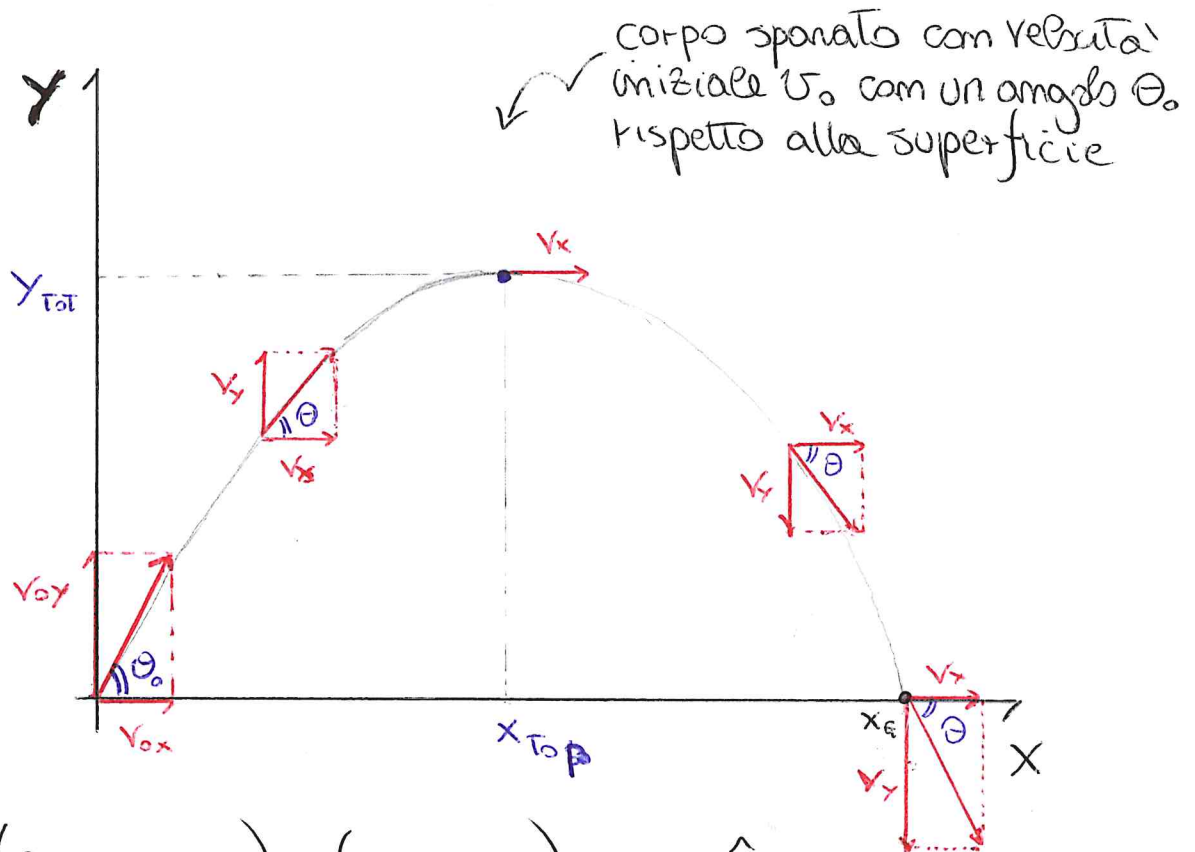


≠ Moti Curvilinei

→ Moto del proiettile (in 2-dimensioni)



$$\vec{a} = \vec{a}_g = (a_{gx}, a_{gy}) = (0, -g) = -g \hat{j}$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta) = v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}$$

→ lungo l'asse y abbiamo un moto uniformemente accelerato, mentre lungo l'asse x un moto rettilineo uniforme. Il moto lungo i due assi può essere trattato in modo INDIPENDENTE

• Moto lungo asse x:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad (\text{no accelerazione} \rightarrow \text{velocità costante})$$

$$x(t) = v_{0x} t = v_0 \cos \theta t$$

• Moto lungo asse y:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta - gt$$

$$y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} gt^2 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} gt^2$$

→ Posso esplicitare t da $x(t)$ per trovare la traiettoria nel piano xy:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \quad \text{sostituisco in } y(t)$$

$$y = v_0 \sin \theta \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 =$$

$$= \tan \theta x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

← Moto Parabolico
(equazione di secondo
grado in x)

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad \tan \theta \quad t \end{array}$$

→ Calcoliamo la gittata, i.e. la distanza a cui il proiettile tocca terra ($y(t_g) = 0$)

↑ istante in cui tocca terra

$$y(t_g) = 0 = t_g \theta x_g - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_g^2$$

Chiamo
 $x(t_g) = x_g$

$$= x_g \left(t_g \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_g \right) = 0$$

→ possiamo anche usare la solita formula per le eq.n di II grado

2 soluzioni:

i) $x = 0 \rightarrow$ ovvero il punto di partenza

$$ii) t_g \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_g = 0 \rightarrow x_g \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = t_g \theta$$

