \quad \forall x \in X$
$\Rightarrow \quad s \ge S = \sup f(X)$ per la 2° proprietà del sup

$s \ge S > s \quad \Rightarrow s > s$ assurdo.

Concludiamo che $\exists\, x_s \in X$ t.c. $s < f(x_s) \le S$

Ora, siccome f è crescente
$x \ge x_s$ e $x \in X \Rightarrow s < f(x_s) \le f(x) \le S$

$\Rightarrow \big(x \ge x_s \text{ e } x \in X \Rightarrow s < f(x) \le S \big)$

Abbiamo dimostrato quanto segue, dopo ~~aver~~ avere posto
$S := \sup f(X)$ $\quad f(X) = \{ f(x) : x \in X \}$
$\forall\, s \in \mathbb{R}$ con $s < S$ $\exists\, x_s \in X$ t.c.

$x \ge x_s$ e $x \in X \Rightarrow s < f(x) \le S$

Questo implica che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = S$. Ad esempio se $S = +\infty$ abbiamo che $\forall\, s \in \mathbb{R}\ \exists\, x_s \in \mathbb{R}$ t.c. $\underset{x \in X}{x > x_s} \Rightarrow f(x) > s$

$\forall s \in \mathbb{R} \quad \exists\, x_s \in \mathbb{R}$ t.c. $x > x_s$ e $x \in X \Rightarrow f(x) > s$

$\Big(S = +\infty \qquad S = \sup\{f(x) : x \in X\}$

$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists\, N(K)$ t.c. $x > N(K)$ e $x \in X \Rightarrow f(x) > K$

$S < +\infty$

(1) $\Big(\forall s < S \quad \exists\, x_s \in \mathbb{R}$ t.c. $x > x_s$ e $x \in X \Rightarrow s < f(x) \leq S$

Questo implica $\lim_{x \to +\infty} f(x) = S$

$|f(x) - S| < \varepsilon$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon$ t.c. $x > N_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon$

(1) $\Rightarrow$ (2)

Infatti $\forall \varepsilon > 0$ se prendo $s = S - \varepsilon \ (< S)$ dalla (1)

so che $\exists\ x_{S-\varepsilon}$ t.c. $x > x_{S-\varepsilon} \Rightarrow S - \varepsilon < f(x) \leq S \Longrightarrow$

$S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon$

$N_\varepsilon = x_{S-\varepsilon}$

$b > 1$ $\qquad x \to b^x$ funzione esponenziale di base b. Risulta che b^x è crescente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} b^x = \sup\{ b^x : x \in \mathbb{R} \} \geq \sup\{ b^n : n \in \mathbb{N} \} = \boxed{\lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty}$$

<u>Esempio</u> $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ è una successione crescente

e quindi esiste $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \doteq e$ Numero di Neper

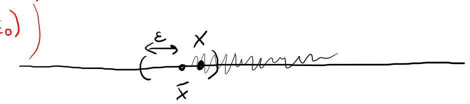
$2 < e < 3$ $\qquad e$ è irrazionale

e^n è irrazionale $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Def Dato $X \subseteq \mathbb{R}$ un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice di punto accumulazione di X se

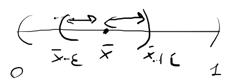
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in X \ \text{t.c.} \ 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$$

$(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0))$



$X' = \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ punto di accumulazione di } X \}$

$(0,1)' = [0,1]$



Se $\bar{x} \in (0,1)$ so che $(0,1) \cap (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon) =$

$0 < \varepsilon < \min(\bar{x}, 1-\bar{x})$ $\qquad = (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$

e per ogni $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ ~~tr~~ $x \neq \bar{x}$ ho

$0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$ e $x \in (0,1)$

$(0,1)' \supseteq (0,1)$

Verifichiamo che $0 \in (0,1)'$

$\forall \, 0 < \varepsilon < 1 \quad (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (0,1) = (0, \varepsilon) \subset (0,1)$

e $\forall x \in (0, \varepsilon)$ ho $0 < |x| < \varepsilon$ ed inoltre $x \in (0,1)$

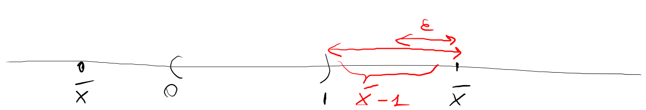
$\Rightarrow 0 \in (0,1)'$

In modo analogo $1 \in (0,1)'$

$(0,1)' \supseteq [0,1]$

$=$

Se $\bar{x} \notin [0,1]$ allora $\bar{x} \notin (0,1)'$



Se $\bar{x} > 1$ dimostriamo che non è un punto di accumulazione cioè che non è vero che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in (0,1) \ \text{t.c.} \ 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$$

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \text{t.c.} \ x \in (0,1) \text{ e } x \neq \bar{x} \Rightarrow |x - \bar{x}| \geq \varepsilon}$$

Se scelgo $0 < \varepsilon \leq \operatorname{dist}(\bar{x}, (0,1)) = \bar{x} - 1$ allora per ogni $x \in (0,1)$

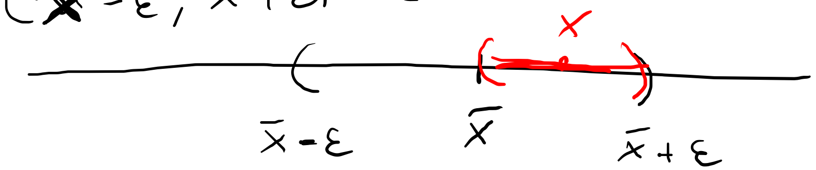
$|x - \bar{x}| = \bar{x} - x = \bar{x} - 1 + 1 - x > \bar{x} - 1 \geq \varepsilon$

$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

Devo dimostrare che $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$ e

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$.

Considero $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ e



Scelgo $(\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon)$. So già che $\exists\, x \in \mathbb{Q}$ con $x \in (\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon)$. Allora $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$

<u>Definizione</u> Dato $X \subseteq \mathbb{R}$ la sua chiusura di X è l'insieme $\overline{X} = X \cup X'$.

<u>Def</u> $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice denso se $\overline{X} = \mathbb{R}$

Esercizio Dimostrare che questa definizione è equivalente alla seguente

X è denso in $\mathbb{R}$ se $\forall\, a < b$ in $\mathbb{R}$ esiste $x \in X$ t.c. $a < x < b$.