Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

4. Sottospazi, combinazioni lineari, basi e dimensione

In questo capitolo denoteremo con V uno spazio vettoriale su un campo K ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, oppure $\mathbb{C}$).

1 Sottospazi vettoriali

Definizione 1. *Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ si dice* **sottospazio vettoriale** *di V se valgono le seguenti condizioni:*

1) $\forall w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$;

2) $\forall w \in W$ e $\forall a \in K$, $aw \in W$.

Osservazione 1. 1. Nella precedente definizione, $w_1 + w_2$ è la somma di w_1 e w_2 considerati come vettori di V. Analogamente il prodotto per scalari aw è quello in V. Quindi, affinché $W \subseteq V$ sia un sottospazio vettoriale di V, deve essere non vuoto e deve contenere la somma di ogni coppia di vettori che gli appartengono, e deve contenere il prodotto di ogni suo vettore per ogni scalare. In questo caso si dice anche che W è chiuso per le operazioni di somma e prodotto per scalari di V.

2. Se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, allora possiamo definire in W una operazione di somma come segue. Per ogni scelta di $w_1, w_2 \in W$, si considerano w_1 e w_2 come vettori di V, e si definisce $w_1 + w_2$ come la somma in V. La condizione 1) garantisce che $w_1 + w_2 \in W$. Analogamente, possiamo definire in W un prodotto per scalari: per ogni $w \in W$ e per ogni $a \in K$, si considera w come vettore in V, e si definisce aw come il prodotto per scalari in V. La condizione 2) garantisce che $aw \in W$.

Osserviamo che, per la proprietà 2), $0 = 0w \in W$. Quindi W contiene il vettore nullo di V, ed inoltre 0 è elemento neutro anche per la somma di W. Quindi in W vale la proprietà (SV2) della definizione di spazio vettoriale.

Per ogni vettore $w \in W$, $-w = (-1)w \in W$, per la 2). Quindi in W vale anche (SV3).

Le proprietà (SV1), (SV4)–(SV8) della definizione di spazio vettoriale valgono in V e quindi valgono anche in W. Concludiamo quindi che W è uno spazio vettoriale su K con queste operazioni.

3. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V. Se U è un sottospazio vettoriale di W, allora U è anche un sottospazio vettoriale di V.
Se U è un sottoinsieme di W ed un sottospazio vettoriale di V, allora U è un sottospazio vettoriale di W.

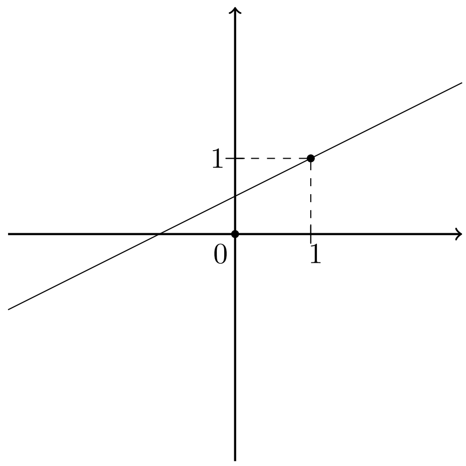
Esempio 1 (Sottoinsiemi che non sono sottospazi vettoriali). 1. In $\mathbb{R}^2$, consideriamo l'insieme

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -s_1 + 2s_2 = 1 \right\}$$

delle soluzioni dell'equazione lineare $-x_1 + 2x_2 = 1$. Risolvendo tale equazione, si vede che S è l'insieme dei vettori della forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{al variare di} \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi S corrisponde all'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ che si trovano sulla retta passante per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con direzione $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



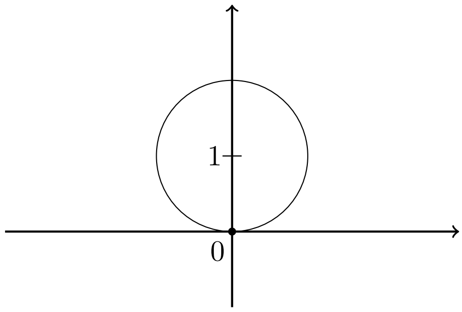
Chiaramente $S \neq \emptyset$, tuttavia S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$, ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S$.

Notiamo anche che il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, non appartiene ad S, quindi per l'osservazione precedente S non può essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

2. Sia

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid s_1^2 + (s_2 - 1)^2 = 1 \right\}.$$

In questo caso S corrisponde ai punti di $\mathbb{R}^2$ che si trovano sul cerchio di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 1.



Notiamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$, ma S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Ad esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$, ma $-\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin S$.

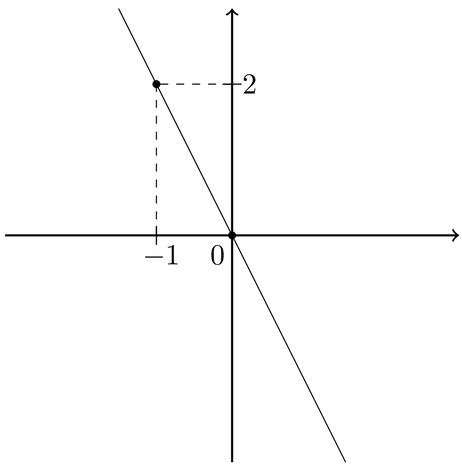
Esempio 2 (**Sottospazi vettoriali**). **1.** Il sottoinsieme formato dal vettore nullo, $\{0\}$, è un sottospazio vettoriale di V. V stesso è un sottospazio vettoriale di V. Questi sono detti **sottospazi banali** di V.