$$x_g = t_g \theta \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

$$\downarrow \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

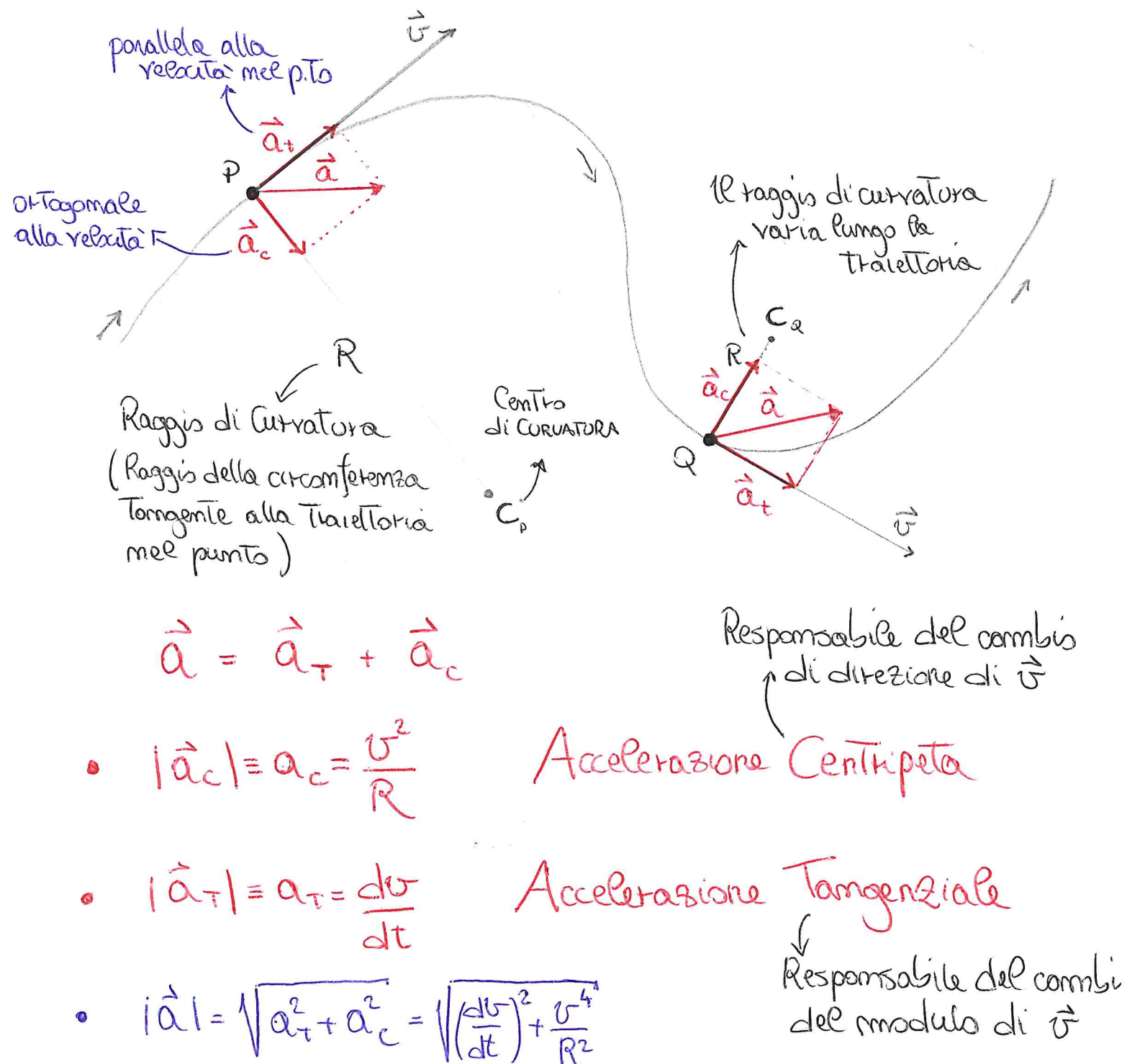
Fissato v_0 :

→ il massimo della gittata lo avrò per $\sin 2\theta = 1$
ovvero per $2\theta = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

7 Accelerazione nel Moto Piano

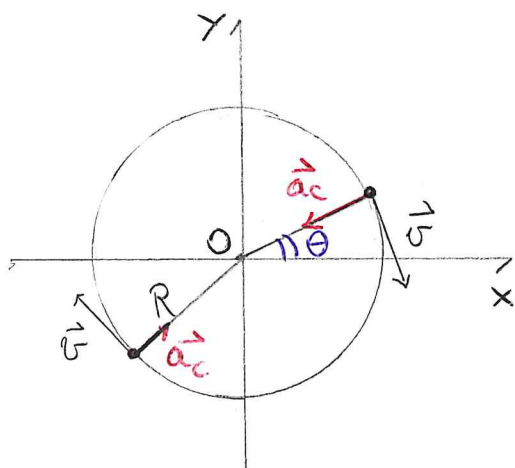
Nel moto piano l'accelerazione deve esprimere la variazione della velocità sia in modulo che in direzione, quindi ci attendiamo che sia specificata da 2 componenti:

Es:



◊ Moto Circolare Uniforme

Moto di un corpo lungo una Traiettoria circolare con velocità costante in modulo (ma varia istante per istante la direzione!)



$$\Downarrow \quad \text{Poiché } |\vec{v}| = \text{cost} \quad \nearrow$$
$$|\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$|\vec{a}_c| = \text{cost}$$

$\vec{a} = \vec{a}_c \rightarrow$ diretta verso il centro della circonferenza

Possiamo descrivere il moto in base all'angolo spazzato $\theta(t)$, ad un certo istante (la distanza dal centro è sempre R); ovvero moto è taglio della circonferenza la posizione del corpo istante per istante è definita dall'angolo $\theta(t)$:

Coordinate Polari

$$x(t) = R \cos \theta(t)$$

$$y(t) = R \sin \theta(t)$$

$\rightarrow$ Dato lo spostamento angolare $\Delta\theta$ compiuto nell'intervallo Δt , possiamo definire

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0 \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$\rightarrow$ Per moto circolare
uniforme sono la stessa cosa

Velocità ω u.d.m.
[rad/s]
Angolare

→ Periodo: Tempo necessario a compiere una rivoluzione completa

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$\nearrow$ lunghezza circonferenza
 $v \rightarrow$ modulo velocità lineare

oppure:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$\nearrow$ angolo giro in radianti
 $\omega \rightarrow$ velocità angolare

