Lezione 12

Teorema Sia $S: AX = 0$ un sistema omogeneo, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora lo spazio delle soluzioni $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un <u>sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$</u>.

<u>Dim</u> i) Il vettore nullo 0 è soluzione di S, cioè $0 \in \Sigma_S$
$\Rightarrow \Sigma_S \neq \phi$

ii) $\forall\, U, U' \in \Sigma_S \Rightarrow A(U+U') = AU + AU' = 0 \Rightarrow$
$U + U' \in \Sigma_S$

iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, U \in \Sigma_S \Rightarrow A(\alpha U) = \alpha AU = 0 \Rightarrow$
$\alpha U \in \Sigma_S$. Questo conclude la dimostrazione.

Quindi per capire la struttura dello spazio delle soluzioni Σ_S di un sistema omogeneo dobbiamo approfondire la comprensione degli spazi vettoriali.

Def Consideriamo un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Diciamo che i vettori $v_1, \dots, v_s \in V$ sono <u>linearmente indipendenti</u> se l'<u>unica</u> loro combinazione lineare nulla è quella banale, cioè:

$$\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K},\ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0.$$

Def $v_1, \dots, v_s \in V$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ <u>non tutti nulli</u> t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0_V,$$

cioè se $v_1, \dots, v_s$ <u>non</u> sono linearmente indipendenti.

Es 1) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti infatti basta risolvere il sistema:

$$x u + y v = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi l'unica combinazione lineare nulla di u e v è quella banale.

2) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sono linearmente dipendenti infatti

$$x u_1 + y u_2 + z u_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} t \\ y = -\frac{t}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per $t = 3$ si ha la soluzione $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow -u_1 - u_2 + 3u_3 = 0$ combinazione lineare nulla non banale

Generatori Consideriamo un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V e vettori $v_1, \dots, v_s \in V$. Consideriamo l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_s$

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s) := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s \mid \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}\}$$

Altre notazioni comunemente utilizzate:

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_s) = \langle v_1, \dots, v_s \rangle = L(v_1, \dots, v_s)$$

L sta per <u>linear subspace</u>, termine usato in inglese per sottospazio vettoriale (più comune di <u>vector subspace</u>)

Teorema $\forall s \in \mathbb{N}$, $\forall v_1, \dots, v_s \in V$, $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_s) \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V.

<u>Dim</u> i) $0_V = 0 v_1 + \dots + 0 v_s \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s) \neq \emptyset$

ii) $\forall v, w \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s)$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s$$
$$w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s$$

$\Rightarrow v + w = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_s + \beta_s) v_s$

$\Rightarrow v + w \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s)$

iii) $\forall \gamma \in \mathbb{K}$ si ha $\gamma v = \gamma \alpha_1 v_1 + \dots + \gamma \alpha_s v_s$

$\Rightarrow \gamma v \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_s)$.

Def $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s)$ è detto <u>sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_s$</u>. I vettori $v_1, \dots, v_s$ sono detti <u>generatori</u>.

Se esistono vettori $v_1, \dots, v_s \in V$ t.c.

$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s)$$

diremo che V è finitamente generato, cioè generato da un numero finito di suoi vettori.

Def Un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ è detto base per V se valgono le seguenti:

i) $v_1, \dots, v_n$ generano V, cioè $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$;

ii) $v_1, \dots, v$ sono linearmente indipendenti.

In genere una base la considereremo come n-upla ordinata e la chiameremo con una lettera maiuscola in corsivo ad es. $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ (oppure $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, ecc)

Esempio notevole

I vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

formano una base di $\mathbb{K}^n$ detta base canonica.

OSS 1) e_i ha 1 come i-esima coordinata e 0 altrove.

2) e_i è la i-esima colonna della matrice identica I_n

3) Si possono considerare anche come vettori riga:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$
$$\dots$$
$$e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

La chiamiamo $\mathcal{E}_n$

$$\mathcal{E}_n = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Es 1) $\mathbb{R}\ (=\mathbb{R}^1)$: $e_1 = 1$

2) $\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\mathbb{R}^3$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\mathbb{C}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mostriamo che $e_1, \dots, e_n$ è base di $\mathbb{K}^n$

i) $\forall\ v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ si ha

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{K}^n = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)$$

ii) $\forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$,

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Rightarrow \quad 0_{\mathbb{K}^n} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $e_1, \dots, e_n$ linearmente indipendenti.

Pertanto $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ è base di $\mathbb{K}^n$.