2. Per ogni $v \in V$, sia $W = \{av \mid a \in K\} \subseteq V$. Allora W è un sottospazio vettoriale di V.

Ad esempio, se $V = \mathbb{R}^2$ e $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ 2a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

corrisponde all'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ che si trovano sulla retta passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e per $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



3. Sia $A \cdot x = 0$ un sistema lineare omogeneo di ordine n a coefficienti in K. Sia $W \subseteq K^n$ il sottoinsieme formato dalle soluzioni di $A \cdot x = 0$,

$$W = \left\{ s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n \mid A \cdot s = 0 \right\}.$$

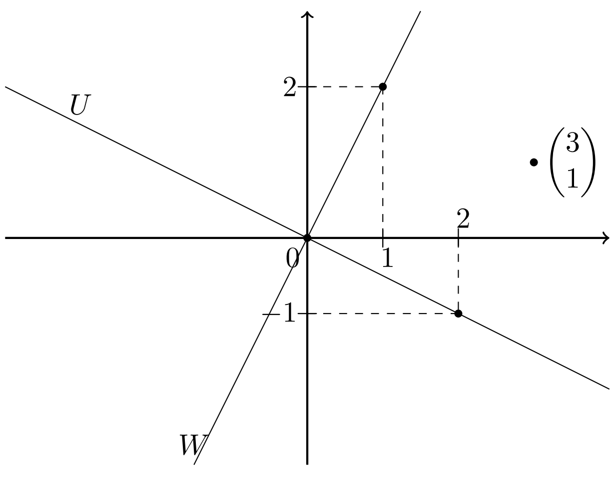
Allora W è un sottospazio vettoriale di K^n. Questo segue direttamente dal teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari.

4. Sia $d \in \mathbb{N}$, e sia $K[t]_d \subset K[t]$ il sottoinsieme formato dai polinomi di grado $\leq d$. Poiché la somma di due polinomi di grado $\leq d$ è un polinomio di grado $\leq d$ ed il prodotto di un polinomio di grado $\leq d$ per uno scalare è un polinomio di grado $\leq d$, $K[t]_d$ è un sottospazio vettoriale di $K[t]$.

Dati due sottospazi vettoriali $U, W \subseteq V$, è facile verificare che l'**intersezione** $U \cap W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V (la verifica è lasciata per esercizio). In generale, l'unione $U \cup W \subseteq V$ non è un sottospazio vettoriale di V. Ad esempio, se $V = \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} U &= \left\{ a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, \\ W &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

allora $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Infatti $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in U \cup W$, ma $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \cup W$.



La **somma** di U e W si definisce come

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Verifichiamo che $U + W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V. Siano quindi $u + w, u' + w' \in U + W$, dove $u, u' \in U$, $w, w' \in W$; sia $a \in K$. Allora abbiamo:

$$(u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w') \in U + W\,,$$
$$a(u + w) = au + aw \in U + W\,,$$

quindi $U + W$ è sottospazio vettoriale di V. Si verifica facilmente che $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene sia U che W (quindi contiene anche $U \cup W$).

La somma $U + W$ si dice **somma diretta**, se $U \cap W = \{0\}$. In tal caso si scrive $U \oplus W$. Ad esempio la somma dei sottospazi vettoriali U e W nella figura qui sopra è una somma diretta, in questo caso si ha che $U \oplus W = \mathbb{R}^2$ (verifica per esercizio).

Dati due sottospazi vettoriali U e W di V, essi si dicono **supplementari** in V, se $V = U \oplus W$.

Proposizione 1. *Siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi vettoriali di V. La somma $U + W$ è una somma diretta $\Longleftrightarrow$ ogni vettore $v \in U + W$ si esprime in modo unico come $v = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$.*

Dim. ($\Rightarrow$) Sia $v \in U + W$, e supponiamo per assurdo che v si possa esprimere in due modi diversi come somma di un vettore di U ed un vettore di W: $v = u + w$, $v = u' + w'$, con $u, u' \in U$, $w, w' \in W$, e $u \neq u'$ oppure $w \neq w'$. Allora $u + w = u' + w'$, da cui segue che $u - u' = w' - w$. Siccome $u - u' \in U$ e $w' - w \in W$, segue dalla precedente uguaglianza che $u - u', w' - w \in U \cap W$. Siccome $U \cap W = \{0\}$ per ipotesi, $u = u'$ e $w = w'$, che è assurdo perché abbiamo supposto che u, u', oppure w, w', sono distinti.

