Lezione 9

Proposizione Se $\mathcal{B}_X$ è base per X e $\mathcal{B}_Y$ è base per Y
$\Rightarrow$ $\mathcal{B} := \{ B \times D \mid B \in \mathcal{B}_X \text{ e } D \in \mathcal{B}_Y \}$
è base per $X \times Y$.

Dim i) gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti in $X \times Y$ per definizione della topologia prodotto.

ii) $\forall\, W \subset X \times Y$ aperto, $\forall\, (x,y) \in W$
$\exists\, U \subset X$, $V \subset Y$ aperti t.c. $(x,y) \in U \times V \subset W$
$\Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}_X$, $D \in \mathcal{B}_Y$ t.c. $x \in B \subset U$ e
$y \in D \subset V$ $\Rightarrow (x,y) \in B \times D \subset U \times V \subset W$.

Corollario X e Y II-numerabili $\Rightarrow$ $X \times Y$ II-numerabile.

Teorema X e Y metrizzabili $\Rightarrow$ $X \times Y$ metrizzabile.

Dim $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ e $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$
distanze che inducono le rispettive topologie
$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\left(d_X(x_1,x_2),\, d_Y(y_1,y_2)\right)$$

è una distanza su $X \times Y$ e mostriamo che induce la topologia prodotto, cioè

$$\mathcal{B}_d = \{ B_d((x,y); r) \mid (x,y) \in X \times Y,\ r > 0 \}$$

è base per la topologia prodotto.

i) $(u,v) \in B_d((x,y);r) \iff d((u,v),(x,y)) < r \iff$
$d_X(u,x) < r$ e $d(v,y) < r \iff$
$(u,v) \in B_{d_X}(x;r) \times B_{d_Y}(y;r)$
$\Rightarrow B_d((x,y);r) = B_{d_X}(x;r) \times B_{d_Y}(y;r)$ aperto.

ii) è facile vedere che $\forall\, U \subset X$, $V \subset Y$ aperti,
$\forall\, (x,y) \in U \times V$, $\exists\, r > 0$ t.c. $(x,y) \in B_d((x,y);r) \subset U \times V$.

<u>OSS</u> Il teorema si generalizza subito a prodotti finiti.
Si può dimostrare che vale anche per prodotto <u>numerabile</u> di spazi metrizzabili, ma è falso per prodotto più che numerabile.

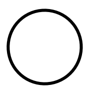
<u>OSS</u> 1) $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$: la topologia Euclidea e la topologia prodotto coincidono dato che sono indotte da distanze equivalenti.

2) $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$.

3) $\forall\, f : X \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$
f continua $\iff f_1, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$ continue.

<u>Def</u> $\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ definiamo il <u>toro n-dimensionale</u> (o <u>n-toro</u>) $T^n := \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}}$

<u>OSS</u> T^n è metrizzabile e II-numerabile.

<u>Es</u> $T^1 = S^1$ 

$S^1 \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$

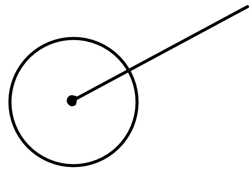
$\boxed{T^m \times T^n = T^{m+n}}$

Mostreremo che $T^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ per induzione su $n \geq 1$

- Vero per $n=1$ $(S^1 \subset \mathbb{R}^2)$ (base dell'induzione)
- Supponiamo che $T^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (ipotesi induttiva)

Consideriamo immersione $f : T^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

$\varphi :]0,+\infty[\times S^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 - \{0\}$ omeo



$$\varphi(t,u) = tu$$

$$\mathbb{R} \cong]0,+\infty[$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{R}^n \times S^1 \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times S^1 \cong \mathbb{R}^{n-1} \times]0,+\infty[\times S^1 \cong$$
$$\cong \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} T^n = T^{n-1} \times S^1 \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\tilde{f}"'] & \mathbb{R}^n \times S^1 \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$
$$(x,u) \mapsto (f(x),u)$$

$\tilde{f}$ composizione di immersioni $\Rightarrow \tilde{f}$ immersione.

