MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

E' moto rettilineo con accelerazione costante.

accelerazione **media** coincide con accelerazione **istantanea**

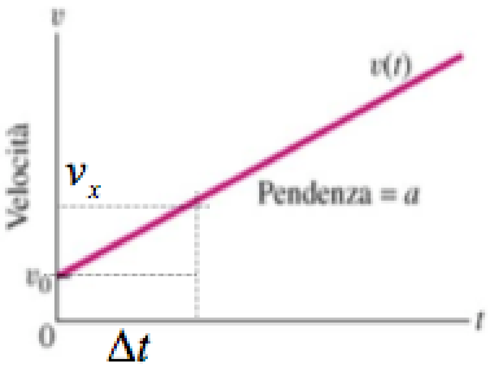
$$\bar{a}_x = a_x = \frac{(v_{x_f} - v_{x_i})}{t_f - t_i} = \frac{v_x - v_{x0}}{t}$$

$t_i = 0, \quad t_f = t$

$v_{xf} = v_x, \quad v_{xi} = v_{x0}$

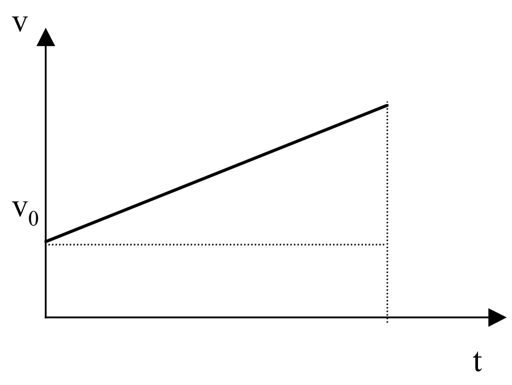
Se accelerazione e' costante → la curva velocita' - tempo e' una retta

infatti derivata di una retta e' una costante.



$$v = at + v_0$$

La velocita' e' direttamente proporzionale al tempo.



L'area sotto la curva da t = 0 ad un qualunque istante t e' lo spostamento x(t) cioe' le legge oraria (integrale curva velocita'-tempo).

Ricaviamo x(t) geometricamente:

$$x - x_0 = \underbrace{v_0 t}_{\text{area rettangolo}} + \underbrace{\frac{1}{2} t (v - v_0)}_{\text{area triangolo}}$$

poiche' $v - v_0 = at$ risulta:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Legge oraria del moto uniformemento accelerato. E' una parabola.

Si puo' calcolare anche come integrale della velocita'

$$x - x_0 = \int v\,dt = \int (at + v_0)dt = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

ESEMPIO 2-7 **Progetto per una pista di decollo.** Dobbiamo progettare un aeroporto per velivoli leggeri. Per poter usare questa pista un aeroplano deve raggiungere una velocità prima del decollo di almeno 27.8 m/s (100 km/h) potendo accelerare a 2.00 m/s^2. (*a*) Se la pista è lunga 150 m, può l'aeroplano raggiungere la velocità richiesta per il decollo? (*b*) Se no, quale lunghezza minima dovrebbe avere la pista?

APPROCCIO Assumendo che l'accelerazione dell'aeroplano sia costante, usiamo le equazioni cinematiche per accelerazione costante. In (*a*) vogliamo trovare v, e ciò che ci viene dato è mostrato nella tabella a margine.

SOLUZIONE (*a*) Delle quattro equazioni riportate sopra, l'equazione 2-11c ci fornirà v, note v_0, a, x e x_0:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \\ &= 0 + 2(2.00\ \mathrm{m/s^2})(150\ \mathrm{m}) = 600\ \mathrm{m^2/s^2} \\ v &= \sqrt{600\ \mathrm{m^2/s^2}} = 24.5\ \mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

La lunghezza di questa pista *non* è sufficiente, poiché non viene raggiunta la minima velocità per il decollo.

(*b*) Ora vogliamo trovare la lunghezza minima della pista, $x - x_0$, affinché l'aeroplano raggiunga la velocità $v = 27.8$ m/s, data $a = 2.00\ \mathrm{m/s^2}$. Quindi usiamo di nuovo l'equazione 2-11c, ma riscritta come

$$(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(27.8\ \mathrm{m/s})^2 - 0}{2(2.00\ \mathrm{m/s^2})} = 193\ \mathrm{m}.$$

Per questo aeroplano è più adatta una pista di 200 m.

Esercizio – Un'automobile viaggia a 120 Km/h. Visto un ostacolo, il conducente riesce a fermarsi in 110 m. Quale è l'accelerazione e quanto tempo impiega ?

Soluzione –

$v_o = 120$ Km/h = 33.3 m/s;

$s = v_o\, T - 1/2\; a\, T^2$; $v_{fin} = 0 = v_o - aT \quad \Rightarrow$

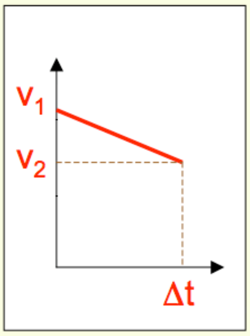
$T = v_o / a$; $s = v_o^2 / a - 1/2\; v_o^2 / a = 1/2\; v_o^2 / a \quad \Rightarrow$

$a = v_o^2 / 2\, s = 33.3^2 / (2 \cdot 110) = 5.040$ m / s^2 ;

$T = v_o / a = 33.3 / 5.040 = 6.60$ sec.

Esercizio – Un'automobile, durante una frenata uniforme, passa in un minuto dalla velocità di 40 Km/h a quella di 28 Km/h. Trovare il valore della accelerazione e lo spazio percorso.

Soluzione –



$v_1 = 40$ Km/h = 11.11 m/s; $v_2 = 28$ Km/h = 7.78 m/s;

$a = (v_2 - v_1) / \Delta t = (7.78 - 11.11) / 60 = -\,0.055$ m/s^2;

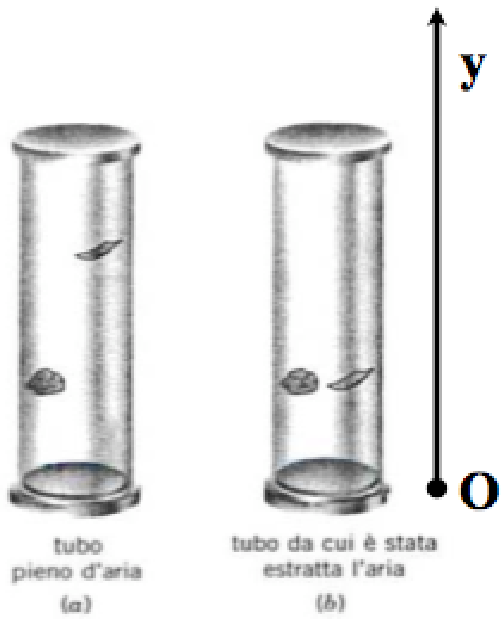
[quale è il significato del segno "-" ???]

