Lezione 11

Sistemi dipendenti da parametri

Se i coefficienti o termini noti di un sistema dipendono da parametri allora la (in)compatibilità e le eventuali soluzioni dipendono dai parametri del sistema, oltre che da eventuali parametri liberi delle soluzioni (non confondere questo tipo di parametri).

Es
$$\begin{cases} y - \alpha z = 1 \\ x + 2z = 1-\alpha \\ 2x + \alpha y = 0 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ è parametro del sistema

a diversi valori di α corrispondono sistemi diversi

Si procede con Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 2 & \alpha & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -4 & 2\alpha-2 \end{array}\right) \overset{\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right) \text{ a gradini}$$

La terza riga ha pivot $\alpha^2-4 \iff \alpha^2-4 \neq 0$ allora il caso $\alpha^2-4=0$ va esaminato a parte:

1) $\alpha^2 - 4 = 0 \iff \alpha = \pm 2$

$\underline{\alpha = 2}$:
$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - 2z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
pertanto il sistema è compatibile e c'è un <u>parametro libero</u> $z = t$

$$\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

$\underline{\alpha = -2}$: la terza equazione è $0 = -4$

pertanto il sistema è incompatibile per $\alpha = -2$

2) $\alpha \neq \pm 2$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 - \alpha \\ y - \alpha z = 1 \\ (\alpha + 2) z = 1 \end{cases}$$
(possiamo semplificare dividendo per $\alpha - 2$)

Il sistema è compatibile
e ha <u>soltanto una soluzione</u>

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\alpha+2} + 1 - \alpha \\ y = \dfrac{\alpha}{\alpha+2} + 1 \\ z = \dfrac{1}{\alpha+2} \end{cases} \quad \text{e semplificando} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2} \\ y = \dfrac{2(\alpha+1)}{\alpha+2} \\ z = \dfrac{1}{\alpha+2} \end{cases}$$

Sottospazi vettoriali

Consideriamo uno spazio vettoriale V sopra un campo $\mathbb{K}$ (ad es. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Definizione Un sottoinsieme $U \subset V$ è detto <u>sottospazio vettoriale</u> di V se valgono le seguenti:

i) $U \neq \emptyset$

ii) $\forall\, u, u' \in U \Rightarrow u + u' \in U$

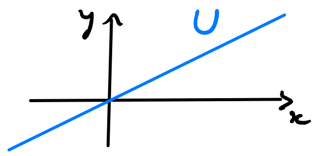
iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, u \in U \Rightarrow \alpha u \in U$

In altre parole $U \subset V$ è sottospazio vettoriale se è non vuoto e <u>chiuso</u> rispetto alla somma di vettori e al prodotto per gli scalari.

<u>Es</u> 1) $\{0_V\} \subset V$ è il sottospazio vettoriale nullo

2) $V \subset V$ è sottospazio vettoriale di sé stesso

3) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$



i) $(0,0) \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

ii) $\forall\, (x,y), (x',y') \in U \Rightarrow x - 2y = 0$ e $x' - 2y' = 0$

$\Rightarrow x - 2y + x' - 2y' = 0 \Rightarrow x + x' - 2(y + y') = 0$

$\Rightarrow (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in U$

iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, (x,y) \in U \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow$

$\alpha x - 2\alpha y = 0 \Rightarrow \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in U$

quindi U è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

4) <u>Non esempio</u> $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$

$(1,0) \in L$ ma $0 \cdot (1,0) = (0,0) \notin L$ quindi iii) non è soddisfatta e L non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

<u>Teorema</u> Consideriamo uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora U è a sua volta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni $+ : U \times U \to U$ e $\cdot : \mathbb{K} \times U \to U$ ereditate da V. In particolare $0_V \in U$.

<u>Dimostrazione</u> Le operazioni $+$ e $\cdot$ di V si possono considerare su U

$$+ : U \times U \to U \quad e \quad \cdot : \mathbb{K} \times U \to U$$

e sono ben definite in virtù della ii) e iii) della definizione data sopra.

Dato che $U \neq \emptyset$ per la i), consideriamo un vettore

$$u \in U$$

Per la iii) $0 \cdot u = 0_V \in U$

Inoltre $\forall\, u \in U$, $-u = (-1)u \in U$ in virtù di iii)

Allora gli assiomi (1), ..., (8) nella definizione di spazio vettoriale studiato in precedenza valgono per U in quanto già valgono per V. Quindi U è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Proposizione Consideriamo un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V e un sottoinsieme non vuoto $U \subset V$. Allora U è un sottospazio vettoriale di V $\iff$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \ \forall u_1, u_2 \in U$$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \ \forall u_1, u_2 \in U \underset{(iii)}{\Longrightarrow}$

$$\alpha_1 u_1 \in U, \ \alpha_2 u_2 \in U \underset{(ii)}{\Longrightarrow} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$$

$\boxed{\Leftarrow}$ i) è verificata per ipotesi

ii) $\forall u_1, u_2 \in U$ e posto $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Longrightarrow$

$$u_1 + u_2 \in U$$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall u \in U$, posto $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = 0 \Longrightarrow$

$$\alpha u \in U.$$

Quindi i), ii) e iii) sono verificate e U è un sottospazio vettoriale di V.

Consideriamo ora vettori

$$v_1, \dots, v_s \in V$$

e scalari

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$$

dove $s \in \mathbb{N}$.

Allora possiamo calcolare il vettore

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \in V$$

Def $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s$ è detto combinazione lineare di $v_1, \dots, v_s$. Gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sono chiamati coefficienti della combinazione lineare.

Una combinazione lineare è detta <u>nulla</u> se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s = 0_V$$

È detta invece <u>banale</u> se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$

<u>**OSS**</u> Banale $\Rightarrow$ nulla, ma il viceversa è vero <u>solo</u> in casi notevoli e interessanti, come vedremo.

<u>**Es**</u> 1) $2(1,3) - 5(-2,4) = (12,-14) \in \mathbb{R}^2$ combinazione lineare dei vettori $(1,3)$, $(-2,4) \in \mathbb{R}^2$ con coefficienti $2,-5$

2) $2(3,-1) - (6,-2) = (0,0)$ combinazione lineare <u>nulla non banale</u>

3) $$2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ i \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1+3i \\ -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$