($\Leftarrow$) Supponiamo ora che ogni vettore di $U + W$ si possa esprimere in un solo modo come somma di un vettore di U e di un vettore di W. Dimostriamo che $U \cap W = \{0\}$. Se per assurdo esistesse un vettore $v \in U \cap W$, $v \neq 0$, allora potremmo esprime $0 \in U + W$ come $0 + 0$, ma anche come $v - v$. Siccome $0, v \in U$ e $0, -v \in W$, si ha una contraddizione, quindi $U \cap W = \{0\}$ e la somma è diretta. $\square$

La somma diretta di due sottospazi vettoriali è collegata con la nozione di prodotto cartesiano di spazi vettoriali. Siano $\overline{U}$ e $\overline{W}$ due spazi vettoriali sul campo K. Ricordiamo che il prodotto cartesiano di $\overline{U}$ e $\overline{W}$ è l'insieme $\overline{U} \times \overline{W}$ delle coppie ordinate (u, w), dove $u \in \overline{U}$ e $w \in \overline{W}$. In $\overline{U} \times \overline{W}$ possiamo definire una operazione di somma ed un prodotto per scalari nel seguente modo:

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w')\,,$$
$$a(u, w) = (au, aw)\,,$$

per ogni $(u, w), (u', w') \in \overline{U} \times \overline{W}$ ed $a \in K$. Si verifica facilmente che $\overline{U} \times \overline{W}$, con queste operazioni, è uno spazio vettoriale su K, il vettore nullo è $(0, 0)$ e l'opposto di (u, w) è $(-u, -w)$. Chiameremo tale spazio vettoriale il **prodotto cartesiano** di $\overline{U}$ e $\overline{W}$.

Vediamo ora che $\overline{U} \times \overline{W}$ è somma diretta di due suoi sottospazi vettoriali. Siano

$$U := \{(u,0) \in \overline{U} \times \overline{W} \mid u \in \overline{U}\},$$

$$W := \{(0,w) \in \overline{U} \times \overline{W} \mid w \in \overline{W}\}.$$

Osserviamo che $U, W \subseteq \overline{U} \times \overline{W}$ sono sottospazi vettoriali di $\overline{U} \times \overline{W}$. Inoltre, per ogni vettore $(u,w) \in \overline{U} \times \overline{W}$, si ha che $(u,w) = (u,0) + (0,w)$, quindi $\overline{U} \times \overline{W} = U + W$. Infine, $U \cap W = \{(0,0)\}$, quindi la somma è diretta:

$$\overline{U} \times \overline{W} = U \oplus W.$$

Esempio 3. Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Lo spazio vettoriale K^{m+n} può essere considerato come il prodotto cartesiano di K^m e K^n, $K^{m+n} = K^m \times K^n$. Per la precedente osservazione, possiamo esprimere K^{m+n} come somma diretta di due suoi sottospazi vettoriali, $K^{m+n} = K^m \oplus K^n$.

2 Combinazioni lineari

Definizione 2. *Siano $v_1, \dots, v_k \in V$.*

1) Una **combinazione lineare** *dei vettori $v_1, \dots, v_k$ è un vettore di V della forma seguente:*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,$$

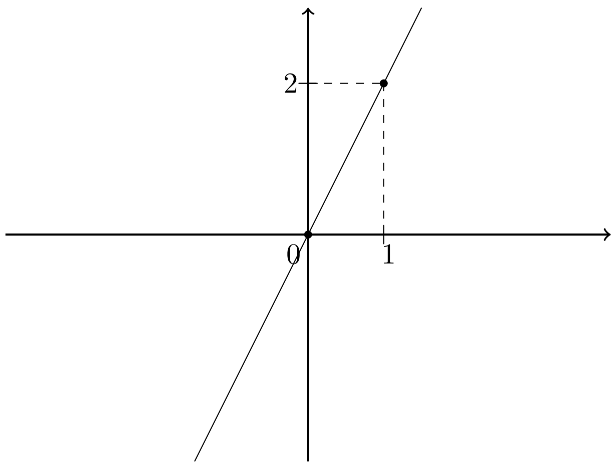
dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K$ sono scalari, detti i **coefficienti** *della combinazione lineare.*

2) Il sottoinsieme di V formato da tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_k$ si denota con $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$*. Quindi*

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \in V \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in K\}.$$

Esempio 4. 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$, e sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare di v. In questo caso abbiamo solo un coefficiente, λ.

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato da tutte le combinazioni lineari di v, $\mathrm{Span}(v)$, corrisponde alla retta passante per l'origine ed avente direzione v.



2. Siano $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, il vettore

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

è una combinazione lineare di v_1 e v_2, con coefficienti λ_1, λ_2. In particolare $v_1 - 2v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di v_1 e v_2, i coefficienti sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

Osserviamo che, in questo esempio, ogni vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ si può esprimere come combinazione lineare di v_1 e v_2 (i coefficienti sono $\lambda_1 = \frac{b+a}{3}$, $\lambda_2 = \frac{b-2a}{3}$).

Proposizione 2. $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) \subseteq V$ *è un sottospazio vettoriale di* V*.*

Dim. Osserviamo che $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) \neq \emptyset$. Ad esempio esso contiene il vettore nullo di V, poiché $0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_k$.

Siano ora $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_k v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ due combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_k$. Dalle proprietà SV1, SV4 ed SV6 della definizione di spazio vettoriale, deduciamo che vale la seguente uguaglianza:

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) + (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_k v_k) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_k + \mu_k) v_k \,,$$

quindi

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) + (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_k v_k) \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) \,.$$

Siano ora $a \in K$ e $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$. Usando le proprietà SV5 ed SV7 deduciamo che vale la seguente uguaglianza:

$$a(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) = (a\lambda_1) v_1 + (a\lambda_2) v_2 + \ldots + (a\lambda_k) v_k \,,$$

quindi $a(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k) \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.