$s = 1/2\; a\, \Delta t^2 + v_1\, \Delta t$

s = -0.5 * 0.055 * 60^2 + 11.11 * 60 = 566.6 m

Corpi in caduta libera

Galileo: in assenza di attrito (aria) **tutti i corpi** cadono con la **stessa accelerazione**, indipendentemente dalla forma e dalla massa



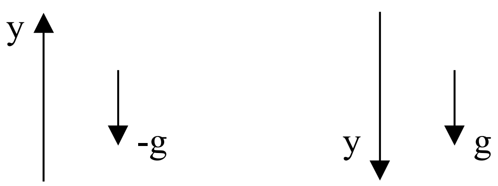
$$\vec{a} = -g\ \vec{j}$$

accelerazione di **gravità**
$g = 9.8\ m/s^2$

Accelerazione e' costante. Quindi e' moto uniformemente accelerato

a = g $\qquad$ $g = 9.8\ ms^{-2}$

Scelta asse delle y: concorde o discorde con g; g e' sempre verso il basso

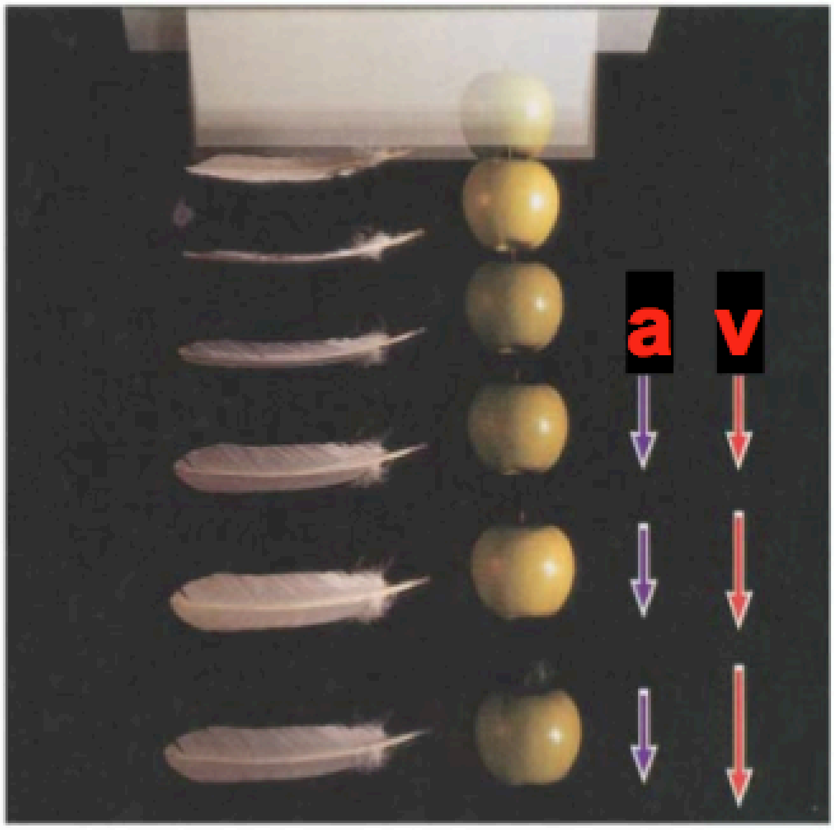


Se y e' verso l'alto → a = -g

Equazioni cinematiche precedenti con posizione y e accelerazione a = -g

$$v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

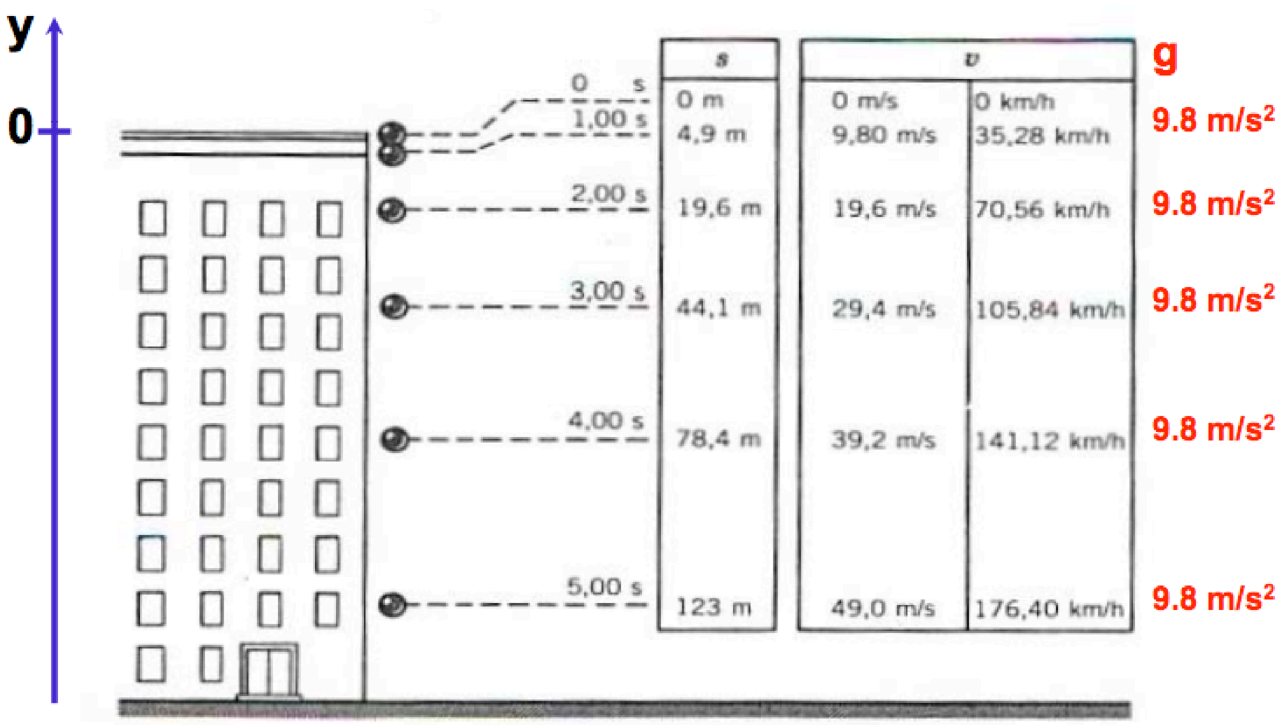


Corpi in caduta libera nel vuoto:

