Lezione 10

Teorema $[0,1]$ è compatto (con la topologia Euclidea).

Dim $\mathcal{B} = \{]a,b[\cap [0,1] \mid a<b \}$ base di intervalli

Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto basico : $U_\alpha \in \mathcal{B} \ \forall \alpha \in A$

$$T := \{ t\in[0,1] \mid \exists k \in \mathbb{N}, \exists \alpha_1,\dots,\alpha_k \in A, [0,t] \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \}$$

cioè $t \in T \iff [0,t]$ finitamente ricoperto da aperti di $\mathcal{U}$

1) $0 \in T \neq \emptyset$ dato che $\exists \alpha_0 \in A$ t.c. $0 \in U_{\alpha_0}$

2) $s := \sup T = 1$: per assurdo supponiamo $s<1$ ma $\exists \alpha \in A$ t.c.

$s \in U_\alpha \Rightarrow \exists s' > s, s' \in U_\alpha, \exists t \in U_\alpha \cap T \Rightarrow [t,s'] \subset U_\alpha$

$s = \sup T$ intervallo

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \exists \alpha_1,\dots,\alpha_k \in A$ t.c. $[0,t] \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \Rightarrow$

$[0,s'] = [0,t] \cup [t,s'] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} \cup U_\alpha \Rightarrow s' \in T$

contraddizione.

3) $1 \in T$: dal passo (2), usando s al posto di s', si ottiene

$1 = s \in T$.

Quindi $T = [0,1]$ finitamente ricoperto da aperti di $\mathcal{U}$.

OSS $]0,1[\cong \mathbb{R}$ non è compatto

Teorema Se X è compatto e $Y \subset X$ è chiuso $\Rightarrow Y$ compatto.

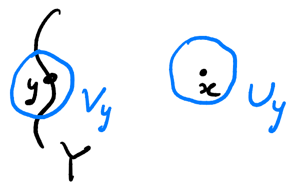
Dim $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow \forall \alpha \in A \ \exists \tilde{U}_\alpha \subset X$ aperto t.c. $U_\alpha = \tilde{U}_\alpha \cap Y \Rightarrow \tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{X-Y\}$ ricoprimento aperto di $X \Rightarrow \exists \{\tilde{U}_{\alpha_1},\dots,\tilde{U}_{\alpha_k}, X-Y\}$ sottoricoprimento di $\tilde{\mathcal{U}} \Rightarrow \{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_k}\}$ sottoricoprimento di $\mathcal{U}$.

NB $Y \subset X$ spazi compatti $\not\Rightarrow$ Y chiuso

ES $X = \mathbb{R}_{ban}$, $Y = \{0\} \subset X$ compatto non chiuso

Teorema (importante) Sia $Y \subset X$. Se X è di Hausdorff e Y è compatto $\Rightarrow$ Y è chiuso in X.

Dim $\forall x \in X - Y$, $\forall y \in Y$ $\exists\, U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $U_y \cap V_y = \phi$, $x \in U_y$, $y \in V_y$ (X è T_2)



$\mathcal{V} = \{ V_y \cap Y \}_{y \in Y}$ ricoprimento aperto di Y $\Rightarrow$

$\exists$ sottoricoprimento finito $\{ V_{y_1} \cap Y, \dots, V_{y_k} \cap Y \}$ $\Rightarrow$

$V := \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$ aperto in X e $Y \subset V$

$U := \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$ aperto in X e $x \in U$

$\Rightarrow$ $U \cap Y \subset U \cap V = \phi$ $\Rightarrow$ $x \in U \subset X - Y$

Quindi $X - Y$ è aperto $\Rightarrow$ Y chiuso.

Teorema (importante) Sia $f : X \to Y$ continua e suriettiva. Se X è compatto allora Y è compatto.

Dim $\mathcal{V} = \{ V_\alpha \}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di Y $\rightsquigarrow$ $U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$

$\mathcal{U} = \{ U_\alpha \}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X $\Rightarrow$

$\exists$ $\{ U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k} \}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per X

$\{ V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_k} \}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ per Y

Infatti $f(U_{\alpha_i}) = V_{\alpha_i}$ e $\bigcup_{i=1}^{k} V_{\alpha_i} = f\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \right) = f(X) = Y$

f suriettiva

Corollario X compatto e $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow$ $f(X)$ compatto (come sottospazio di Y).

OSS In altre parole: l'immagine continua di un compatto è compatta.

Teorema (importante) Sia $f : X \to Y$ continua e biiettiva. Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora f è un omeomorfismo.

Dim Basta dimostrare che f è aperta $\overset{\text{biiettiva}}{\Longleftrightarrow}$ f è chiusa

$C \subset X$ chiuso $\underset{X \text{ cpt}}{\Rightarrow}$ C compatto $\Rightarrow$ $f(C)$ compatto

$\underset{Y\ T_2}{\Rightarrow}$ $f(C)$ chiuso in Y

NB È uno dei migliori metodi per dimostrare che una mappa è omeo.

Corollario Sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva. Se X è compatto e Y è di Hausdorff allora f è un'immersione.