Lezione 24 ottobre 2022

lunedì 24 ottobre 2022 09:07

MATRICI A SCALA

Def.: $A \in M_{m,n}(K)$ si dice A SCALA se valgono:

indichiamo con

$r = \#$ righe non nulle di A

allora si ha:

① $r = 0$ (A è matrice nulla)

② oppure $r > 0$ e le righe non nulle sono $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(r)}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \cdots & * \\ \vdots & & & \\ * & - & - - & * \\ 0 & - & - - & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & - & - - & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

e se indichiamo con

$i = 1, \dots, r$ $\quad j_i$ = indice di colonna del primo elemento non nullo di $A_{(i)}$

$$j_i := \min\{k : a_{ik} \neq 0\}$$

$$A_{(i)} = (0 \cdots 0 \; a_{ij_i} \; * \cdots \; *)$$

Gli j_i verificano

$$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots < j_r$$

Infine, gli elementi a_{ij_i} si

chiamiamo ELEMENTI PIVOT.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \overset{\neq 0}{a_{1j_1}} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & \\ 0 & \cdots & & & 0 & a_{rj_r} & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \end{pmatrix} \quad \neq 0 \quad \neq 0$$

$j_1 = 2$

es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ NON è A SCALA

$j_2 = 2$ $\quad j_3 = 4$

$2 = 2 < 4$

$j_1 = j_2 < j_3$

es. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A SCALA

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r = 3$, $m = 4$ A SCALA

$j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 5$

Es. Matrici diagonali sono a scala $\Longleftrightarrow$ gli elementi $= 0$ della diagonale sono in fondo

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NON è A SCALA

es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sì

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ NO

SL con matrice dei coeff. A SCALA

TEO.: Sia $A \cdot X = b$ con

A matrice a scala, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$
(ha almeno 1 soluzione)

Allora è compatibile $\Longleftrightarrow$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ soddisfa

$b_{r+1} = 0, \dots, b_m = 0.$

Dim. : $(\Longrightarrow)$:

Se $A \cdot X = b$ ha soluzioni, A a scala allora le equazioni (r+1)-esima .... m-esima sono del tipo

$$\begin{matrix} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r = b_m \end{matrix} \qquad \begin{cases} 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_m \end{cases}$$

ok.

$(\Longleftarrow)$: Supp. $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$

Voglio dim. che $A \cdot x = b$ ha soluzione

Cons. l'equazione r :

$$A = \begin{pmatrix} 0 \dots & a_{1j_1} & x & - & - & x \\ & & a_{2j_2} & & & \\ \underline{0 - - -} & \underline{0} & \underline{\cdot\, a_{rj_r}} & \underline{*} & & \\ 0 - - & - & - & - & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\underset{\neq 0}{\boxed{a_{rj_r}}}\, x_r + \dots + a_{rn} x_n = b_r$$

$$\circledast \quad x_r = \frac{1}{a_{rj_r}} \left[-\left(a_{rj_{r+1}} x_{r+1} + \dots + a_{rn} x_n\right) + b_r \right]$$

Fisso dei valori a piacere per $x_{j_r}, \dots, x_n$, li sostituisco in $\circledast$ e trovo un valore per x_{j_r}.

Passo alla equazione r-1 :

$$\overset{\neq 0}{\boxed{a_{r-1\,\boxed{j_{r-1}}}}}\, x_{j_{r-1}} + \dots = b_{r-1}$$

scrivo $x_{j_{r-1}} = \dfrac{1}{a_{r-1\,j_{r-1}}} \left(-(\dots) + b_{r-1} \right)$

sostituisco i valori già fissati,
e fisso valori a piacere per le
eventuali incognite rimaste
$\Rightarrow$ trovo un valore per $x_{j_{r-1}}$

Tutti i valori trovati soddisfano
le ultime 2 equaz.

Procedo così; alla fine troviamo

n valori, che se sostituiti
alle n incognite, soddisfano le
r equazioni.

ESEMPIO:
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = \boxed{1} \\ 2x_2 - x_4 = \boxed{6} \\ x_3 + 3x_4 = \boxed{1} \end{cases}$$

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad r = 3$$

Una soluz.:

$$x_3 + 3x_4 = 1$$

$$x_3 = -3x_4 + 1 \; .$$

Fisso valore a piacere per x_4

ad es. $x_4 = 0$

$$\Rightarrow x_3 = 1 \qquad\qquad s = \begin{pmatrix} -7/4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Penultima eq.:

$$2x_2 - x_4 = 6$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_4 + 6)$$

Già fissato $x_4 = 0$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Prima equaz:

primo pivot

$$\boxed{4}\,x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(-3x_2 + x_3 + 2x_4 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-3\cdot 3 + 1 + 2\cdot 0 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(-7) = -\frac{7}{4}$$

OPERAZIONI ELEMENTARI SU SL

Def.: Due sistemi lineari sono EQUIVALENTI se i loro insiemi di soluzioni coincidono.

oss.: $A\cdot x = b$ e $A'\cdot x = b'$ possono essere equivalenti, pur avendo un # diverso di equazioni.