- accelerazione costante
- velocità aumenta linearmente nel tempo

<u>esempio</u>: caduta libera

Calcolare **posizione, velocità** ed **accelerazione** di un corpo di massa **M** in caduta libera dopo **1,2,3,4,5 secondi**



accelerazione $a = -g = -9.8\ m/s^2$

spostamento $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g t^2$

velocità $v = v_0 - gt = -gt$

<u>Vale per ogni corpo indipendentemente dalla massa!</u>

Esercizio

Calcolare il tempo che impiega una palla a raggiugere il punto piu' alto della traiettoria se e' lanciata da un uomo di altezza y_0 con velocita' iniziale v_0.

La palla ha velocita' iniziale verso l'alto e al tempo stesso accelerazione g verso il basso.
Legge oraria e' (se y verso l'alto):

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

nel punto piu' alto della traiettoria la velocita' nulla → il moto si inverte.
Il tempo t_M nel punto piu' alto della traiettoria corrisponde al punto dove v = 0

$$0 = v_0 - g t_M \Rightarrow t_M = \frac{v_0}{g}$$

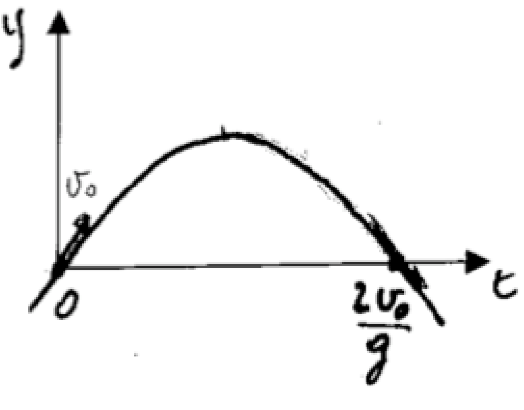
Altezza massima H e':

$$H = y_0 + v_0 t_M - \frac{1}{2} g t_M{}^2$$

Consideriamo legge oraria del moto (con $y_0 = 0$)

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = t(v_0 - \frac{1}{2} g t)$$

E' parabola verso il basso con due zeri: $t_1 = 0$, $t_2 = 2v_0/g$
La velocita' quando arriva a terra e' $-v_0$.



ESEMPIO 2-10 **Caduta da una torre.** Supponiamo che una palla sia lasciata cadere ($v_0 = 0$) da una torre. Di quanto sarà caduta dopo $t_1 = 1.00$ s, $t_2 = 2.00$ s, $t_3 = 3.00$ s? Ignoriamo la resistenza dell'aria.

APPROCCIO Assumiamo che y sia positiva verso il basso, così l'accelerazione risulta $a = g = +9.80\ \text{m/s}^2$. Poniamo $v_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Vogliamo trovare la posizione y della palla dopo tre differenti intervalli di tempo. L'equazione 2-11b, con y al posto di x, mette in relazione le quantità date (t, a e v_0) con l'incognita y.

SOLUZIONE Poniamo $t = t_1 = 1.00$ s nell'equazione 2-11b:

$$\begin{aligned} y_1 &= v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(1.00\ \text{s})^2 = 4.90\ \text{m}. \end{aligned}$$

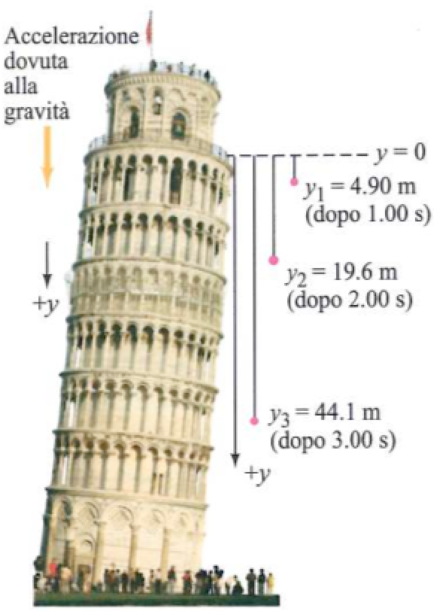
La palla è caduta di 4.90 m nell'intervallo da $t = 0$ a $t_1 = 1.00$ s. Analogamente, dopo 2.00 s ($=t_2$) la palla si troverà in

$$y_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 = \frac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s})^2 = 19.6\ \text{m}.$$

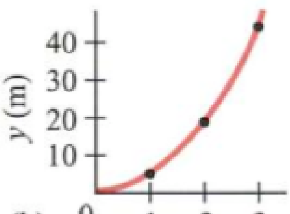
Infine, dopo 3.00 s ($=t_3$) la sua posizione sarà (fig. 2-22)

$$y_3 = \frac{1}{2} a t_3^2 = \frac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{s})^2 = 44.1\ \text{m}.$$

NOTA Quando diciamo "lasciata cadere", intendiamo $v_0 = 0$. Notate anche il grafico di y in funzione di t (fig. 2-22b): la curva piega verso l'alto poiché y è proporzionale a t^2.



(a)



(b)

FIGURA 2-22 Esempio 2-10.
(a) Un oggetto lasciato cadere da una torre cade con velocità crescente e copre distanze via via maggiori ogni secondo (*vedi* anche fig. 2-19).
(b) Grafico di y in funzione di t.

ESEMPIO 2-11 **Oggetto lanciato da una torre.** Supponiamo che la palla dell'esempio 2-10 sia *lanciata* verso il basso con una velocità iniziale di 3.00 m/s, invece di essere lasciata semplicemente cadere.
(a) Quale sarà allora la sua posizione dopo 1.00 s e 2.00 s? (b) Quale sarà la sua velocità dopo 1.00 s e 2.00 s? Confrontate queste velocità con quelle di una palla lasciata semplicemente cadere.

APPROCCIO Usiamo di nuovo l'equazione 2-11b, ma adesso v_0 non è 0; $v_0 = 3.00$ m/s.

