2 Novembre

La volta scorsa abbiamo dimostrato $(\mathbb{Z})' = \emptyset$

Basta infatti dimostrare che non esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c.

(*) $\forall \boxed{\varepsilon \in (0,1)}$ $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 < |\bar{x} - n| < \varepsilon$.

$\varepsilon \in X = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$

$\bar{x} \in (\mathbb{Z})' \iff \bar{x} \in (\mathbb{Z} \cap (\bar{x}-1, \bar{x}+1))'$

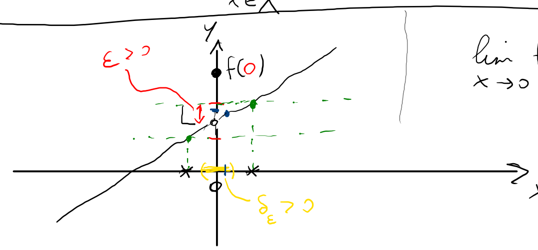
Ma $\mathbb{Z} \cap (\bar{x}-1, \bar{x}+1)$ ha al più 2 elementi

$[\bar{x}], [\bar{x}]+1 \Rightarrow (\mathbb{Z} \cap (\bar{x}-1, \bar{x}+1))' = \emptyset$

Def Sia $f: X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$, e sia $\bar{x} \in X'$, sia $L \in \mathbb{R}$, allora scriviamo

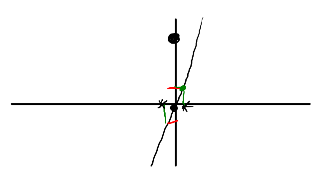
$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ se è soddisfatto

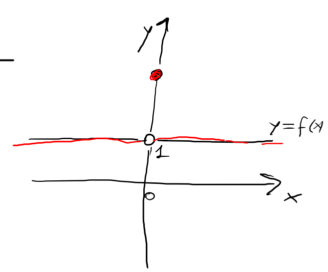
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \underset{x \in X}{0 < |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$



$\lim_{x \to 0} f(x) = L$

$L = 0$





$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$

Dobbiamo verificare che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon}$$

Sappiamo che $f(x) = 1$, $\forall x \neq 0 \iff |f(x) - 1| = 0 \ \forall x \neq 0$.

possiamo scegliere $\delta_\varepsilon = 1$

Allora per $0<|x|<\delta_\varepsilon = 1 \Rightarrow |f(x)-1| = 0 < \varepsilon$

e questo $\forall \varepsilon > 0$. Quindi abbiamo ~~$\forall \varepsilon >$~~ dimostrato che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad 0<|x|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$$

Per dimostrare il limite utilizziamo

$$(*) \qquad \big|\, |x| - |x_0| \,\big| \leq |x - x_0| \qquad \forall\, x, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$(*) \iff -|x-x_0| \leq |x| - |x_0| \leq |x - x_0|$$

$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| \iff |x| \leq |x - x_0| + |x_0|$ ma questo è vero

$$|x| = |(x - x_0) + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0|$$

$$-|x-x_0| \leq |x| - |x_0| \iff |x_0| \leq |x| + |x - x_0|$$

$$|x_0| = |(x_0 - x) + x| \leq |x_0 - x| + |x| = |x - x_0| + |x|$$

Quindi abbiamo dimostrato

$$(*) \qquad \big|\, |x| - |x_0| \,\big| \leq |x - x_0| \qquad \forall\, x, x_0 \in \mathbb{R}$$

Ora vogliamo $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$

$$(1) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big|\, |x| - |x_0| \,\big| < \varepsilon}$$

$\delta_\varepsilon = \varepsilon$ funziona, perché

$$\varepsilon > |x - x_0| \geq \big|\, |x| - |x_0| \,\big|$$

(1) è vero per $\boxed{\delta_\varepsilon = \varepsilon}$

Abbiamo dimostrato che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$$

<u>Def</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X \cap X'$ ed $f: X \to \mathbb{R}$. Allora diciamo che f e' continua nel punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

E se questo e' vero per tutti i punti in $X \cap X'$ allora diciamo che f e' continua in X.

<u>Esempio</u> $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$ $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |x|$ e' continua in $\mathbb{R}$

Denotiamo con $C^0(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ e continue in $\mathbb{R}$.

$X \subseteq \mathbb{R}$, $C^0(X)$ è l'insieme delle funzioni definite in X continue in X.

Esercizio Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in X \cap X'$

Dimostrare che f è continua in x_0 se e solo se vale:

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ricordo $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Def Un punto $x_0 \in X^{\subseteq \mathbb{R}}$ t.c. $x_0 \notin X'$ si dice isolato in X