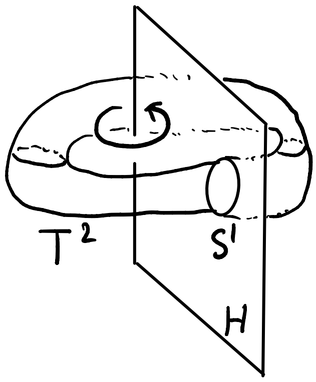
Cosa accade? Visualizziamolo

per $n=2$ $(T^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3)$

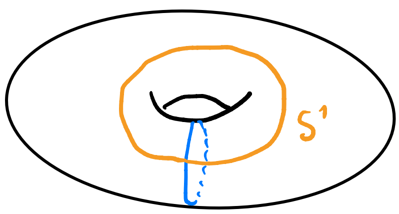
Un semipiano (senza origine)

$H \cong \mathbb{R}^2$ ruota intorno all'asse

e $S^1 \subset H$ descrive T^2.



$\rightsquigarrow$



Compattezza

Nel seguito A denoterà un insieme di indici arbitrario.

Def Sia X uno spazio topologico. Un <u>ricoprimento aperto</u> di X è una famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di sottoinsiemi aperti $U_\alpha \subset X$ $\forall \alpha \in A$ t.c.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X.$$

Se $A' \subset A$ diciamo che $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ è un <u>sottoricoprimento</u> (aperto) di $\mathcal{U}$ per X se

$$\bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha = X.$$

Es 1) $\mathcal{U} = \{B(0;n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ricoprimento aperto di $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{U}' = \{B(0;2n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sottoricoprimento di $\mathcal{U}$.

2) $\mathcal{V} = \{[n, n+1[\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ricoprimento aperto di $\mathbb{R}_e$

non ammette sottoricoprimenti propri.

Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è ricoprimento aperto di X, un sottoricoprimento finito è determinato da un sottoinsieme finito $A' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset A$, cioè $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ t.c.

$$U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} = X.$$

La definizione seguente è molto importante!

Def Uno spazio topologico X è compatto se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di X ammette un sottoricoprimento finito, cioè $\exists\, k \in \mathbb{N}$ e $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ t.c. $X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$.

Es 1) X_{ban} compatto $\forall$ insieme X

2) X finito $\Rightarrow$ X compatto

3) X_{dis} compatto $\Leftrightarrow$ X_{dis} finito : $\{\{x\}\}_{x \in X}$

4) X_{cof} compatto $\boxed{E}$

5) $\mathbb{R}^n$ non compatto $\forall\, n \geq 1$: $\{B(0; n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

6) $\mathbb{R}_e$ non compatto : $\{[n, n+1[\}_{n \in \mathbb{Z}}$

OSS La compattezza è una proprietà topologica non ereditaria. $\boxed{E}$

Proposizione Sia $\mathcal{B}$ una base per X. Allora X è compatto $\Leftrightarrow$ $\forall\, \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto basico (cioè $U_\alpha \in \mathcal{B}$ $\forall\, \alpha \in A$) ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ evidente

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, \mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X $\Rightarrow$ $\forall\, \alpha \in A$ $\exists\, I_\alpha$ insieme di indici e $\exists\, B_{\alpha,i} \in \mathcal{B}$ $\forall\, i \in I_\alpha$ t.c. $V_\alpha = \bigcup_{i \in I_\alpha} B_{\alpha,i}$ $\Rightarrow$ $\{B_{\alpha,i}\}_{\substack{\alpha \in A \\ i \in I_\alpha}}$ ricoprimento aperto di X $\Rightarrow$ $\exists\, \{B_{\alpha_1,i_1}, \dots, B_{\alpha_k,i_k}\}$ sottoricoprimento $\Rightarrow$ $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_k}\}$ sottoricoprimento di $\mathcal{V}$.