SOLUZIONE (a) Al tempo $t_1 = 1.00$, la posizione della palla come fornita dall'equazione 2-11b è

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (3.00\ \text{m/s})(1.00\ \text{s}) + \frac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(1.00\ \text{s})^2 = 7.90\ \text{m}$$

e a $t_2 = 2.00$ s (intervallo di tempo da $t = 0$ a $t = 2.00$ s) la posizione è

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (3.00\ \text{m/s})(2.00\ \text{s}) + \frac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s})^2 = 25.6\ \text{m}.$$

Come ci si aspettava, la palla arriva ogni secondo più lontano che non se fosse stata lasciata cadere con $v_0 = 0$.

(b) La velocità è facilmente ottenibile dall'equazione 2-11a:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 3.00\ \text{m/s} + (9.80\ \text{m/s}^2)(1.00\ \text{s}) = 12.8\ \text{m/s} \quad [\text{a } t_1 = 1.00\ \text{s}] \\ &= 3.00\ \text{m/s} + (9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s}) = 22.6\ \text{m/s} \quad [\text{a } t_2 = 2.00\ \text{s}] \end{aligned}$$

Nell'esempio 2-10, quando la palla viene lasciata cadere ($v_0 = 0$), il primo termine nelle precedenti equazioni è zero, quindi

$$\begin{aligned} v &= 0 + at \\ &= (9.80\ \text{m/s}^2)\ (1.00\ \text{s}) = 9.80\ \text{m/s} \quad [\text{a } t_1 = 1.00\ \text{s}] \\ &= (9.80\ \text{m/s}^2)\ (2.00\ \text{s}) = 19.6\ \text{m/s} \quad [\text{a } t_2 = 2.00\ \text{s}] \end{aligned}$$

NOTA In entrambi gli esempi 2-10 e 2-11 vediamo che la velocità aumenta linearmente col tempo di una quantità pari a 9.80 m/s ogni secondo. Ma la velocità della palla lanciata verso il basso in ogni istante è sempre di 3.0 m/s (la sua velocità iniziale) più grande di quella di una palla lasciata cadere da ferma.

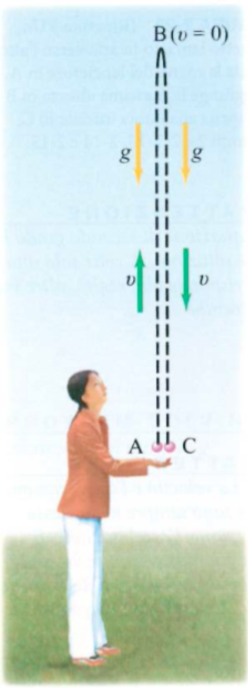
ESEMPIO 2-12 **Palla lanciata verso l'alto.** Una persona lancia una palla in aria *verso l'alto* con una velocità iniziale di 15.0 m/s. Calcolate quanto in alto arriva la palla. Ignorate la resistenza dell'aria.

APPROCCIO Non ci interessa in questo caso l'azione del lanciare, ma solo il moto della palla *dopo* che ha lasciato la mano di chi l'ha lanciata (fig. 2-23) e fino a quando gli ritorna in mano. Scegliamo la direzione positiva di y verso l'alto e negativa verso il basso. (Questa convenzione è diversa da quella utilizzata negli esempi 2-10 e 2-11 e quindi permette di illustrare le diverse opzioni a nostra disposizione.) In questo caso l'accelerazione dovuta alla gravità è rivolta verso il basso e perciò avrà segno negativo, $a = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$. Appena la palla si stacca dalla mano, la sua velocità decresce fino a diventare per un istante uguale a zero nel punto più alto (B in fig. 2-23). Quindi la palla discende verso il basso con velocità crescente.

SOLUZIONE Per determinare l'altezza massima, calcoliamo la posizione della palla quando la sua velocità è uguale a zero ($v = 0$ nel punto più alto). Al tempo $t = 0$ (punto A in figura 2-23) abbiamo $y_0 = 0$, $v_0 = 15.0\ \text{m/s}$ e $a = -9.80\ \text{m/s}^2$. Al tempo t corrispondente all'altezza massima abbiamo $v = 0$, $a = -9.80\ \text{m/s}^2$, e vogliamo trovare y. Usiamo l'equazione 2-11c (sostituendo x con y): $v^2 = v_0^2 + 2ay$, e risolviamo rispetto a y:

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (15.0\ \text{m/s})^2}{2(-9.80\ \text{m/s}^2)} = 11.5\ \text{m}$$

La palla raggiunge un'altezza di 11.5 m al di sopra della mano.



ESEMPIO 2-13 **Palla lanciata verso l'alto, II.** Nella figura 2-23, esempio 2-12, quanto a lungo la palla rimane in aria prima di ricadere in mano a chi l'ha lanciata?

APPROCCIO Ora dobbiamo scegliere un diverso intervallo di tempo per calcolare quanto a lungo la palla resta in aria prima di ritornare in mano al lanciatore. Potremmo fare questo calcolo in due parti, determinando prima il tempo necessario alla palla per raggiungere il punto più alto, e poi il tempo che impiega a ricadere. In ogni caso, è più semplice considerare l'intervallo di tempo per l'intero moto da A a B a C (fig. 2-23) in un passo solo e usare l'equazione 2-11b. Questo procedimento è corretto perché y rappresenta la posizione o lo spostamento, e non la distanza totale percorsa. Perciò, in entrambi i punti A e C, $y = 0$.

SOLUZIONE Utilizziamo l'equazione 2-11b con $a = -9.80\ \text{m/s}^2$ e troviamo

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = (15.0\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)t^2.$$

Quest'equazione è facilmente scomponibile in un prodotto (raccogliamo t):

$$(15.0\ \text{m/s} - 4.90\ \text{m/s}^2\ t)t = 0.$$

L'equazione ammette due soluzioni:

$$t = 0 \quad \text{e} \quad t = \frac{15.0\ \text{m/s}}{4.90\ \text{m/s}^2} = 3.06\ \text{s}.$$

La prima soluzione ($t = 0$) corrisponde al punto iniziale (A) in figura 2-23, quando la palla è stata appena lanciata e si trova a $y = 0$. La seconda soluzione, $t = 3.06$ s, corrisponde al punto C, in cui la palla torna a $y = 0$. Quindi la palla resta in aria 3.06 s.

ESEMPIO 2-15 **Palla lanciata verso l'alto, III.** Consideriamo di nuovo la palla lanciata in aria degli esempi 2-12 e 2-13, e facciamo alcuni calcoli in più. Calcoliamo (*a*) quanto tempo è necessario perché la palla raggiunga l'altezza massima (punto B in fig. 2-23), (*b*) la velocità della palla quando ritorna nella mano del lanciatore (punto C).

