Corso di ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

Foglio di esercizi n. 2

1. Sia $\mathcal{C} = \{(z, \sin(z)) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z \in \mathbb{C}\}$, dove $\sin(z)$ è la funzione seno complessa, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Si dica se $\mathcal{C}$ è una curva algebrica affine piana.

2. Si dica se l'ideale generato da x ed y, $(x, y) \subset \mathbb{C}[x, y]$, è principale.

3. Sia $f(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \in \mathbb{C}[x, y]$, con $a(x), b(x), c(x) \in \mathbb{C}[x]$, $a(x) \neq 0$. Sia $\Delta = b(x)^2 - 4a(x)c(x)$. Si dimostri che f è riducibile se e solo se $a(x), b(x), c(x)$ hanno un fattore comune non costante, oppure Δ è un quadrato.

4. Siano $M, N \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$ due matrici quadrate di ordine $n + 1$ invertibili. Siano $f, g \colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ le corrispondenti trasformazioni proiettive, cioè

$$f([x_0 : \ldots : x_n]) = [M \cdot {}^t(x_0, \ldots, x_n)]\,, \quad g([x_0 : \ldots : x_n]) = [N \cdot {}^t(x_0, \ldots, x_n)]\,.$$

Si dimostri che $f = g$ se e solo se $M = \lambda N$, per qualche $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

5. Si determinino esplicitamente le trasformazioni proiettive di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ che preservano i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &= \{x + iy \,|\, y = 0\};\\
\mathbb{H} &= \{x + iy \,|\, y > 0\};\\
\overline{\mathbb{H}} &= \{x + iy \,|\, y \geq 0\};\\
\Delta &= \{x + iy \,|\, x^2 + y^2 < 1\};\\
\overline{\Delta} &= \{x + iy \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}\,,
\end{aligned}$$

dove $x, y \in \mathbb{R}$.
Si dimostri che $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ manda $\mathbb{H}$ in Δ.