Lezione 27 ottobre 2022

venerdì 8 ottobre 2021 09:33

VISTO: Dato $A \cdot X = b$, con OE1, OE2 e OE3 possiamo trasformare $(A|b)$ in $(\tilde{A}|\tilde{b})$ dove $\tilde{A}$ è a scala.

$\#$ righe non nulle di $\tilde{A}$ = $\#$ righe non nulle di $(\tilde{A}|\tilde{b})$

$\Longleftrightarrow$ il sistema $\tilde{A} \cdot X = \tilde{b}$ è compatibile

$\Longleftrightarrow$ il sistema $A \cdot X = b$ è compatibile

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
* & * & \cdots & & * & \tilde{b}_1 \\
0 & 0 & * & \cdots & * & \\
\vdots & \vdots & 0 & & & \tilde{b}_r \\
0 & & \vdots & * & * & \\
& 0 & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right)$$

È possibile dare altri tipi di criteri per la compatibilità o meno di un sistema lineare, ma abbiamo bisogno dei SOTTOSPAZI VETTORIALI e del concetto di DIMENSIONE.

* * *

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Def.: Sia V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme, $W \neq \emptyset$.

W si dice SOTTOSPAZIO VETT. di V se valgono:

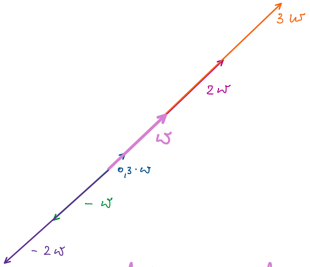
SSV1 W è CHIUSO RISPETTO A $+$ DI V:

cioè: $\forall\, w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

SSV2 W è CHIUSO RISPETTO A $\cdot$ per scalari:

$\forall\, w \in W,\ \forall\, c \in \mathbb{K} \Rightarrow c \cdot w \in W$.

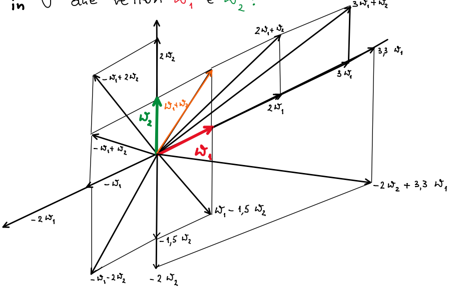
Es.: V^2 lo spazio dei vettori liberi del piano



chi è un ssv che contiene w?

è una retta vettoriale, data da tutti i possibili multipli di w.

Cons. in V^2 due vettori w_1 e w_2:



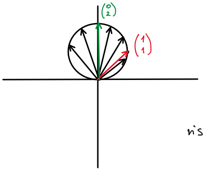
In questo caso, il più piccolo sottospazio che contiene w_1 e w_2 è il piano vettoriale V^2 stesso.

Esempio di sottoinsieme che NON è un sottospazio vettoriale:

① $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + (y_2-1)^2 = 1 \right\}$

eq. di una circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1



$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

rispetto alla somma:

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \in W$

perché $1^2 + (1-1)^2 = 1$

infatti $0^2 + (2-1)^2 = 1$

Vediamo se la loro somma $\in W$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \overset{?}{\in} W$$

$$1^2 + (3-1)^2 = 5 \neq 1 \implies \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \notin W$$

OSS.: Sia W SSV; abbiamo supp. $W \neq \emptyset$, quindi $\exists\, w \in W$, per $\boxed{SSV2}$, anche

$(-1) \cdot w \in W$

$= -w \in W$

$\implies$ per $\boxed{SSV1}$, $w + (-w) \in W$

$= 0 \in W$

$\implies$ ogni SSV contiene sempre il VETTORE NULLO : $0 \in W$

Esempio: $W = \{0\} \subseteq V$ è un sottosp. vettoriale e si chiama SSV NULLO o BANALE.

~ . ~

Siano ora $W, U \subseteq V$ due SSV.

