28 ottobre

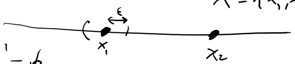
Def$^{\text{ne}}$ $X \subseteq \mathbb{R}$ un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice di accumulazione per X

se $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X \ \text{t.c.} \quad 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon}$

Esercizio Se $X \subseteq \mathbb{R}$ ha un numero finito di elementi, allora

$X' = \emptyset$

$X = \{x_1, x_2\}$



Dimostriamo che $X' = \emptyset$

Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista $\bar{x} \in X'$.

Supponiamo inizialmente che $\bar{x} \in X$, per esempio sia

$\bar{x} = x_1 \in X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Considero $\min\{|x_1 - x_2|, \dots, |x_1 - x_n|\} > 0$

sia $0 < \varepsilon < \min\{|x_1 - x_2|, \dots, |x_1 - x_n|\}$

Siccome $x_1 \in X'$ per questo particolare $\varepsilon > 0$

$\exists\, x \in X$ t.c. $0 < |x - x_1| < \varepsilon$

Cioè esiste un indice $j_0 \in \{2, \dots, n\}$ t.c.

$0 < |x_{j_0} - x_1| < \varepsilon < \min\{|x_1 - x_2|, \dots, |x_1 - x_n|\} \le |x_1 - x_{j_0}|$

Concludiamo $|x_{j_0} - x_1| < |x_1 - x_{j_0}|$ Assurdo

Conclusione. Non esiste $\bar{x} \in X'$ t.c. $\bar{x} \in X$

Quindi, se $\bar{x} \in X' \Rightarrow \bar{x} \notin X$.

Se definisco $Y = \{\bar{x}\} \cup X =$ $(Y \supseteq X)$ $\Downarrow$

$= \{\bar{x}, x_1, \dots, x_n\} \Longrightarrow Y' \supseteq X'$

(lo dimostriamo fra poco)

Ma allora

$\bar{x} \in Y'$ $\quad \bar{x} \in Y$. Abbiamo appena visto

che questo non è possibile.

Esercizio $\emptyset \neq X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad Y' \supseteq X'$$

$\bar{x} \in X' \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in Y$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$

$\Rightarrow \bar{x} \in Y'$

$\varepsilon_0 > 0$

Esercizio $X \subseteq \mathbb{R}$

$\bar{x} \in X'$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \ \exists x \in X$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$

$A \subset \mathbb{R}_+$ $\quad \inf A = 0$

$\forall \varepsilon \in A \ \exists x \in X$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$

Es $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$

$= \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 2, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf A = 0$ $\qquad A = f(\mathbb{N})$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(n) = \frac{1}{n}$

f è decrescente $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$= \inf f(\mathbb{N}) = \inf A$

Per inciso $\inf A = \inf \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 2 \right\} = 0 \in \left\{ \frac{1}{n} ; n \geq 2 \right\}'$

Infatti sappiamo $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ t.c. $n > N_\varepsilon \Rightarrow 0 < \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow 0 \in \left\{ \frac{1}{n} ; n \geq 2 \right\}'$

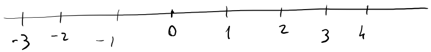
Esercizio

ipotesi

1) Se $X \subseteq \mathbb{R}$, $\inf X > -\infty$ e non è un minimo, allora $\underbrace{\inf X \in X'}_{\text{tesi}}$.

2) Se $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X < +\infty$ e non è un massimo, allora $\sup X \in X'$.

Es $(\mathbb{Z})' = \emptyset$



se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è $\bar{x} \in (\mathbb{Z})'$ allora

$\forall\, \varepsilon \in (0,1)\ \exists\ n \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 < |n - \bar{x}| < \varepsilon$

Ma allora $\bar{x} \in (\mathbb{Z} \cap (\bar{x}-1, \bar{x}+1))'$

Ma $\mathbb{Z} \cap (\bar{x}-1, \bar{x}+1)$ ha al massimo 3 elementi

$[\bar{x}]-1 \le \bar{x} - 1 < [\bar{x}] \le \bar{x} \le [\bar{x}] + 1 \le \bar{x} + 1$

$[\bar{x}] \le \bar{x} < [\bar{x}] + 1$

$[\bar{x}]-1 \le \bar{x} - 1 < [\bar{x}] < [\bar{x}]+1 \le \bar{x}+1$

$(\bar{x}-1, \bar{x}+1) \cap \mathbb{Z}$ ~~può~~ consiste di un insieme contenente $[\bar{x}]$ sempre e $[\bar{x}]+1$ se $\bar{x} \notin \mathbb{Z}$.

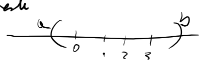
Quindi, al massimo, $(\bar{x}-1, \bar{x}+1) \cap \mathbb{Z}$ ha due elementi

$$\Longrightarrow \quad ((\bar{x}-1, \bar{x}+1) \cap \mathbb{Z})' = \emptyset$$

Def $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice discreto se $\forall\, (a,b)$ $-\infty < a < b < +\infty$ risulta che

$X \cap (a,b)$ è un insieme con al più un numero finito di elementi

Esempio $\mathbb{Z}$ è discreto



Esercizio Se X è discreto allora $X' = \emptyset$.

$\frac{1}{n}$