

Lezione 8

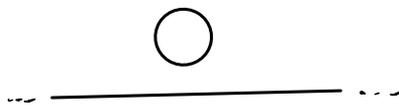
Unione topologica X, Y Spazi topologici

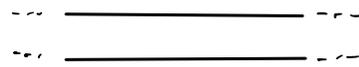
$X \sqcup Y$ è l'unione disgiunta di X e Y con la topologia definita come segue

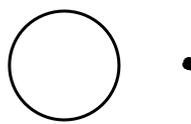
$$U \subset X \sqcup Y \text{ aperto} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} U \cap X \text{ aperto in } X \\ U \cap Y \text{ aperto in } Y \end{cases}$$

Si verifica immediatamente che effettivamente questo definisce una topologia detta topologia unione.

Def $X \sqcup Y$ è detto unione topologica di X e Y

Es $\mathbb{R} \sqcup S^1$ 

$\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ 

$S^1 \sqcup \{a\}$ 

Più in generale se $\{X_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di spazi definiamo l'unione topologica come l'unione disgiunta

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

con la topologia definita così:

$$U \subset X \text{ aperto} \stackrel{\text{def}}{\iff} U \cap X_i \text{ aperto in } X_i \quad \forall i \in I.$$

Oss X_j è aperto in $\bigsqcup_{i \in I} X_i$, $\forall j \in I$

$$U \subset X_j \text{ aperto in } X_j \text{ è aperto in } \bigsqcup_{i \in I} X_i \quad \forall j \in I$$

Abbiamo quindi che le mappe di inclusione

$$i_j : X_j \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i, \quad i_j(x) = x \quad \forall x \in X_j$$

Sono immersioni aperte (in particolare continue)

e X_j è un sottospazio topologico di $\bigsqcup_{i \in I} X_i \quad \forall j \in I$.

Teorema $f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ è continua \Leftrightarrow

$f \circ i_j = f|_{X_j} : X_j \rightarrow Y$ è continua $\forall j \in I$.

Dim \Rightarrow immediato perché $f \circ i_j$ composizione di applicazioni continue

$\Leftarrow \forall V \subset Y$ aperto \Rightarrow

$$(f \circ i_j)^{-1}(V) = i_j^{-1}(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V) \cap X_j$$

aperto in $X_j \quad \forall j \in I \Rightarrow f^{-1}(V)$ aperto in $\bigsqcup_{i \in I} X_i$

Prodotto topologico Consideriamo spazi X e Y

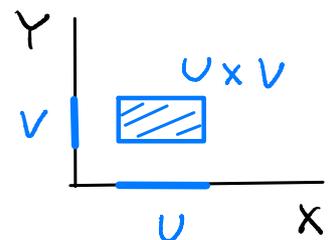
$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \subset X, V \subset Y \text{ aperti} \}$$

insieme dei prodotti di aperti è base per una topologia

su $X \times Y$ detta topologia prodotto.

Def $X \times Y$ con la topologia prodotto è

detto prodotto topologico di X e Y .



$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X \quad \text{e} \quad \pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

$$\pi_1(x, y) = x \quad \pi_2(x, y) = y$$

Proiezioni canoniche sono continue

Più in generale se $\{X_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di spazi consideriamo il prodotto cartesiano

$$X = \prod_{i \in I} X_i := \{x: I \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i \forall i \in I\}$$

(Si pone anche $x(i) =: x_i$ i -esima componente di $x = (x_i)_{i \in I}$)

L'insieme \mathcal{B} di tutti i prodotti del tipo

$$U = \prod_{i \in I} U_i$$

t.c. $U_i \subset X_i$ aperto $\forall i \in I$ e $\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ finito

è base per una topologia su $\prod_{i \in I} X_i$ (topologia prodotto)

Mostriamo che \mathcal{B} è base

1) $X \in \mathcal{B}$ quando è verificata la condizione sull'unione

2) $\forall U = \prod_{i \in I} U_i, V = \prod_{i \in I} V_i \in \mathcal{B} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{B}$

$$\text{dato che } U \cap V = \prod_{i \in I} (U_i \cap V_i)$$

OSS 1) Se $I = \{1, 2\}$ ha due elementi riotteniamo la topologia prodotto considerate sopra

2) Se $I = \{1, \dots, n\}$ è finito la topologia prodotto ha come base tutti i prodotti di aperto

3) Se I è infinito solo i prodotti di aperto dove al massimo un numero finito sono non banali costituiscono la base della topologia prodotto.