APPROCCIO Di nuovo assumiamo che l'accelerazione sia costante e che quindi possiamo usare le equazioni 2-11. Dall'esempio 2-12 abbiamo un'altezza massima di 11.5 m e una velocità iniziale di 15.0 m/s. Di nuovo prendiamo y come positivo verso l'alto.

SOLUZIONE (*a*) Consideriamo l'intervallo di tempo fra il lancio ($t = 0$, $v_0 = 15.0$ m/s) e la sommità del percorso ($y = 11.5$ m, $v = 0$) e vogliamo trovare t. L'accelerazione è costante: $a = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$. Entrambe le equazioni 2-11a e 2-11b contengono il tempo t, insieme ad altre quantità note. Usiamo l'equazione 2-11a con $a = -9.80\ \text{m/s}^2$, $v_0 = 15.0$ m/s e $v = 0$:

$$v = v_0 + at;$$

ponendo $v = 0$ si ha $0 = v_0 + at$, che riordiniamo per risolvere rispetto a t, ottenendo: $at = -v_0$ e quindi

$$\begin{aligned} t &= -\frac{v_0}{a} \\ &= -\frac{15.0\ \text{m/s}}{-9.80\ \text{m/s}^2} = 1.53\ \text{s}. \end{aligned}$$

Questo tempo è proprio metà del tempo che serve alla palla per andare su e ritornare nella posizione iniziale [3.06 s, calcolato nell'esempio 2-13]. Perciò occorre lo stesso tempo per raggiungere l'altezza massima e per ritornare al punto di partenza.
(*b*) Ora consideriamo l'intervallo di tempo dal lancio ($t = 0$, $v_0 = 15.0$ m/s) fino al ritorno della palla nella mano, che avviene a 3.06 s (come calcolato nell'esempio 2-13) e vogliamo trovare v quando $t = 3.06$ s:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 15.0\ \text{m/s} - (9.80\ \text{m/s}^2)(3.06\ \text{s}) = -15.0\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

NOTA Quando ritorna al punto di partenza, la palla ha lo stesso modulo della velocità che aveva inizialmente, ma *direzione opposta* (questo è il significato del segno negativo). E, come abbiamo visto nella parte (*a*), il tempo impiegato è lo stesso verso l'alto e verso il basso. Perciò il moto è *simmetrico* rispetto all'altezza massima.

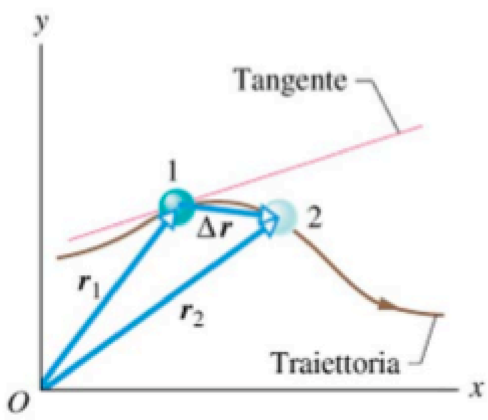
MOTO IN DUE DIMENSIONI

Nei moto rettilinei lo spostamento puo' essere trattato algebricamente: spostamento positivo se v positivo o spostamento negativo se v e' negativo.

Nei moti su un piano non bastano grandezze algebriche, ma servono vettori (non e' sufficiente un modulo, ma anche direzione e verso).

Oggetto in moto assimilabile ad una particella (tutte le parti si muovono solidali nella stessa direzione)

Traiettoria della particella



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vettore **posizione**

$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vettore **spostamento** nell'intervallo Δt

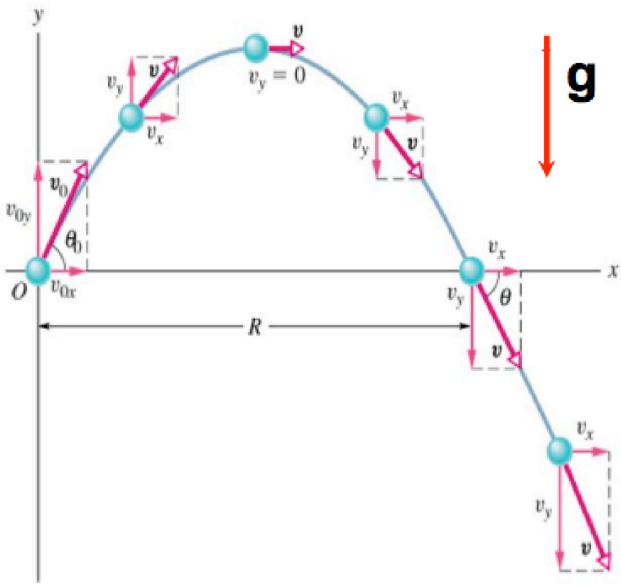
dalla **composizione** di vettori:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}) - (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}) \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} \\ &= \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j}\end{aligned}$$

MOTO DEL PROIETTILE

Ipotesi:
Accelerazione di gravita' g e' costante
Resistenza dell'aria trascurabile

Moto orizzontale e verticale sono indipendenti
La traiettoria e' una parabola (da dimostrare!)



velocità iniziale:

$$\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

accelerazione:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -g\,\vec{j}$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

applico le equazioni della cinematica **monodimensionale:**

moto **orizzontale** [rettilineo ed uniforme]**:**

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$x = \cancel{x_0} + v_{0x}t = (v_0 \cos\theta_0)t$$

NON ho accelerazione in x $\Rightarrow$ **v costante**

moto **verticale** [caduta di un grave]:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

$$y = \cancel{y_0} + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Lungo y e' moto uniformemente accelerato

traiettoria del proiettile:

$$x = v_{0x} t = (v_0 \cos\theta_0) t$$
$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