Questo dimostra che $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ soddisfa le condizioni 1) e 2) della definizione 1, quindi è un sottospazio vettoriale di V. $\square$

Osservazione 2. 1. Per ogni $i = 1, \ldots, k$, $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$. Questo segue dalla seguente uguaglianza:

$$v_i = 0v_1 + \ldots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_k\,.$$

Si verifica facilmente che $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ coincide con l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di V che contengono $v_1, \ldots, v_k$.
2. Se $\ell \leq k$, allora $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_\ell) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$. Infatti, per ogni combinazione lineare $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_\ell)$, abbiamo che

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell + 0v_{\ell+1} + \ldots + 0v_k\,.$$

Quindi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_\ell v_\ell \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.

Vediamo ora una applicazione ai sistemi di equazioni lineari.

Proposizione 3. *Sia $A \cdot x = b$ un sistema di m equazioni lineari di ordine n a coefficienti in K. Esso è compatibile $\iff b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \subseteq K^m$.*

Dim. ($\Rightarrow$) Sia $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ una soluzione di $A \cdot x = b$, in altre parole $A \cdot s = b$.
Dalla definizione di prodotto righe per colonne, si ha che

$$A \cdot s = \begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

dove $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Osserviamo che il vettore nel lato destro dell'uguaglianza (1) è una combinazione lineare delle colonne di A, esplicitamente si ha:

$$\begin{pmatrix} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \end{pmatrix} = A^{(1)}s_1 + A^{(2)}s_2 + \ldots + A^{(n)}s_n\,.$$

Quindi $b = A \cdot s = A^{(1)}s_1 + A^{(2)}s_2 + \ldots + A^{(n)}s_n$, da cui segue che $b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$.

($\Leftarrow$) Viceversa, se $b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$, b si può esprimere come combinazione lineare delle colonne di A. Quindi esistono dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, tale che

$$b = \lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)}\,.$$

Osserviamo che il lato destro di questa uguaglianza coincide con il prodotto righe per colonne

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Quindi, posto $s = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$, abbiamo che $A \cdot s = b$, da cui segue che il sistema lineare è compatibile. $\square$

3 Basi

Definizione 3. *1) Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$. Diremo che $v_1, \ldots, v_k$* **generano** *V se $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.*

2) Diremo che V è **finitamente generato** *se esiste un numero finito di vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ che generano V.*

Osservazione 3. I vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ generano V se e solo se per ogni vettore $v \in V$ esistono dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$.

Esempio 5. 1. Nel precedente esempio abbiamo visto che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Quindi questi vettori generano $\mathbb{R}^2$, in particolare $\mathbb{R}^2$ è finitamente generato.

2. Nell'esempio 2.3. abbiamo visto che, dato un sistema lineare omogeneo $A \cdot x = 0$, di ordine n, a coefficienti in un campo K, l'insieme W delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n. Vedremo in questo capitolo che W è finitamente generato. Per trovare un insieme di generatori, si risolve il sistema lineare esprimendo le soluzioni in funzione di alcuni parametri liberi, $a_1 s_1 + \ldots + a_k s_k$, dove $a_1, \ldots, a_k \in K$ sono parametri liberi, ed $s_1, \ldots, s_k \in K^n$ sono soluzioni di $A \cdot x = 0$. Allora $W = \mathrm{Span}(s_1, \ldots, s_k)$. (Si vedano i seguenti esempi.)

3. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio delle soluzioni dell'equazione $2x + y + z = 0$. Ogni soluzione di tale equazione è del tipo $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a - b \end{pmatrix}$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a - b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

4. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x + y + z = & 0 \\ x - z = & 0 \end{cases}$.

Risolvendo il sistema lineare, si trova che le sue soluzioni sono del tipo $\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ a \end{pmatrix}$, al variare di $a \in \mathbb{R}$. Quindi

$$W = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definizione 4. *1) I vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ si dicono* **linearmente dipendenti** *se esistono k scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ non tutti nulli tali che*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0\,.$$

2) I vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ si dicono **linearmente indipendenti** *se essi non sono linearmente dipendenti.*

Osservazione 4. 1. Un vettore $v \in V$ è linearmente dipendente se e solo se $v = 0$.

2. Due vettori $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali tra di loro. Infatti, per definizione, essi sono linearmente dipendenti se e solo se esistono due coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, non entrambi nulli, tale che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Se, ad esempio, $\lambda_2 \neq 0$, allora $v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1$. Analogamente, se $\lambda_1 \neq 0$, allora $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$.

3. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$. Se esiste un indice $i \in \{1, \ldots, k\}$ tale che $v_i = 0$, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti. Per dimostrare questa affermazione definiamo, per ogni $j = 1, \ldots, k$,

$$\lambda_j = \begin{cases} 0\,, & \text{se}\, j \neq i\,; \\ 1\,, & \text{se}\, j = i\,. \end{cases}$$

In questo modo $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_i v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k = v_i = 0$. Siccome $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non sono tutti nulli, i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti.

4. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$. Se esistono due indici $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, con $i \neq j$, tale che $v_i = v_j$, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti. Infatti, se si definiscono $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ come segue,

$$\lambda_\ell = \begin{cases} 0\,, & \text{se } \ell \neq i, j\,, \\ 1\,, & \text{se } \ell = i\,, \\ -1\,, & \text{se } \ell = j\,, \end{cases}$$

si ottiene una combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_k$, a coefficienti non tutti nulli, uguale al vettore nullo.