LEMMA: $W \cap U$ è ancora un ssv di V.

Dim. Basta verificare (SSV1) e (SSV2):

(SSV1) siano $w_1, w_2 \in W \cap U \begin{array}{l} \subseteq W \text{ ssv} \\ \subseteq U \text{ ssv} \end{array}$

$$\left.\begin{array}{l} w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W \\ w_1, w_2 \in U \Rightarrow w_1 + w_2 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow w_1 + w_2 \in W \cap U \checkmark$$

(SSV2) sia $w \in W \cap U$, sia $c \in \mathbb{K}$ arbitrario

$$w \in W \cap U \left.\begin{array}{l} \subseteq W \text{ ssv} \Rightarrow c \cdot w \in W \\ \subseteq U \text{ ssv} \Rightarrow c \cdot w \in U \end{array}\right\} \Rightarrow c \cdot w \in W \cap U$$

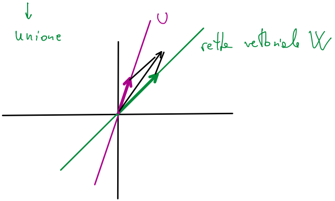
* * *

Cons. di nuovo $W, U \subseteq V$ due ssv

e mi chiedo: $W \cup U$ è ssv?

↓ unione

es. $\mathbb{R}^2$



In generale la risposta è NO, perché non è chiuso rispetto alla somma.

Vedremo che la seguente def. ci fornisce il più piccolo ssv che contenga $W \cup U$.

Def. Siano W e U due ssv di V. Il

SOTTOSPAZIO SOMMA è:

$$W + U := \left\{ v \in V : v \text{ si può scrivere nella forma } v = w + u, \text{ con } w \in W \text{ e } u \in U \right\}$$

oss. ① $W + U$ è effettivamente un ssv.

(esercizio)

② $W + U \supseteq W$, $W + U \supseteq U$

infatti, $w \in W$, $w = \underset{\in W}{w} + \underset{\in U}{0} \in W + U$

analog. $\forall\ u \in U$, $u = \underset{\substack{\cap \\ W}}{0} + \underset{\substack{\cap \\ U}}{u} \in W + U$

$\Rightarrow \boxed{W + U \supseteq W \cup U}$

③ è possibile dimostrare che $W+U$ è il più piccolo SSV che contiene l'unione

* * *

Vediamo come produrre concretamente SSV.

DEF. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori, una

COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_k$

è un vettore del tipo

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k \in V , \quad c_i \in \mathbb{K}$$

Def.: Siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Il SOTTOSPAZIO GENERATO DA $v_1, v_2, \dots, v_k$ è:

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k) := \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k \ : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

è il sottoinsieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_k$.

Es.: in $\mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, una combinazione lineare è $3v_1 - 8v_2 = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 8\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\-21\end{pmatrix}$

LEMMA: $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ è un SSV.

__DIM.__: Devo controllare SSV1 e SSV2; è una formalità:

$$w_1 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k), \quad w_2 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$w_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$ per opportuni coeff. $a_1, \dots, a_k$

$w_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_k v_k$ —||— $b_1, \dots, b_k$

$$w_1 + w_2 = \underbrace{(a_1+b_1)}_{\in \mathbb{K}} v_1 + \underbrace{(a_2+b_2)}_{\in \mathbb{K}} v_2 + \dots + \underbrace{(a_k+b_k)}_{\in \mathbb{K}} v_k$$

$\Longrightarrow$ anche $w_1 + w_2$ è una comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$

SSV2: $w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$w = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k$ per opportuni $d_1, \dots, d_k$

Cons. $c \in \mathbb{K}$, $\quad c\cdot w = \underbrace{c d_1}_{\in \mathbb{K}} v_1 + \dots + \underbrace{c\cdot d_k}_{\in \mathbb{K}} v_k$

$\Longrightarrow$ anche $c\cdot w$ è una comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$