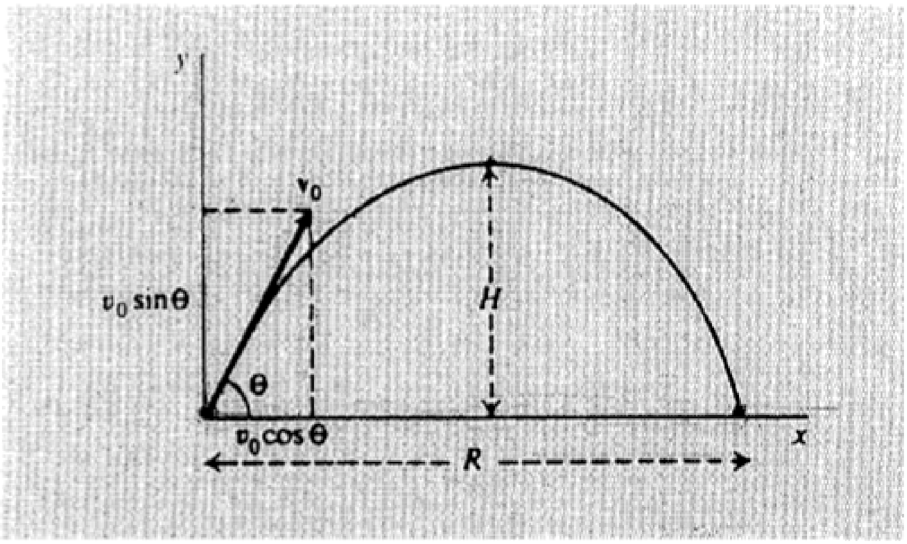
risolvo rispetto a t:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$y = v_0 \sin\theta_0 \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos\theta_0)^2}$$

$$y = tg\theta_0 \, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2 = a\,x - b\,x^2$$

parabola
[completamente nota per v_0 e θ_0 noti]



Moto uniformemente accelerato in forma vettoriale

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Somma di vettori non paralleli

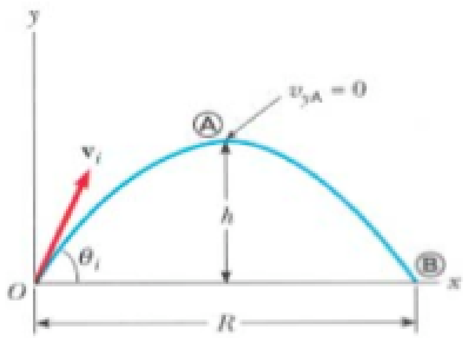
altezza h massima raggiunta dal proiettile:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

$$y = h = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = h = v_0 \sin\theta_0 \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

$$h = \frac{v_0^{\,2} \sin^2\theta_0}{2g} \qquad h_{\max} = \frac{v_0^{\,2}}{2g} \quad per \quad \theta_0 = 90^0$$



h = altezza massima raggiunta
R = gittata
[distanza orizzontale coperta]

gittata R del proiettile [distanza orizzontale coperta]:

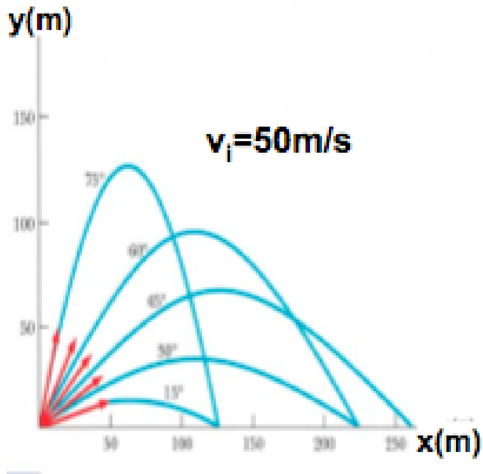
$$x = R \quad per \quad t = 2t_1$$

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta_0)\, 2t_1$$

$$= (v_0 \cos\theta_0)\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{2v_0^{\,2} \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

$$R = \frac{v_0^{\,2} \sin 2\theta_0}{g}$$

$$R_{\max} = \frac{v_0^{\,2}}{g} \quad per \quad \theta_0 = 45^0$$

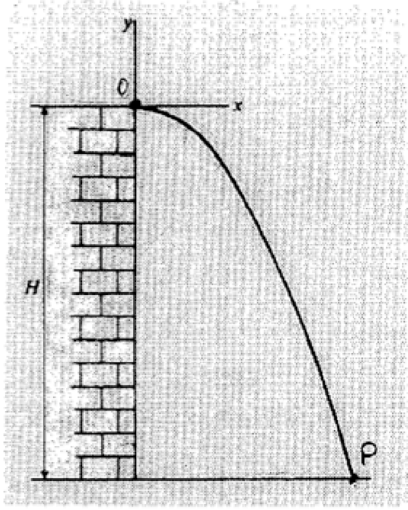


Esempio

Lancio da muro orizzontale

Velocita' iniziale lungo asse x

Cerchiamo le coordinate del punto di impatto P



$v_x = v_0$	$x = v_0\, t$	moto rettilineo uniforme
$v_y = 0$	$y = -\frac{1}{2} g t^2$	moto uniformemente accelerato

metodo 1

Trovo equazione traiettoria: $y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^{\,2}}$

Pongo y = -H

$-H = -\frac{1}{2} g \frac{x_P^{\,2}}{v_0^{\,2}}$ quindi $x_P = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

metodo 2

Trovo tempo di caduta t_1 e trovo x_P corrispondente

Tempo di caduta dalla legge oraria in y con y = -H

$-H = -\frac{1}{2} g t_1^{\,2}$ quindi $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ (t_1 e' lo stesso anche se grave cadesse da fermo)

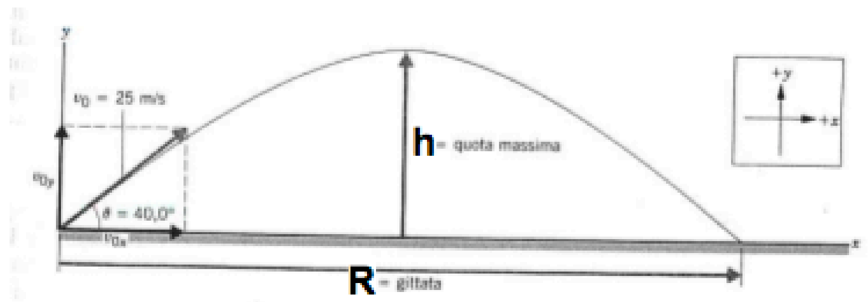
Dalla legge oraria di x per $t = t_1$: $x_P = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

applicazione: gittata e quota massima

Un proiettile di massa **m**, viene sparato con velocità **v = 25 m/s** ad un angolo di **40°** rispetto al suolo.

a) quale è la massima quota **h** raggiunta dal proiettile ?
b) quale è la gittata **R** del cannone ?
c) quale sarebbe l'angolo che massimizza la gittata ?

