Lezione 20 ottobre 22

giovedì 20 ottobre 2022 10:09

Visto: SL : $A \cdot X = b$ ⊛

Problemi:
- quando ⊛ è compatibile?
- come si trovano soluzioni?
- che struttura ha l'insieme delle soluzioni?

TEOREMI DI STRUTTURA PER SOLUZ. DI SL

Teorema di Struttura per Soluz. di SLO:

Sia $A \cdot X = 0$ un SLO

e siano s e s' due sue soluzioni.

Allora: $s + s'$ è ancora soluz. di $A \cdot X = 0$.

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \quad s' = \begin{pmatrix} s_1' \\ \vdots \\ s_n' \end{pmatrix}$$

Inoltre: se s è soluz. di $A \cdot X = 0$, allora $\forall c \in K$ si ha:

$c \cdot s$ è ancora soluz. di $A \cdot X = 0$.

In altre parole, l'insieme W delle soluzioni di $A \cdot X = 0$ è uno SV.

$$W = \left\{ s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : A \cdot s = 0 \right\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

Dim. Siano s e s' 2 soluzioni:

cioè: $\boxed{A \cdot s = 0}$

$\boxed{A \cdot s' = 0}$

Voglio calcolare $A \cdot (s+s') \overset{\text{DISTRIB. di } \cdot \text{ RISP. } +}{\overset{\downarrow}{=}} A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0$

$$s+s' = \begin{pmatrix} s_1 + s_1' \\ s_2 + s_2' \\ \vdots \\ s_n + s_n' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $s+s'$ è soluz.

* * *

$A \cdot s = 0$

Cons. ora $c \cdot s = \begin{pmatrix} c s_1 \\ c s_2 \\ \vdots \\ c s_n \end{pmatrix}$

Calcolo $A \cdot (cs) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{proprietà n° 3}}}{=} c \cdot (A \cdot s) = c \cdot 0 = 0$

* * *

Esempio:

① $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

$$\underset{2 \times 4}{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$s = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ è soluz.

$$s' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s + s' = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \; ; \quad c = 5 : \quad c \cdot s' = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$s + c \cdot s' = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{20} \cdot s' \, , \qquad \pi \cdot s' \, , \qquad e \cdot s$$

Teor. di Struttura per Soluz. di SL

Cons. $A \cdot x = b$ e supp. COMPATIBILE;

sia $\tilde{s} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \vdots \\ \tilde{s}_n \end{pmatrix}$ una sua soluzione:

$$A \cdot \tilde{s} = b \, .$$

Allora: ogni altra soluzione s di $A \cdot x = b$ si può scrivere nella forma

$$s = \tilde{s} + s_0$$

dove s_0 è soluzione di $A \cdot x = 0$ (SLO associato a $A \cdot x = b$).

OSS.: Come conseguenza, anche per SL

non omogenei, si hanno 2 possibilità:

- $A\cdot x = b$ ha 1! soluzione
- $A\cdot x = b$ ha ∞ soluzioni.

Dim. Dimostriamo che:

ⓐ $\tilde{s}+s_0$ è soluzione di $A\cdot x = b$

ⓑ se s è soluz. qualunque,
allora $\exists$ s_0 soluzione di $A\cdot x = 0$ tale che $s=\tilde{s}+s_0$

Dim. di ⓐ : ipotesi: $\begin{cases} A\cdot \tilde{s} = b \\ A\cdot s_0 = 0 \end{cases}$

Calcolo $A\cdot(\tilde{s}+s_0) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DISTRIB.}}}{=} A\cdot\tilde{s} + A\cdot s_0 = b+0 = b$

$\Longrightarrow$ anche $\tilde{s}+s_0$ è una soluzione del SL dato.

Dim. di ⓑ: sia s una soluzione qualunque

si ha che vale $A\cdot s = b$

Cerco s_0 soluz. di $A\cdot X = 0$

tale che $\boxed{s = \tilde{s} + s_0}$

DATE

IDEA: pongo $s_0 := s - \tilde{s}$

si ha $s = \tilde{s} + \underbrace{(s - \tilde{s})}_{= s_0}$

devo solo verificare che s_0 è soluz.

di $A \cdot X = 0$

Calcolo: $A \cdot s_0 = A \cdot (s - \tilde{s}) = A \cdot s - A \cdot \tilde{s}$

$= b - b = 0$

* * *

Esempio:

② $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$

$\tilde{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Riguardo es. ①, le sue soluz. sono delle s_0 di $A \cdot X = 0$

Posso produrre altre soluzioni cons. $\tilde{s} + s_0$

ad es. $s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{s} + s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

se cons. $S_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\tilde{s} + S_0' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \dots$$

OSS: Se $A \cdot X = b$ non omogeneo ($b \neq 0$), l'insieme delle sue soluz. NON È uno SV.

Infatti: nell' esempio ②:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = b$$

In generale: se $A \cdot \tilde{s} = b$

cons. $c \cdot \tilde{s}$

$$A \cdot (c \cdot \tilde{s}) = c \cdot (A \cdot \tilde{s}) = c \cdot b$$

$$\neq b$$

$c \neq 1$

Esempio ③:

$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 10$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = 0$: $x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$

qui vediamo che ponendo $x_3 = t$
parametro libero : $t \in \mathbb{R}$

e ponendo $x_2 = s$ parametro libero
$s \in \mathbb{R}$, posso scrivere
$x_1 = -4s + 5t$

$\Rightarrow$ ogni soluz. del SLO è
del tipo $\begin{pmatrix} -4s+5t \\ s \\ t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ tutte le soluz. di $x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 10$
sono del tipo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4s+5t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4s+5t \\ 2+s \\ t \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-4s+5t \\ 2+s \\ t \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

es.: $s=0$, $t=0$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$s=1$, $t=-3$ $\begin{pmatrix} -17 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Oss.: $\begin{pmatrix}-4s+5t\\ s\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4s\\ s\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5t\\ 0\\ t\end{pmatrix}$

$= s\cdot\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

* * *

Esempi per intuire come rispondere alla seconda domanda: come trovare soluzioni?

Es.: $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Vedremo un algoritmo per trasformare questo SL in uno equivalente, cioè con lo stesso insieme delle soluzioni, e con equazioni più semplici (in cui molti coefficienti sono nulli)

* * *

OSSERVAZIONE

Abbiamo visto che

$M_{m,n}(\mathbb{K})$ è SV con $+$ e $\cdot$.

In particolare:

$$M_{m,1}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix} \right\} = \mathbb{K}^m$$

e le operazioni $+$ e $\cdot$ definite in $M_{m,1}(\mathbb{K})$

e $\mathbb{K}^m$ COINCIDONO

$\Rightarrow$ possiamo IDENTIFICARE i due spazi:

$\mathbb{K}^m = M_{m,1}(\mathbb{K})$