Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 4

1) Dimostrare che uno spazio è T_1 se e solo se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi.

2) Dimostrare che se $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ e $f_2 \colon X_2 \to Y_2$ sono continue (risp. aperte), allora
$$f_1 \times f_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$
$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$
è continua (risp. aperta).

3) Siano X e Y di Hausdorff. Dimostrare che $X \times Y$ è di Hausdorff.

4) Sia X uno spazio T_3 e sia $A \subset X$ un chiuso. Dimostrare che A è intersezione di tutti gli aperti che lo contengono.

5) Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi e $A_i \subset X_i$ chiuso $\forall\, i \in I$. Dimostrare che
$$A = \prod_{i \in I} A_i$$
è chiuso in
$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

6) Dimostrare che se $A \subset X$ e $B \subset Y$ allora:
   (a) $\operatorname{Cl}(A \times B) = \operatorname{Cl} A \times \operatorname{Cl} B$;
   (b) $\operatorname{Int}(A \times B) = \operatorname{Int} A \times \operatorname{Int} B$;
   (c) $\operatorname{Fr}(A \times B) = (\operatorname{Fr} A \times \operatorname{Cl} B) \cup (\operatorname{Cl} A \times \operatorname{Fr} B)$.

   Dedurre quindi la formula di Leibniz per la frontiera: se A è chiuso in X e B chiuso in Y allora
$$\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B).$$

7) Dimostrare che X è T_2 se e solo se la diagonale
$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$
è chiusa in $X \times X$.

8) Siano $f, g \colon X \to Y$ continue, Y di Hausdorff. Dimostrare che
$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$
è chiuso in X.