[trascurare l'attrito]



a) quota h

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{(25\,m/s)^2 \sin^2(40^0)}{2 \times 9.8\,m/s^2} = 13.2\,m$$

b) gittata R

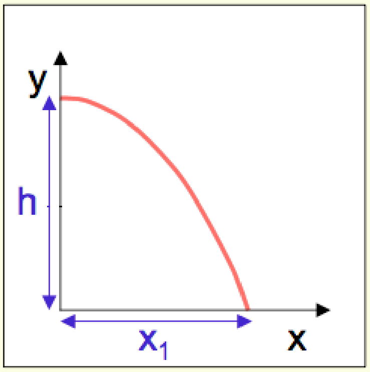
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(25\,m/s)^2 \sin(80^0)}{9.8\,m/s^2} = 62.8\,m$$

c) gittata massima per θ_0=45^0

$$R_{\max} = \left.\frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}\right|_{\theta_0=45^0} = \frac{(25\,m/s)^2}{9.8\,m/s} = 63.8\,m$$

Esercizio – Un oggetto viene lanciato da una torre, alta 25 m, in direzione orizzontale, con velocità 15 m/s. A che distanza cade, rispetto al bordo della torre ? In quanto tempo ?

Soluzione –



in orizzontale : $x = v_x\, t$;

in verticale : $y = h - ½\, g\, t^2$;

di conseguenza : $y = h - ½\, g\, (x/v_x)^2$

$$y=0 \Rightarrow h = ½\, g\, (x_1/v_x)^2 \Rightarrow x_1^2 = 2\, h\, v_x^2 / g \Rightarrow$$

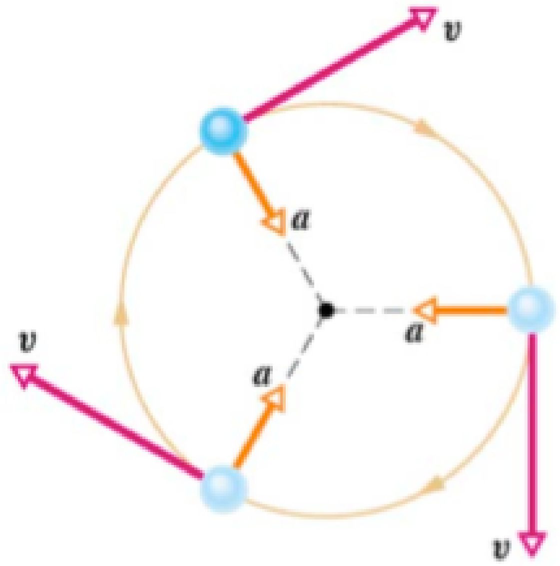
$$x_1 = v_x\, (2\, h / g)^{½} = 15\, (2 \cdot 25 / 9.8)^{½} = 33.9 \text{ m};$$

$$t = x_1 / v_x = 33.9 / 15 = 2.26 \text{ s}.$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Moto di un corpo su traiettoria circolare con velocita' costante in modulo (non in direzione e verso)

Se v cambia direzione si ha accelerazione (accelerazione centripeta)



Tempo per fare giro completo e' PERIODO del moto T

Inverso del periodo e' frequenza (1/secondo oppure cicli /secondo → Hertz)

Periodo:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Velocita' lineare (modulo)

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

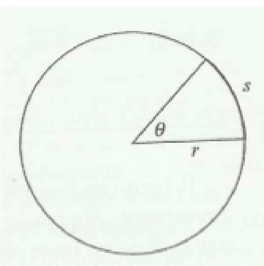
Velocita' angolare

E' velocita' con cui il raggio del cerchio spazza l'angolo al centro

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\ rad/s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \omega r$$

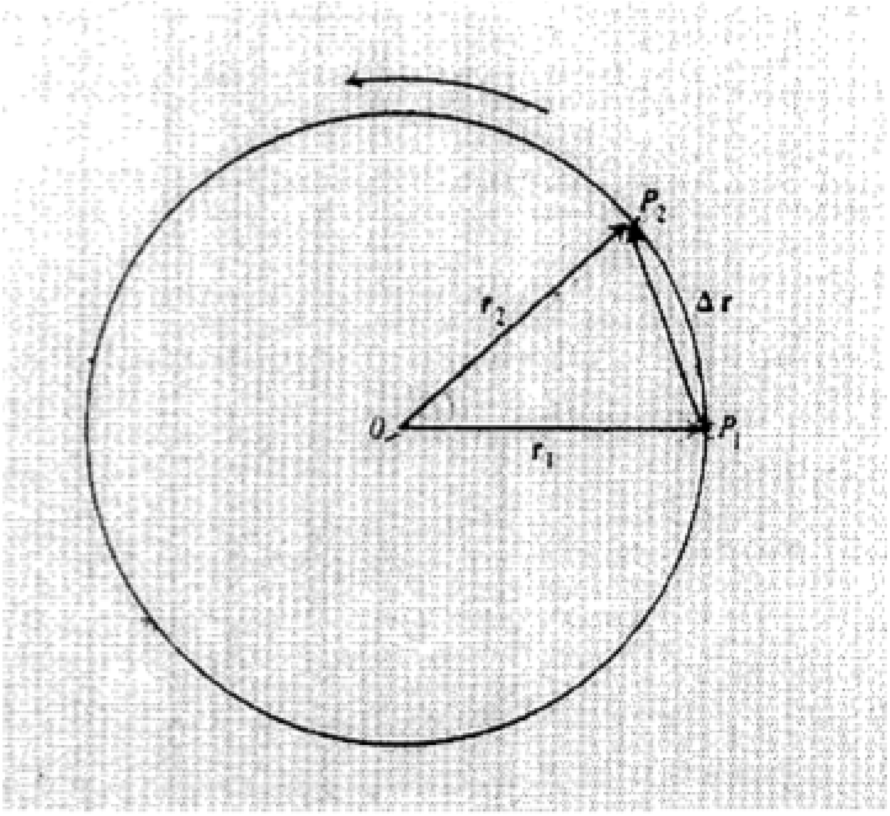


$$s = \theta r$$

radiante

$$se \quad s = r \quad \theta = 1\,rad = \frac{360^0}{2\pi} \cong 57.3^0$$

$$se \quad s = 2\pi r \quad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad = 360^0$$