Frequenza:

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{T} [\text{Hz}]$$

$\Downarrow$

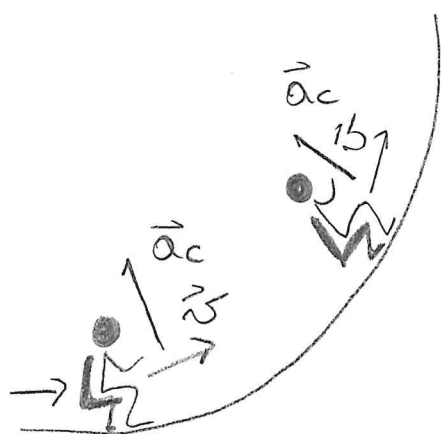
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{2\pi R} \cdot 2\pi = \frac{v}{R}$$

Accelerazione Centripeta:

$$|\vec{a}| = |\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Esempio:

g-LOC (g-induced loss of consciousness)



Se il corpo viene sottoposto ad una forte accelerazione centripeta con la testa rivolta al centro della curvatura si ha un calo della pressione sanguinea al cervello, seguita dalla perdita delle funzioni cerebrali.

→ effetti sul corpo:

$$a_c = 2g - 3g$$

Pesantezza

$$a_c \approx 4g$$

Perdita percezione colori /
Restrizione del campo visivo

$$a_c > 4g$$

Perdita visione / perdita coscienza

Esempio:

Qual è il minimo raggio di curvatura che può avere una montagna russa (roller coaster) che compie il giro della montagna perché i suoi utenti non perdano coscienza?
a velocità $v = 200 \text{ km/h}$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \leq 4g \rightarrow R \geq \frac{v^2}{4g} = \frac{200^2 \text{ km}^2/\text{h}^2}{4 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} \approx 78.7 \text{ m}$$

$\approx (55.5 \text{ m/s})^2$

(vedi Euthymasia Coaster)

✱ DINAMICA

La parte della fisica meccanica che studia le cause del moto

FORZA: Causa esterna in grado di modificare lo stato di quiete, o moto rettilineo uniforme, di un corpo



1° Principio della dinamica: (1ª legge di Newton)

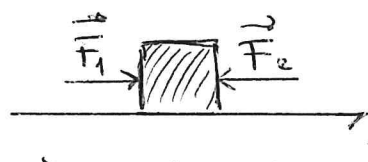
Un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di quiete ($\vec{v}=0$), o di moto rettilineo uniforme ($\vec{v}=\text{cost}$).

↳ Invece, l'azione di una forza comporta una variazione in modulo e/o direzione della velocità, ovvero un'accelerazione NON NULLA, $\vec{a} \neq 0$.

→ La FORZA è una grandezza vettoriale; $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

Se la risultante delle forze agenti su un corpo è nulla ($\sum_i \vec{F}_i = 0$), il corpo permane in quiete ($\vec{a}=0$)

o in moto rettilineo uniforme



$$\vec{F}_{\text{Tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$$

• Seconda Legge di Newton

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

L'azione di una forza su un corpo determina una sua accelerazione, direttamente proporzionale alla forza impressa

$m \equiv$ Massa Inerziale $\Rightarrow$ Esprime l'inerzia di un corpo, ovvero la sua resistenza a variare lo stato di moto (cioè la sua velocità)

Unità di misura della forza: è il Newton:

1 Newton = forza richiesta per accelerare una massa di 1 Kg a 1 m/s^2

cioè: $1 \text{ N} = 1 \text{ Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

$\rightarrow$ Se più forze agiscono sul corpo vadrà:

$$\vec{F}_{\text{Tot}} = \sum_{i=1} \vec{F}_i = \vec{a} m$$

$\rightarrow$ Se $\vec{F}_{\text{Tot}} = 0$, si realizza la condizione di equilibrio

statico

$$\begin{cases} F_{x, \text{Tot}} = \sum_i F_{x, i} = 0 \\ F_{y, \text{Tot}} = \sum_i F_{y, i} = 0 \\ F_{z, \text{Tot}} = \sum_i F_{z, i} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Sono Nulle Tutte le componenti della forza}$$

QUANTITÀ di MOTO

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v} \quad (\text{a volte indicato con } \vec{p}) \quad \left[\begin{array}{c} \text{U. d. m.} \\ \text{kg m/s} = \text{N s} \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \text{legge di Newton: } \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

L'azione di una forza determina una variazione della quantità di moto nel tempo

⇓

Se la risultante delle forze è nulla, $\vec{F}_{\text{tot}} = 0$,
la quantità di moto si conserva, $\vec{q} = \text{costante}$

→ Impulso: (opzionale)

Applicando una forza per un certo intervallo di tempo su un corpo otterremo una variazione della sua quantità di moto che chiamiamo impulso:

$$\vec{J} = \vec{F} \Delta t = \Delta \vec{q} = m \Delta \vec{v} \quad \rightarrow \text{se la massa è costante nell'intervallo } \Delta t$$

↳ assumiamo la forza costante nell'intervallo Δt , o utilizziamo la forza media agente sul corpo nell'intervallo di tempo

Usando la notazione integrale

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta \vec{p}$$

* Terza Legge di Newton

Principio di Azione-Reazione

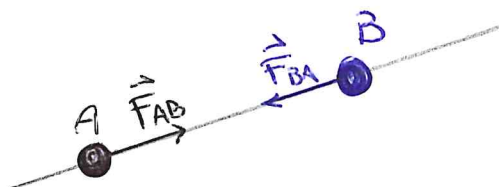
→ Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{A,B}$ su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{B,A}$ sul corpo A.

