Corso di ALEG
Quarto foglio di esercizi
Prof. Valentina Beorchia

October 27, 2022

1. Si dica se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^2$ formano un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{I} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Inoltre, si esprimano in tutti i casi affermativi i seguenti vettori come combinazione lineare dei generatori:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Si dimostri che lo spazio vettoriale dei polinomi

$$\mathbb{R}[x]$$

   non ammette un insieme finito di generatori.

3. Si V uno spazio vettoriale e siano $v_1 \dots, v_k \in V$. Si dimostrino i seguenti fatti:

   (a) per ogni $i = 1, \dots, k$ si ha $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$;

   (b) se $m < k$, si ha

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m, \dots, v_k).$$

   (c) se $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$, allora

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, v).$$