5. Nel caso in cui lo spazio vettoriale V sia K^m, per qualche $m \in \mathbb{N}$, possiamo stabilire se k vettori $v_1, \ldots, v_k \in K^m$ sono linearmente dipendenti studiando un sistema omogeneo di equazioni lineari. In particolare, se esprimiamo i vettori $v_1, \ldots, v_k$ in componenti,

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \in K^m\,,$$

allora una loro combinazione lineare si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k &= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \\
&= A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dove $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le k}} \in \mathrm{M}_{m,k}(K)$ è la matrice che ha come colonna j-ma le componenti di v_j, per ogni $j = 1, \ldots, k$. Quindi $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti, se e solo se il sistema di equazioni lineari omogeneo $A \cdot x = 0$ ha una soluzione non banale.

Esempio 6. $V = \mathbb{R}^3$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dall'osservazione precedente, v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema di equazioni lineari omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

ha una soluzione non banale. Usando i metodi del precedente capitolo si vede che tale sistema di equazioni ha un'unica soluzione, quella banale. Quindi v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Il seguente risultato caratterizza insiemi di vettori linearmente dipendenti.

Proposizione 4. *Dati k vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$. Essi sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ almeno uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri vettori, cioè se esiste un indice $i \in \{1, \ldots, k\}$, tale che $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k)$.*

Dim. ($\Rightarrow$) Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti, per definizione esistono dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ non tutti nulli, tale che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0. \tag{2}$$

Sia $i \in \{1, \ldots, k\}$ tale che $\lambda_i \neq 0$. Dividendo ambo i membri dell'uguaglianza (2) per λ_i otteniamo

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_k \,.$$

Quindi v_i è una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$.

($\Leftarrow$) Viceversa, se $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k)$, esistono dei coefficienti $\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_k \in K$, tale che

$$v_i = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_k v_k \,.$$

Portando v_i a destra di questa uguaglianza, otteniamo

$$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} - v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_k v_k = 0 \,,$$

cioè una combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_k$ con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo. Ne segue che $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti. $\square$

Definizione 5. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Un sottoinsieme $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ è una* **base** *(finita) di V, se valgono le seguenti proprietà:*

1) $v_1, \ldots, v_n$ generano V;

2) $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione 5. *Un sottoinsieme $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ è una base di $V \iff$ per ogni vettore $v \in V$ esistono e sono unici dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, tale che $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. In tal caso, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le* **coordinate** *di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Dim. ($\Longrightarrow$) Sia $v \in V$, poiché $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$, esistono dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tale che $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Supponiamo per assurdo che $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non siano unici, e siano $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ altri coefficienti tale che $v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$. Quindi

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \,.$$

Da questo segue che $(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$. Poiché $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$, che è assurdo.

($\Longleftarrow$) Viceversa, se ogni vettore di V è combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$, allora $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n)$. Per dimostrare che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, osserviamo che $0 = 0v_1 + \ldots + 0v_n$ e, per ipotesi, questa è l'unica combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ uguale al vettore nullo. $\square$

Esempio 7. 1. (**Base canonica di K^n**) Per ogni $i = 1, \ldots, n$, sia $e_i \in K^n$ il vettore che ha per componente j-ma δ_{ij}, per ogni $j = 1, \ldots, n$, dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \text{se}\, j \neq i\,, \\ 1\,, & \text{se}\, j = i\,, \end{cases}$$

in altre parole

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di K^n, chiamata la base canonica di K^n.

2. Sia $K[t]_d$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in K, nella indeterminata t, di grado $\leq d$. Siccome ogni polinomio $P \in K[t]_d$ è della forma $P = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, per qualche scelta dei coefficienti $a_0, \ldots, a_d \in K$, $K[t]_d$ è generato dai vettori $1, t, \ldots, t^d$. Siccome $a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = 0$ se e solo se $a_0 = a_1 = \ldots = a_d = 0$, segue che $\{1, t, \ldots, t^d\}$ è una base di $K[t]_d$.

3. $K[t]$ non è finitamente generato. Infatti, per ogni collezione finita di polinomi $P_1, \ldots, P_k \in K[t]$, posto $D = \max\{\mathrm{gr}(P_1), \ldots, \mathrm{gr}(P_k)\}$, si ha che

$$\mathrm{Span}(P_1, \ldots, P_k) \subseteq K[t]_D \neq K[t].$$

Dove, per ogni polinomio P, $\mathrm{gr}(P)$ denota il grado di P.

5. (**Base canonica di** $M_{m,n}(K)$) Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $j = 1, \ldots, n$, sia $E_{i,j} \in M_{m,n}(K)$ la matrice $m \times n$ a coefficienti in K il cui elemento di posto k, ℓ è dato da

$$(E_{i,j})_{k,\ell} = \begin{cases} 1, & \text{se}\, k = i \text{ ed } \ell = j, \\ 0, & \text{se}\, k \neq i \text{ oppure } \ell \neq j. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\{E_{i,j} \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ è una base di $M_{m,n}(K)$.

Proposizione 6. *Sia V uno spazio vettoriale su K, $V \neq \{0\}$, e siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ vettori che generano V. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$.*

Per dimostrare questa proposizione utilizzeremo i seguenti lemmi.

Lemma 1. *Siano $u_1, \ldots, u_\ell \in V$ e sia $u \in \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell)$. Allora*

$$\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell) = \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell, u).$$

Dim. ($\subseteq$) Questa inclusione segue direttamente dalla Osservazione 2. 2.