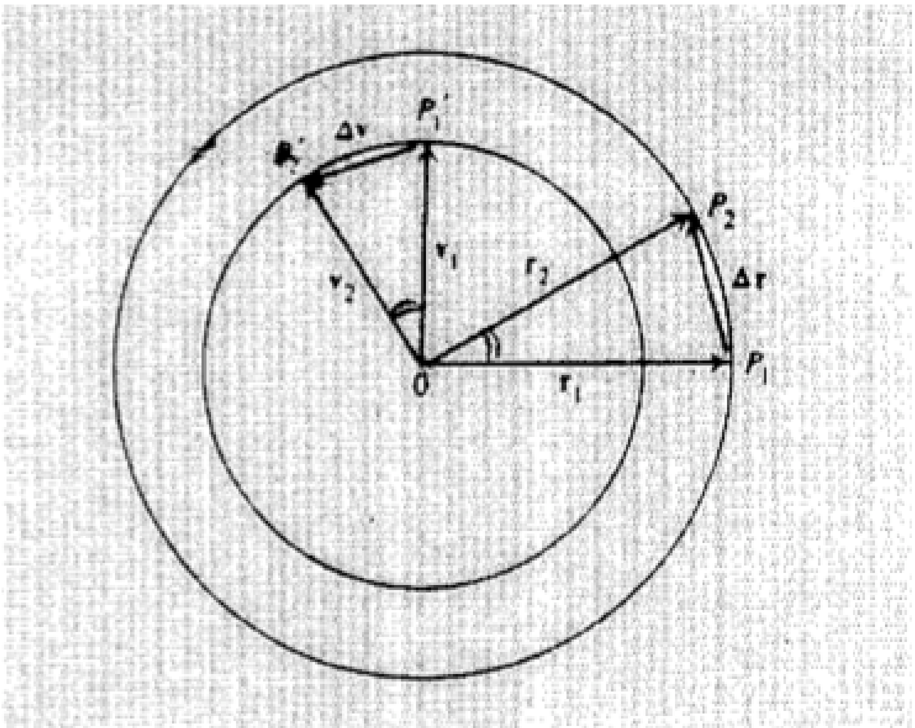


Vettori posizione $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ (corrispondenti a t1 e t2) hanno stesso modulo ma varia la direzione nel tempo.

Vettore velocita' e' perpendicolare al raggio (quindi al vettore posizione) cioe' sempre tangente al percorso.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE CENTRIPETA



Vettore posizione e vettore velocita' hanno stessa velocita' angolare

Vettore velocita' precede vettore posizione di 90 gradi
Portiamo vettori velocita' al centro O

Accelerazione media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$ otteniamo l'accelerazione istantanea:

$$\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Calcoliamo il modulo di a

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$ perche' si tratta di triangolo simili

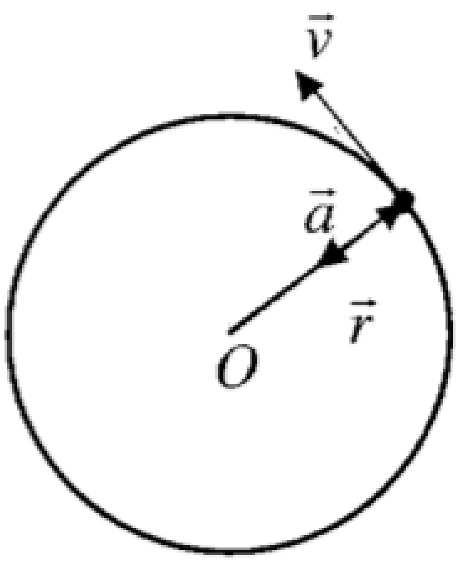
$$\frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$ per $\Delta t \rightarrow 0$: $$\frac{v}{r} = \frac{a}{v}$$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v}$$

E' **accelerazione centripeta**

[N.B. $[a]=[v]^2/L=[L/T]^2/L=L/T^2$ **]**

vettore accelerazione e' perpendicolare a velocita' (come v e' perpendicolare a r)
accelerazione precede velocita' di 90 gradi



Accelerazione centripeta agisce verso centro della circonferenza

applicazione: g-LOC
[g-induced loss of consciousness]

aereo che compie il <u>cerchio della morte</u>:

il corpo del pilota subisce una **accelerazione centripeta** con la testa rivolta verso il centro di curvatura

- cala la pressione sanguigna al cervello
- perdita funzioni cerebrali

$a_c = 2g - 3g$ → **pesantezza**

$a_c = 4g$ → **perdita percezione colori / si restringe il campo visivo**

$a_c > 4g$ → **cessa la visione / perdita di conoscenza**

esempio: qual è l'accelerazione centripeta a cui è sottoposto un pilota di F-22 che vola a velocità di **694 m/s** percorrendo un arco di cerchio di raggio di curvatura **r = 5.8 km** ?

sebbene la velocità scalare sia costante,
esiste accelerazione centripeta causata da traiettoria circolare.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(649 m/s)^2}{(5.8\, 10^3 m)} = 83.0\, m/s^2 = 8.5\, g$$

<u>il pilota cade incosciente prima di avvertire il segnale di allarme !!!</u>

Esercizio – Trovare la velocità angolare nei seguenti casi :

a) la Terra che ruota attorno al Sole (supporre il moto circolare uniforme);

b) la Terra che ruota attorno a se stessa;

c) la lancetta delle ore;

d) la lancetta dei minuti;

e) la lancetta dei secondi.

Soluzione –

a) $\omega_1 = 2\pi / T_1 = 2\pi / (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) = 1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s;

b) $\omega_2 = 2\pi / T_2 = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/s;

c) $\omega_3 = 2\pi / T_3 = 2\pi / (12 \cdot 60 \cdot 60) = 1.45 \cdot 10^{-4}$ rad/s;

d) $\omega_4 = 2\pi / T_4 = 2\pi / (60 \cdot 60) = 1.7 \cdot 10^{-3}$ rad/s;

e) $\omega_5 = 2\pi / T_5 = 2\pi / 60 = 0.104$ rad/s.

Esercizio

Un satellite percorre un'orbita circolare intorno alla Terra (di raggio pari a 12000 km) in 3 ore e 50'. Quanto vale la sua velocità angolare?

SOLUZIONE. Osserviamo che 50' possono scriversi come 5/6 di ora.
Ricordando il legame tra velocità angolare e periodo di rotazione si avrà:
$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\pi}$ /T = $2\boldsymbol{\pi}$ (rad)/(3 + 5 / 6) ora =1.6 rad/h = 4.4 10^{-4}

Esercizio

La Luna compie un'orbita circolare di raggio 3.8 $\times 10^8$ m attorno alla Terra in circa 28 giorni. Calcola la sua accelerazione centripeta.

SOLUZIONE. La accelerazione centripeta per la Luna è

$$\omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left(\frac{2\pi}{28\times 24\times 3600}\right)^2 3.8\times 10^8 \cong 2.56\times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$