Def $\prod_{i \in I} X_i$ con la topologia prodotto è detto prodotto topologico di $\{X_i\}_{i \in I}$.

Es Consideriamo $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ prodotto topologico di un'infinità numerabile di copie di \mathbb{R}

$$U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n, \quad U_n = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \neq 1, 2, 3 \\]0, 1[& \text{se } n = 1, 2, 3 \end{cases}$$

è aperto in X

mentre $\prod_{n \in \mathbb{N}}]0, 1[\subset X$ non è aperto!

Possiamo considerare le proiezioni canoniche

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$$

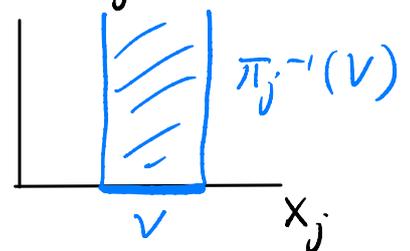
$$\pi_j(x) = x_j \quad (j\text{-esima componente di } x)$$

e queste sono continue dato che $\pi_j^{-1}(V)$ è aperto basico $\forall V \subset X_j$ aperto:

$$\pi_j^{-1}(V) = \prod_{i \in I} U_i, \quad U_i = \begin{cases} X_i & \text{se } i \neq j \\ V & \text{se } i = j \end{cases}$$

π_j è aperta dato che

$$\pi_j \left(\prod_{i \in I} U_i \right) = U_j$$



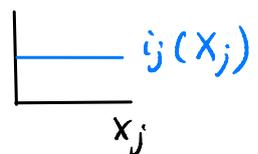
$U_i \subset X_i$ aperto $\forall i \in I$, $U_j \neq X_j$ per al più un # finito

Fissato $a_i \in X_i \forall i \in I$ si hanno immersioni chiuse

$$i_j : X_j \hookrightarrow \prod_{i \in I} X_i, \quad (i_j(x))_i = \begin{cases} x & \text{se } i = j \\ a_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

NB i_j immersione che dipende da a_i

$$\pi_j \circ i_j = \text{id}_{X_j}$$



Teorema $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ è continua \Leftrightarrow

$\pi_j \circ f: Y \rightarrow X_j$ è continua $\forall j \in I$.

$\pi_j \circ f$ è detta j -esima componente di f .

Dim \Rightarrow immediato

$\Leftarrow \forall U = \prod_{i \in I} U_i, U_i \subset X_i$ aperti $\forall i \in I$

aperta base $U_i = X_i \forall i \in I - \{i_1, \dots, i_k\}$

$y \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow f(y) \in U \Leftrightarrow \pi_j(f(y)) \in U_j \forall j \in I$

$\Leftrightarrow y \in (\pi_j \circ f)^{-1}(U_j) \forall j \in I \Leftrightarrow y \in \bigcap_{l=1}^k (\pi_{i_l} \circ f)^{-1}(U_{i_l})$

$\Rightarrow f^{-1}(U) = \bigcap_{l=1}^k (\pi_{i_l} \circ f)^{-1}(U_{i_l})$ aperto in Y .

OSS Quando per controllare la continuità di una applicazione verso uno spazio prodotto è sufficiente controllare la continuità delle componenti.

Es $f: X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

continua $\Leftrightarrow f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

OSS I-numerabile, II-numerabile e separabile

sono proprietà che si preservano per prodotti finiti

Facilmente si vede che T_1 e T_2 si preservano per prodotto arbitrario. T_3 si preserva per prodotto (meno immediato).

T_4 non si preserva per prodotto (neanche finiti)

Controesempio: $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ non T_4 .