($\supseteq$) Sia $v \in \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell, u)$. Per definizione di $\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell, u)$, esistono dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, \mu \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_\ell u_\ell + \mu u. \tag{3}$$

Siccome $u \in \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell)$, esistono dei coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in K$, tali che $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_\ell u_\ell$. Sostituendo questa espressione per u in (3), otteniamo

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_\ell u_\ell + \mu\alpha_1 u_1 + \ldots + \mu\alpha_\ell u_\ell \\ &= (\lambda_1 + \mu\alpha_1) u_1 + \ldots + (\lambda_\ell + \mu\alpha_\ell) u_\ell. \end{aligned}$$

Quindi v si può esprimere come combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_\ell$, in altre parole $v \in \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell)$. $\square$

Lemma 2. *Siano $u_1, \ldots, u_\ell \in V$ vettori linearmente indipendenti. Sia $u \in V$ con $u \notin \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell)$. Allora $u_1, \ldots, u_\ell, u$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Supponiamo per assurdo che $u_1, \ldots, u_\ell, u$ siano linearmente dipendenti. Allora esiste una combinazione lineare

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_\ell u_\ell + \mu u = 0 \tag{4}$$

con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, \mu \in K$ non tutti nulli. Osserviamo che μ deve necessariamente essere diverso da 0, altrimenti si avrebbe $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_\ell u_\ell = 0$, e quindi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_\ell = 0$, perché $u_1, \ldots, u_\ell$ sono linearmente indipendenti per ipotesi. Ma questo contraddice il fatto che $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell, \mu$ non sono tutti nulli. Quindi $\mu \neq 0$ e, dividendo ambo i membri di (4) per μ, otteniamo la seguente uguaglianza:

$$u = -\frac{\lambda_1}{\mu} u_1 - \ldots - \frac{\lambda_\ell}{\mu} u_\ell \,.$$

Quindi u si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $u_1, \ldots, u_\ell$, cioè $u \in \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell)$, che contraddice l'ipotesi $u \notin \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_\ell)$. $\square$

Dimostrazione della Proposizione 6. È possibile trovare $\mathcal{B}$ come il sottoinsieme di $\{v_1, \ldots, v_k\}$ composto dai vettori che sono scelti con il seguente procedimento. Sia $i \in \{1, \ldots, k\}$ il più piccolo indice j tale che $v_j \neq 0$, allora $v_i \in \mathcal{B}$. Notiamo che, essendo $V \neq \{0\}$, esiste un vettore $v_j \in \{v_1, \ldots, v_k\}$ tale che $v_j \neq 0$. Inoltre v_i è linearmente indipendente perché $\neq 0$.

Consideriamo ora v_{i+1}. Se $v_{i+1} \in \mathrm{Span}(v_i)$, allora $v_{i+1} \notin \mathcal{B}$; altrimenti $v_{i+1} \in \mathcal{B}$. Osserviamo che, nel primo caso $\mathrm{Span}(v_i) = \mathrm{Span}(v_i, v_{i+1})$ (Lemma 1) e v_i, v_{i+1} sono linearmente dipendenti, mentre nel secondo caso v_i e v_{i+1} sono linearmente indipendenti (Lemma 2).

Ora prendiamo in considerazione v_{i+2} e, come per v_{i+1}, distinguiamo due casi: se $v_{i+2} \in \mathrm{Span}(v_i, v_{i+1})$, allora $v_{i+2} \notin \mathcal{B}$; altrimenti $v_{i+2} \in \mathcal{B}$. Osserviamo che, nel primo caso $\mathrm{Span}(v_i, v_{i+1}) = \mathrm{Span}(v_i, v_{i+1}, v_{i+2})$ (Lemma 1), e che i vettori di $\mathcal{B}$ scelti fino a questo punto sono linearmente indipendenti (Lemma 2).

Continuiamo in questo modo considerando in ordine tutti i vettori $v_{i+3}, \ldots, v_k$. Quindi, per ogni $\ell \in \{i+3, \ldots, k\}$, $v_{i+\ell} \in \mathcal{B}$ se e solo se $v_{i+\ell} \notin \mathrm{Span}(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+\ell-1})$.

Alla fine di questo procedimento, $\mathcal{B}$ è composta dai vettori $w_1, \ldots, w_n \in \{v_1, \ldots, v_k\}$. Per come sono stati scelti, $w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti, e sono dei generatori di V, quindi $\mathcal{B}$ è una base di V. $\square$

Esempio 8. Sia $V = \mathrm{Span}\left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$. Vogliamo trovare una base $\mathcal{B}$ di V seguendo il procedimento della dimostrazione della Proposizione 6.

Siccome $v_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, poniamo $v_1 \in \mathcal{B}$. Ora osserviamo che $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$, perché ogni vettore appartenente a $\mathrm{Span}(v_1)$ ha come terza componente 0. Quindi $v_2 \in \mathcal{B}$. Adesso consideriamo v_3. Si vede facilmente che $v_3 = v_1 + 2v_2$, quindi $v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Per il Lemma 1, $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Poiché v_1, v_2 sono linearmente indipendenti, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

Osserviamo che $\{v_1, v_2\}$ non è l'unica base di V composta da vettori di $\{v_1, v_2, v_3\}$. Ad esempio $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$ sono delle basi di V contenute in $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Corollario 1. *Sia V uno spazio vettoriale su K. Se V è finitamente generato e diverso dallo spazio vettoriale banale $\{0\}$, allora ha una base finita.*