(↳ numero)

Ad es: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$ $\qquad$ $2x_1 + 3x_2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R})$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b' = (1)$$

sono equivalenti; infatti, osservo che

$$4x_1 + 6x_2 - 2 = \underbrace{2}_{\neq 0}(2x_1 + 3x_2 - 1)$$

quindi

$$4x_1 + 6x_2 - 2 = 0 \iff 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$$

OPERAZIONI ELEMENTARI

sulla MATRICE COMPLETA di $A\cdot X = b$

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(K)$$

OE 1 Scambio di due righe di $(A|b)$

(ovvero scambio di due equazioni):

$$(A|b)_{(i)} \longleftrightarrow (A|b)_{(j)}$$

OE 2 MOLTIPLICAZIONE DI UNA RIGA di $(A|b)$ PER UNA COSTANTE NON NULLA

(ovvero: molt. un'equazione per cost. $\neq 0$)

$$(A|b)_{(i)} \longrightarrow c\cdot (A|b)_{(i)}\ , \quad c\neq 0$$

OE3 SOSTITUZIONE DI UNA RIGA DI $(A|b)$ CON LA SOMMA DELLA STESSA RIGA E UN MULTIPLO NON NULLO DI UN'ALTRA RIGA
(ovvero: sost. 1 eq. con la somma ....)

$$(A|b)_{(i)} \longrightarrow (A|b)_{(i)} + c\cdot (A|b)_{(j)}$$

TEOREMA: Le operazioni OE1, OE2 e OE3 trasformano un sistema $A\cdot X = b$ in un sistema $\tilde{A}\cdot X = \tilde{b}$ equivalente.

Dim. OMESSA

TEOREMA DI GRADINIZZAZIONE DI GAUSS:

Dato un SL $A\cdot X = b$ ⊛ (eventualm. omogeneo), è sempre possibile trasformare ⊛ in un sistema equivalente $\tilde{A}\cdot X = \tilde{b}$, usando le OE1, OE2 e OE3 e con $\tilde{A}$ a scala.

Dim. Diamo un algoritmo:

- se A è la matrice nulla, ci fermiamo
- supp. A non nulla, e cons. la prima colonna non nulla: $A^{(j)}$

  se $a_{1j}\neq 0$, non facciamo nulla, se $a_{1j}=0$, sia a_{kj} il primo elemento non nullo, e faccio $(A|b)_{(1)} \longleftrightarrow (A|b)_{(k)}$ **OE1**
- dopo un'eventuale scambio, posso supporre che sia $a_{1j}\neq 0$.

Allora applico OE3, e precisamente sommando a ciascuna riga $(A|b)_{(2)}, \dots, (A|b)_{(m)}$ un opportuno multiplo della prima $(A|b)_{(1)}$

in modo che i coefficienti $a_{2j}, \dots, a_{mj}$ diventino zero:

es. $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OE1}}$$

USEREMO LA NOTAZIONE: $\underset{\text{riga } 1}{\text{I}} \longleftrightarrow \underset{\text{riga } 2}{\text{II}}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{4} & 8 & 1 \end{array}\right)$$

voglio che ↓ diventi zero (sotto il primo pivot devo avere solo zeri)

cons. OE3: $\text{III} \rightsquigarrow \text{III} - 2\cdot \text{I}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

$$(A|b)_{(2)} \longrightarrow (A|b)_{(2)} - \frac{a_{2j}}{a'_{1j}} (A|b)_{(1)}$$

$$\vdots$$

$$(A|b)_{(m)} \longrightarrow (A|b)_{(m)} - \frac{a_{mj}}{a_{1j}} (A|b)_{(1)}$$

Ho ottenuto una matrice del tipo

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc|c} 0 & 0 & \overset{\neq 0}{a_{1j}} & \cdots & \cdots & \cdots & & b_1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_2 \\ & & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & b_m \end{array}\right)$$

e riapplico l'algoritmo alla sottomatrice

Con un numero finito di passi trovo una matrice a scala.

Esempio:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\mathrm{III} - 2\,\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & \overset{\neq 0}{1} & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

↳ deve diventare 0

$$\xrightarrow{\mathrm{III} + 6 \cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

i SL corrispondenti

$$\begin{cases} 2x_2 + 7x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \\ 4x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 7x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \\ 0 = 15 \end{cases}$$

il sistema è incompatibile per un Teorema precedente: $\tilde{A}$ è a scala, $r = 2$ e $\tilde{A}_{(3)} = (0 \quad 0 \quad 0)$ ma $b_3 \neq 0$.

Esempio:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \overset{\neq 0}{1} & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{III - 3I \\ IV - I}]{II - 2I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & \overset{\neq 0}{1} & -4 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & -21 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{IV - II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{-9} & -21 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV + \frac{2}{9} III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & -21 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10/3 & 4/3 \end{array}\right)$$

In questo caso $r = 4 = m$ e il sistema è compatibile.