→ Le due forze hanno la stessa direzione e modulo, ma verso opposto:

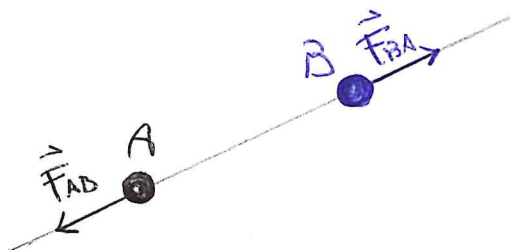
$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

Es:

Forze Attrattive:



Forze Repulsive



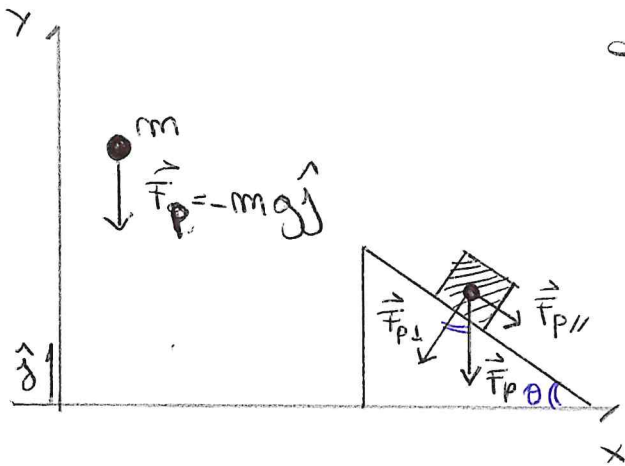
Forza Peso:

Forza rivolta verso la superficie dovuta all'attrazione gravitazionale (Terrestre):

$$\vec{F}_p = m \vec{g} = -m g \hat{j}$$

Se scegliamo asse $y \perp$ al Terreno e rivolto verso l'alto

Es:



→ e' una forza costante (in modulo, direzione e verso)

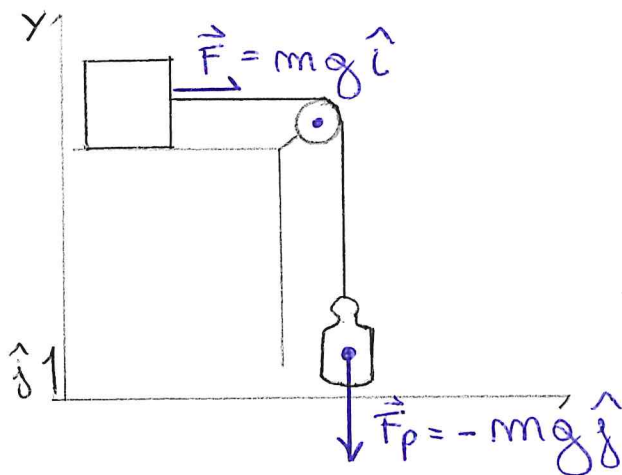
Piombo Inclinato

$$|\vec{F}_{p\parallel}| = mg \sin \theta$$

$$|\vec{F}_{p\perp}| = mg \cos \theta$$

→ Scomporgo la forza peso nelle direzioni $\parallel$ e $\perp$ al piombo.

Es:



Forza Elastica

Forza con direzione costante, il modulo proporzionale alla distanza dal "centro", e verso tirato verso il "centro":

$$\vec{F} = -k \vec{x}$$

Legge di Hooke

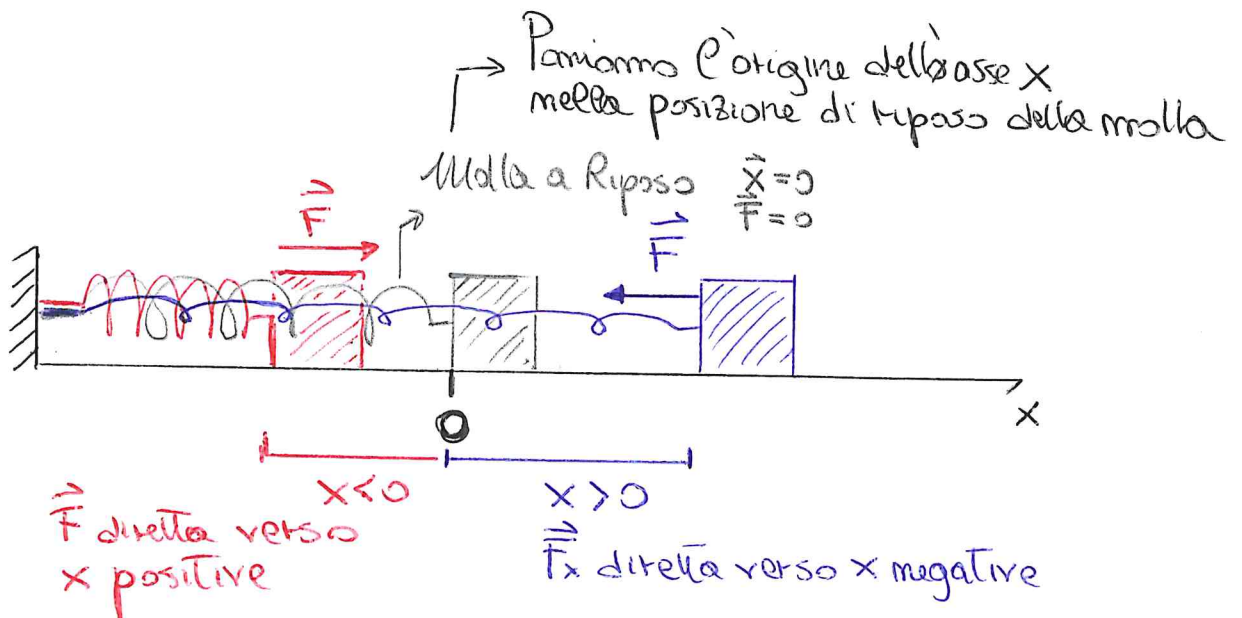
Indica che la forza è sempre orientata in verso opposto