Dim. Siccome V è finitamente generato, esistono $v_1, \ldots, v_k \in V$, tali che $V = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$. Poiché $V \neq \{0\}$, per la Proposizione 6 esiste una base $\mathcal{B}$ di V, con $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$. □

Proposizione 7 (del completamento)**.** *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathcal{B}$.*

Dim. Per ipotesi V è finitamente generato, quindi esistono dei vettori $u_1, \ldots, u_m \in V$ che generano V. Notiamo che anche i vettori $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m$ generano V, ed inoltre $V \neq \{0\}$ perché contiene i vettori linearmente indipendenti $v_1, \ldots, v_k$. Applicando il procedimento della dimostrazione della Proposizione 6 ai vettori $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m$ troviamo una base $\mathcal{B}$ di V, e siccome $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{B}$. □

Esempio 9. Siano dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

Si verifica facilmente che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti. Vogliamo completare v_1, v_2 fino ad ottenere una base di $\mathbb{R}^4$. A tale scopo consideriamo i vettori e_1, e_2, e_3, e_4 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Procedendo come nella dimostrazione della Proposizione 6, estraiamo dall'insieme $\{v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$. Siccome v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, $v_1, v_2 \in \mathcal{B}$. Ora consideriamo e_1. Si verifica direttamente che $e_1 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, quindi $e_1 \in \mathcal{B}$. Poi consideriamo e_2. Da una verifica diretta si vede che $e_2 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, e_1)$, quindi $e_2 \in \mathcal{B}$. Passiamo ora ad e_3. Si ha che $e_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, e_1, e_2)$, quindi $e_3 \notin \mathcal{B}$. Infine si verifica che $e_4 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, e_1, e_2)$, quindi $e_4 \notin \mathcal{B}$. Concludiamo che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori v_1 e v_2.

Proposizione 8. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Se V ha una base formata da n vettori, allora, $\forall m > n$, e per ogni scelta di m vettori $w_1, \ldots, w_m \in V$, si ha che $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente dipendenti.*

Dim. Per ipotesi esiste una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V composta da n vettori. Per ogni $j = 1, \ldots, m$, esprimiamo il vettore w_j come combinazione lineare dei vettori di questa base:

$$w_j = a_{1j}v_1 + \ldots + a_{nj}v_n\,, \tag{5}$$

dove $a_{1j}, \ldots, a_{nj} \in K$.

Consideriamo ora una combinazione lineare dei vettori $w_1, \ldots, w_m$, $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m$. Sostituendo in questa combinazione lineare le espressioni di $w_1, \ldots, w_m$ in (5), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_m w_m \;&=\; \lambda_1(a_{11}v_1 + \ldots + a_{n1}v_n) + \\
& \lambda_2(a_{12}v_1 + \ldots + a_{n2}v_n) + \ldots + \\
& \lambda_m(a_{1m}v_1 + \ldots + a_{nm}v_n) \\
&=\; (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_m a_{1m})v_1 + \\
& (\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{2m})v_2 + \ldots + \\
& (\lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \ldots + \lambda_m a_{nm})v_n\,.
\end{aligned}$$

Siccome $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_m w_m = 0$ se e solo se

$$\begin{cases}
a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\
a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\
\vdots & \vdots \\
a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots + a_{nm}\lambda_m &= 0\,.
\end{cases} \tag{6}$$

Ora osserviamo che il sistema di equazioni lineari omogeneo (6) ha delle soluzioni non banali, poiché $m > n$. Infatti, trasformandolo in un sistema di equazioni lineari equivalente con matrice dei coefficienti a scala, dalla condizione $m > n$ si deduce che ci sono delle variabili libere, quindi basta assegnare a qualcuna di queste variabili libere dei valori $\neq 0$.

Concludiamo quindi che $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente dipendenti. □

Teorema 1. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Siano $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ due basi di V. Allora $n = m$.*

Dim. Poiché $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, e $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente indipendenti, usando la Proposizione 8 segue che $m \leq n$. Analogamente, dal fatto che $\{w_1, \ldots, w_m\}$ è una base, e siccome $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, si ha che $n \leq m$. Quindi $n = m$. □

Definizione 6. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K. Si definisce* **dimensione** *di V, $\dim(V)$, come segue: $\dim(V) = 0$ se $V = \{0\}$; altrimenti $\dim(V)$ è il numero degli elementi di una (e quindi di ogni) base di V.*

Esempio 10. 1. 1. $\dim(K^n) = n$, poiché la base canonica di K^n ha n vettori.
2. $\dim(K[t]_d) = d+1$. Infatti abbiamo visto che i monomi $1, t, t^2, \ldots, t^d$ formano una base di $K[t]_d$.
3. $\dim(\mathrm{M}_{m,n}(K)) = m \cdot n$, poiché una base di $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ è formata dalle matrici $E_{i,j}$, con $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Proposizione 9. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n > 0$ sul campo K. Siano $v_1, \ldots, v_n \in V$ vettori linearmente indipendenti. Allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V.*

Dim. Siccome $\dim(V) = n$, V è finitamente generato. Siccome $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, dalla Proposizione 7 esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{B} \supseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$. Se per assurdo fosse $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) \neq V$, allora $\mathcal{B} \neq \{v_1, \ldots, v_n\}$. Quindi $\mathcal{B}$ conterrebbe almeno $n+1$ elementi, e di conseguenza $\dim(V) \geq n+1$. Questo è assurdo perché, per ipotesi, $\dim(V) = n$. L'assurdo è stato generato dall'aver supposto $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) \neq V$. Quindi deve valere $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n) = V$, e quindi $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V. □

Proposizione 10. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo K. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

i) W è finitamente generato e $\dim(W) \leq \dim(V)$*;*

ii) $W = V \iff \dim(W) = \dim(V)$.

