Corso di ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

Foglio di esercizi n. 3

1. Sia
$$f = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 \in \mathbb{R}[x, y]$$
un polinomio di grado 2 a coefficienti reali, e sia
$$F = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4xz + a_5yz + a_6z^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$$
la forma omogenea di f (chiamato anche l'omogeneizzato di f). Denotiamo con $V_{\mathbb{R}}(f) := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid f(\xi, \eta) = 0\}$.

Si dimostri che $V_{\mathbb{R}}(f)$ è un cerchio (eventualmente a punti non reali) se e solo se
$$V(F) \cap V(z) = \{[i : 1 : 0], [-i : 1 : 0]\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,.$$

2. Sia $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ un polinomio omogeneo. Siano $g, h \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tali che $f = g \cdot h$. Si dimostri che g ed h sono omogenei.

3. Sia $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \neq \{0\}$ un polinomio omogeneo. Sia $M = (m_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$ una matrice invertibile. Si consideri il polinomio
$$(f \circ M)(x_1, \ldots, x_n) = f(\sum_{j=1}^{n} m_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} m_{nj}x_j) \in K[x_1, \ldots, x_n]\,.$$
Si dimostri le seguenti affermazioni.

i) $f \circ M$ è omogeneo di grado $\deg(f \circ M) = \deg(f)$.

ii) $f \circ M$ è irriducibile se e solo se f è irriducibile.

iii) Sia $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ la decomposizione di f in fattori irriducibili, allora $f_i \circ M$, per $i = 1, \ldots, r$, sono i fattori irriducibili di $f \circ M$.

4. Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ due curve algebriche proiettive. Si provi che $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$.

5. Nello spazio proiettivo complesso con coordinate omogenee $[x : y : z]$ si determinino i punti di intersezione delle seguenti curve proiettive:
$$\mathcal{C}_1 = V(x + y - z)\,, \quad \mathcal{C}_2 = V(x^2 - 2yz) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,.$$