Costante Elastica

Spostamento dalla posizione di riposo

rispetto lo spostamento (Forza di Richiamo)

Esempio: Molla



→ Applicando la II Legge di Newton

$$F = ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Equazione oscillatore armonico

↓
Moto di un oscillatore armonico semplice

• **Pulsazione:** $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

↓
"velocità" di oscillazione della molla

Costante elastica

Massa corpo legata alla molla

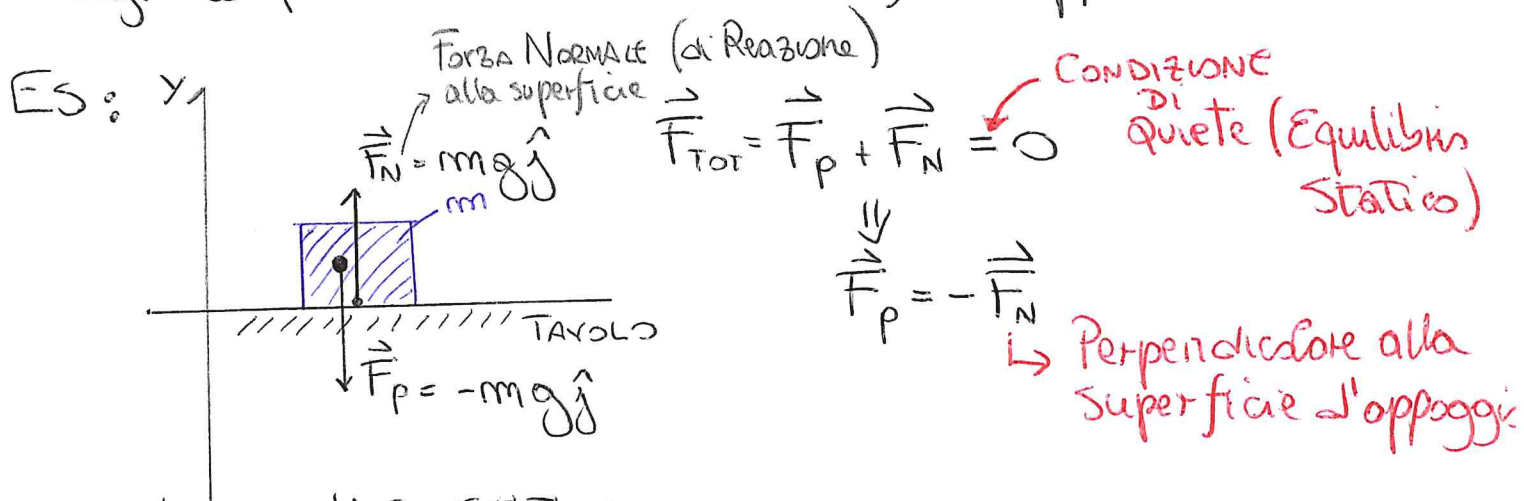
• **Periodo:** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

↓

Tempo necessario a compiere un'oscillazione completa (ovvero a tornare al punto di partenza)

Reazione Vincolare:

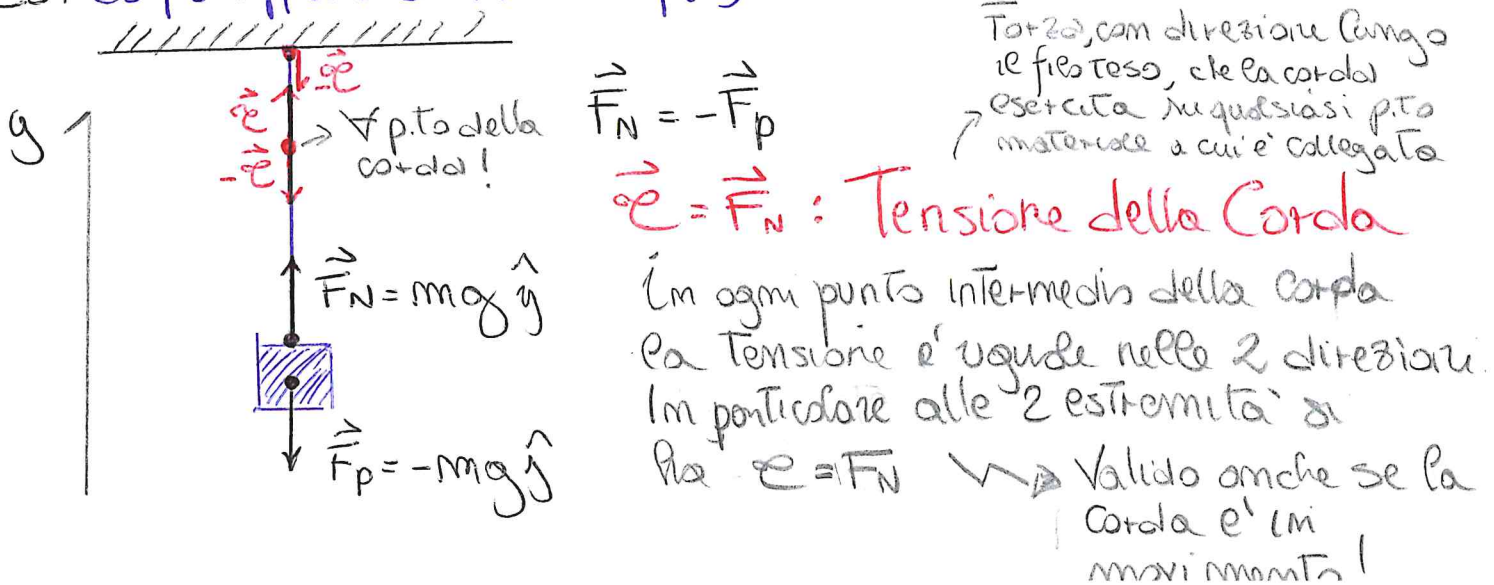
Consideriamo un corpo, sotto l'azione della forza peso, in quiete ($\vec{a} = 0$) su una superficie. Per quanto detto in precedenza deve valere la relazione $\vec{F}_{\text{Tot}} = m\vec{a} = 0$. Ovvero la superficie (il vincolo) reagisce alla deformazione indotta dal corpo sotto la forza di gravità con una forza uguale (in modulo e direzione) ed opposta:



In condizione di Eq. Statica:

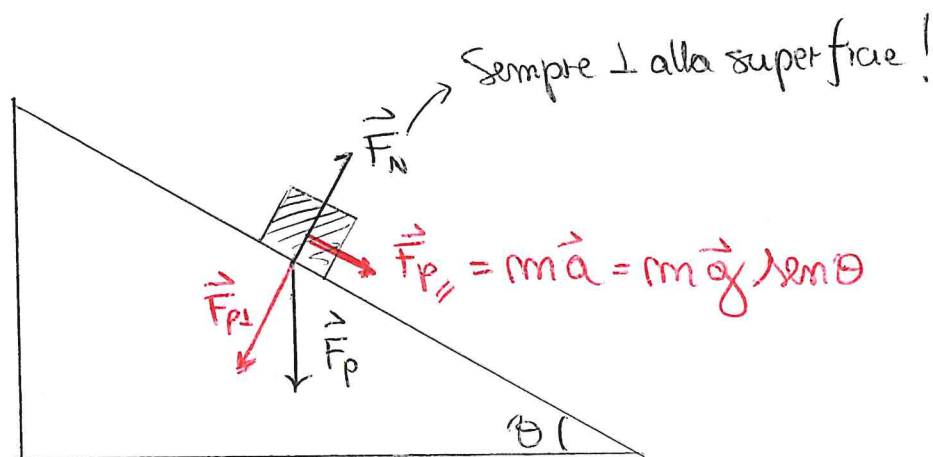
→ Se applichiamo altre forze $\perp$ alla superficie, avremo in generale che $\vec{F}_N = -\vec{F}_R$, con $\vec{F}_R$ la risultante delle forze $\perp$ alla superficie.

ES: Corpo appeso tramite un filo (INESTENSIBILE)



→ In generale la forza di reazione di un vincolo è presente anche in assenza di equilibrio statico,

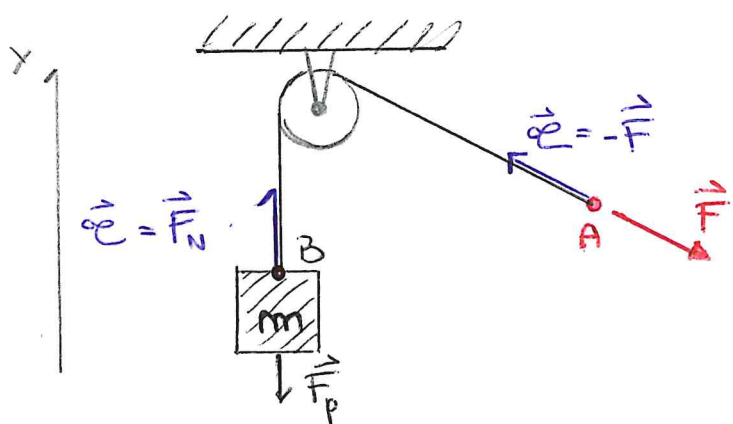
Es: Piano Inclinato;



$$\vec{F}_N = -\vec{F}_{p\perp}$$

→ La condizione $\vec{F}_N = 0$ si verifica quando il corpo si distacca dalla superficie vincolante (o il filo in Tensione)

Es: Blocco scorrevole con puleggia trainato da una forza $\vec{F}$



A: $\vec{F} - \vec{F}_p = 0$ ↗ corda Po massa Trascurabile ($ma=0$)

B: $\vec{F} - \vec{F}_p = m\vec{a}$

⇓

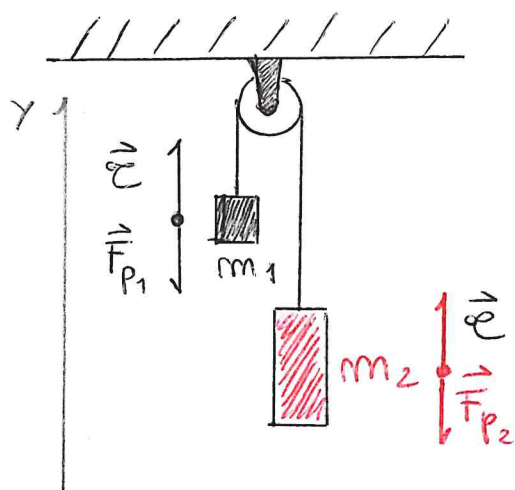
Se $\vec{F} > \vec{F}_p \rightarrow \vec{a} > 0$ il peso sale

Se $\vec{F} = \vec{F}_p \rightarrow \vec{a} = 0$ il corpo è in quiete
e $\vec{F} = m\vec{g}$

↳ come per un corpo appeso in quiete

Esempio: Macchina di Atwood

(Carrucola priva di massa ed attrito)