Dim. i) Se W non fosse finitamente generato, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esisterebbero k vettori $w_1, \ldots, w_k \in W$ linearmente indipendenti (Lemma 2). Siccome W è sottospazio vettoriale di V, $w_1, \ldots, w_k \in V$ sono linearmente indipendenti in V. Tuttavia, dalla Proposizione 8, segue che $w_1, \ldots, w_k$ sono linearmente dipendenti se $k > \dim(V)$, da questo si deduce una contraddizione. Quindi W è finitamente generato.

Dimostriamo ora che $\dim(W) \leq \dim(V)$. Se $W = \{0\}$, allora $\dim(W) = 0$, quindi $\dim(W) = 0 \leq \dim(V)$. Supponiamo quindi $W \neq \{0\}$, e sia $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di W (che esiste per il Corollario 1), $m = \dim(W)$. Osserviamo che $w_1, \ldots, w_m \in V$ sono linearmente indipendenti, quindi dalla Proposizione 7 esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq \mathcal{B}$. Da questo segue che $m \leq \dim(V)$.

ii) ($\Longrightarrow$) Se $W = V$, allora chiaramente $\dim(W) = \dim(V)$.
($\Longleftarrow$) Viceversa, supponiamo che $\dim(W) = \dim(V)$. Se per assurdo fosse $W \neq V$, allora per la Proposizione 7 esisterebbe una base di V composta da un numero di vettori $> \dim(W)$. Da cui segue che $\dim(V) > \dim(W)$, che è assurdo. □

Teorema 2 (Formula di Grassmann)**.** *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo K. Siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi vettoriali di V. Allora*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)\,.$$

In particolare, la somma $U + W$ è diretta $\iff$ $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Dim. Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $U \cap W$. Completiamo i vettori $v_1, \ldots, v_k$ a base di U, $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m\}$, ed a base di W, $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_n\}$. Quindi, con questa notazione, $\dim(U \cap W) = k$, $\dim(U) = k + m$, e $\dim(W) = k + n$. Dobbiamo dimostrare che $\dim(U + W) = k + m + n$. A tale scopo è sufficiente provare che $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n\}$ è una base di $U + W$.

Iniziamo dimostrando che $U + W = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$. Per definizione di somma di due sottospazi vettoriali, ogni vettore $v \in U + W$ è della forma $v = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Poiché $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m\}$ è base di U, esistono dei coefficienti $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m \in K$, tale che

$$u = a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + b_1u_1 + \ldots + b_mu_m \,.$$

Analogamente

$$w = a'_1v_1 + \ldots + a'_kv_k + c_1w_1 + \ldots + c_nw_n \,,$$

con $a'_1, \ldots, a'_k, c_1, \ldots, c_n \in K$. Quindi

$$\begin{aligned} v &= u + w \\ &= a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + b_1u_1 + \ldots + b_mu_m + \\ &\quad\; a'_1v_1 + \ldots + a'_kv_k + c_1w_1 + \ldots + c_nw_n \\ &= (a_1 + a'_1)v_1 + \ldots + (a_k + a'_k)v_k + b_1u_1 + \ldots + b_mu_m + c_1w_1 + \ldots + c_nw_n \,. \end{aligned}$$

Da questo segue che $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ generano $U + W$.

Per dimostrare che $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti, consideriamo una loro combinazione lineare

$$a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + b_1u_1 + \ldots + b_mu_m + c_1w_1 + \ldots + c_nw_n \,, \tag{7}$$

e supponiamo che essa sia $= 0$. Vogliamo concludere che i coefficienti sono tutti nulli, $a_1 = \ldots = a_k = b_1 = \ldots = b_m = c_1 = \ldots = c_n = 0$. A tale scopo, denotiamo con $v = a_1v_1 + \ldots + a_kv_k$, con $u = b_1u_1 + \ldots + b_mu_m$ e con $w = c_1w_1 + \ldots + c_nw_n$. Quindi la (7) diventa

$$v + u + w = 0 \,. \tag{8}$$

Adesso osserviamo che $w \in W$ e che $v + u \in U$. Dalla (8) segue che $w = -v - u \in U$, quindi $w \in U \cap W$. Da questo segue che $c_1 = \ldots = c_n = 0$, e di conseguenza abbiamo che $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k + b_1u_1 + \ldots + b_mu_m = 0$. Poiché $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m$ sono linearmente indipendenti, concludiamo che $a_1 = \ldots = a_k = b_1 = \ldots = b_m = 0$. □

Proposizione 11. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo K. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V. Allora esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che*

$$V = U \oplus W \,.$$

Dim. Poiché V è finitamente generato, lo è anche U, quindi ha una base finita $\{u_1, \dots, u_m\}$. I vettori $u_1, \dots, u_m$, considerati come vettori di V, sono linearmente indipendenti, quindi dalla Proposizione 7 esiste una base $\mathcal{B}$ di V che contiene $u_1, \dots, u_m$. Sia essa $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$. Allora basta porre $W := \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n)$. Osserviamo che $U \cap W = \{0\}$ e che $V = U + W$, quindi $V = U \oplus W$. $\square$