- La Tensione della corda è la stessa alle due estremità
- I 2 corpi hanno la stessa accelerazione perché commessi da una corda tesa

Applichiamo la II legge di Newton ai 2 corpi:

i) $T - m_1 g = m_1 a$

ii) $T - m_2 g = -m_2 a$

Sottraendo le 2 equazioni ed esplicitando a :

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

Sostituendo l'equazione di a in i) o ii)

$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Se $m_1 = m_2 = m \Rightarrow a = 0$ e $T = mg$

(Vedi problema 5.3 pag 92 Hodyotky)

Forza Centripeta

Abbiamo visto che per un moto curvilineo l'accelerazione ha 2 componenti. Applicando la seconda legge di Newton possiamo quindi scomporre la forza agente su un punto materiale come:

$$\vec{F} = m \vec{a}_T + m \vec{a}_c = \vec{F}_T + \vec{F}_c$$

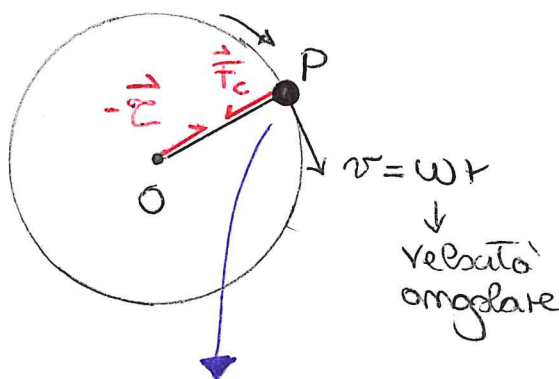
determina variazione modulo della velocità

$\vec{F}_c$ = forza centripeta, responsabile della variazione della direzione della velocità

↓
N.B. Non è un tipo particolare di forza, ma solo il nome che si dà alla componente $\perp$ alla traiettoria

→ Un corpo sottoposto ad una forza centripeta costante compie un moto circolare uniforme assumendo $\vec{F}_T = 0$

Es: Pallina che ruota intorno ad un filo teso:

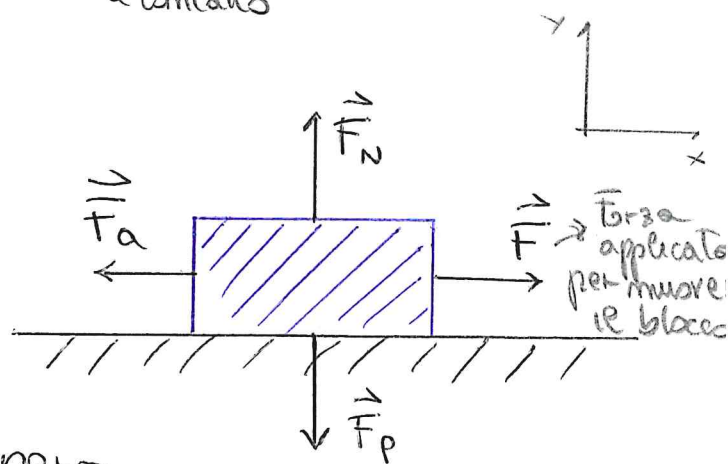


$$|\vec{F}_c| = |\vec{F}| = m a_c = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r$$

Il filo applica una tensione nel punto P pari alla forza centripeta $m \frac{v^2}{r}$

Forza d'Attrito Radente $\rightarrow$ cioè Tra 2 superfici a contatto

Se tentiamo di far scivolare un corpo su una superficie manteremo che il corpo non inizia a muoversi fin tanto che la forza applicata non supera un certo valore soglia $\Rightarrow$ ovvero la superficie (e viceversa) sviluppa una forza d'attrito statico, $\vec{F}_a$, (dovuta alla tendenza dei corpi a contatto) uguale e contraria alla forza di spinta, $\vec{F}$.



$\rightarrow$ Quindi in condizione di quiete ($\vec{F}_{tot} = 0$)

$$\vec{F} + \vec{F}_p + \vec{F}_N + \vec{F}_a = 0$$

dunque $\times \rightarrow \vec{F}_a = -\vec{F}$

$\hookrightarrow$ parallela alla superficie di contatto, uguale e contraria alla forza $\vec{F}$

$\rightarrow |\vec{F}_a|$ può raggiungere un valore massimo pari a:

$$F_{a, \max} = \mu_s F_N$$

Coefficiente
Attrito
Statico

Dipende dallo stato delle superfici a contatto e dalle loro composizioni chimiche

$\rightarrow$ Proporzionale alla reazione vincolare normale alla superficie
 $\hookrightarrow$ e.g. se spingo il blocco verso il basso $F_{a, \max}$ non è più grande

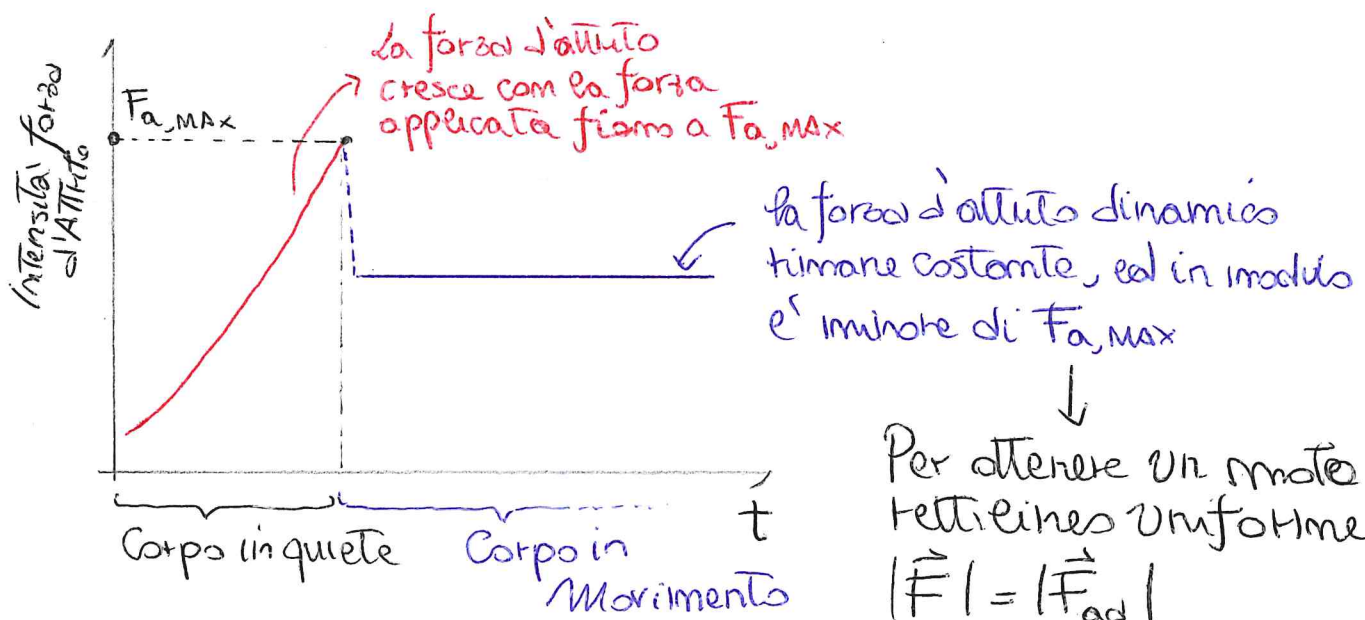
$F_{a, \max}$ determina la forza MINIMA necessaria a mettere in moto un corpo poggiato su una superficie:

- Se $|\vec{F}| < F_{a, \max} \Rightarrow$ corpo rimane in quiete
- Se $|\vec{F}| > F_{a, \max} \Rightarrow$ il corpo inizia a muoversi, questa volta contrastato da una forza d'attrito minore (attrito dinamico), costante, in direzione parallela alla superficie, ed opposta al moto

$$\vec{F}_{ad} = -\mu_d F_N \hat{u}_v \quad \text{Versore della velocità } \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Coefficiente d'attrito
Dinamico ($\mu_d < \mu_s$)

- Qualitativamente abbiamo:



• Altre forze d'attito: (opzionale)

• **Attito Viscoso:** $\vec{F}_{av} = -b\vec{v}$ → Proporzionale alla velocità, ed in verso contrario

Costante attito viscoso $[kg\ s^{-1}]$

↓
forza d'attito esercitata su un corpo che si muove in un liquido o gas (in certe condizioni)

↓
Un corpo in caduta soggetto ad attito viscoso raggiunge (asintoticamente) una velocità

limite $v_{lim} = \frac{mg}{b}$, quando $|\vec{F}_p| = |\vec{F}_{av}|$.

• **Resistenza Aerodinamica:** $\vec{F}_{res} = \frac{1}{2} c \rho S v^2 (-\hat{u}_v)$

$\rho = 1.29\ kg/m^3$ densità aria

S = Area efficace del corpo nel piano $\perp$ al moto

c = coefficiente di resistenza (dipende dalla forma del corpo) $c \approx 0.5 \div 2$ ^{→ sfera}

Velocità limite ($F_{res} = F_p$):

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{c\rho S}}$$

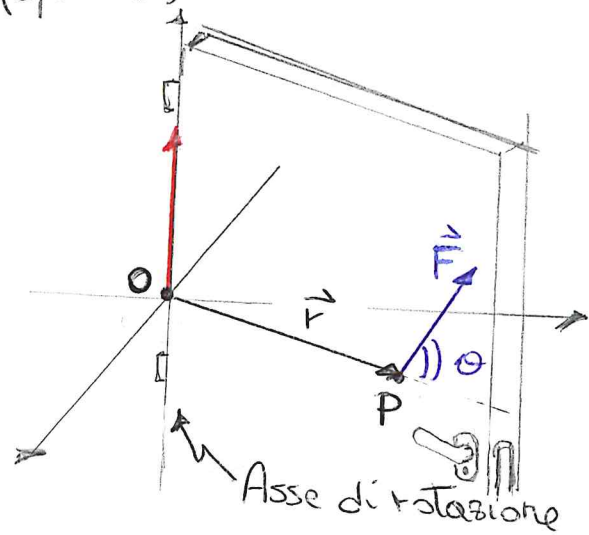
e.g. uomo $80\ kg$ $S \approx 1.8\ m^2$

$v_{lim} \sim 60\ m/s \sim 215\ km/h$

Momento di una Forza (opzionale)

(o Momento Torcente)

→ Dato un corpo rigido vincolato ad un asse intorno a cui è libero di ruotare (e.g. una porta, o una chiave inglese agganciata ad un bullone), applicando una forza al punto P il corpo inizierà a ruotare; a seconda della distanza dall'asse di rotazione, e della direzione in cui è applicata la forza, il corpo ruoterà con più o meno facilità. Per tener conto di questi fattori si definisce: **il momento di una forza**



Prodotto Vettoriale

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

 Vettore che collega asse di rotazione e punto di applicazione della forza (Braccio)

Modulo $\Rightarrow$

$$|\vec{M}| = r F \sin \theta$$

Più lungo è il braccio, maggiore è il momento (avrete facile ruotare)

Solo la componente tangenziale della forza, $\perp$ ad r contribuisce, al momento