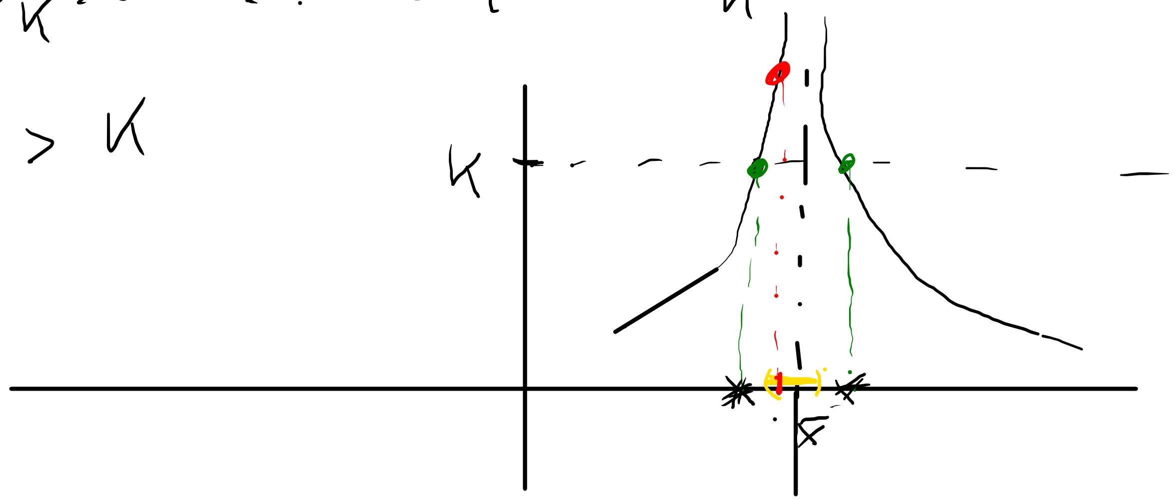
Esercizio Dimostrate che per una qualsiasi $f : X \to \mathbb{R}$ e per un qualsiasi $x_0 \in X$ isolato la (2) è vera

Def Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X'$, allora scriviamo

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$

$\forall K > 0 \ \exists \delta_K > 0$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \delta_K$ e $x \in X$

$\Rightarrow \quad f(x) > K$



Es $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ $\qquad K > 0$

$$\frac{1}{|x|} > K \iff |x| < \frac{1}{K}$$

$\Rightarrow \quad \delta_K = \frac{1}{K}$ segue che

$$0 < |x| < \delta_K = \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > K$$

Abbiamo dimostrato che

$$\forall K > 0 \ \exists \underset{= \frac{1}{K}}{\delta_K} \ \text{t.c.} \ 0 < |x| < \delta_K \Rightarrow \frac{1}{|x|} > K$$

Teor Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

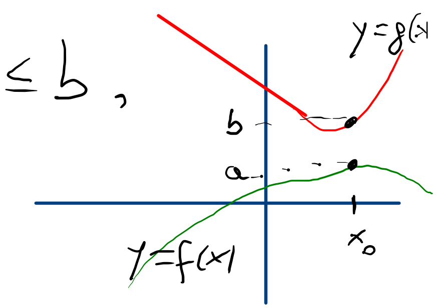
Siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

- $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = a + b$ salvo che $(a,b) = \begin{cases} (+\infty, -\infty) \\ (-\infty, +\infty) \end{cases}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = a\, b$ salvo $(a,b) = \begin{cases} (0, \pm\infty) \\ (\pm\infty, 0) \end{cases}$
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ per $b \neq 0$, salvo $(a,b) = (\pm\infty, \pm\infty)$

Teor $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$

Sia $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$. Allora $a \leq b$.

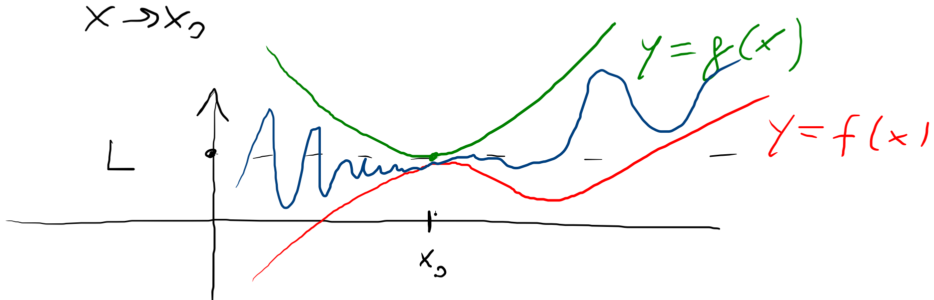


Teor (confr) $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

Sia $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$.

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$



Esempio $\sin x$ e $\cos x \in C^0(\mathbb{R})$

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$$

1) $\lim_{x \to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$ Continuità del $\sin(x)$ in 0

Abbiamo bisogno $\boxed{|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \ (3)}$

Assumiamo (3).

E' equivalente a $-|x| \leq \sin x \leq |x|$

$$-|x| \xrightarrow{x \to 0} 0 \qquad |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

e quindi $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

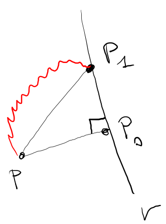
Verifichiamo

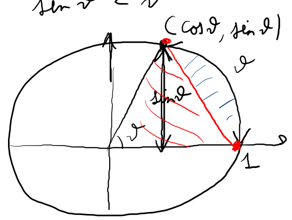
$$\boxed{|\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (3)}$$

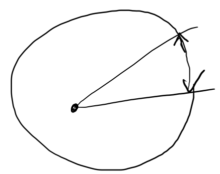
Incominciamo considerando $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Dimostriamo

$$\sin \vartheta < \vartheta \qquad \forall \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$







$$\text{Area (triangolo)} = \frac{\sin\vartheta}{2}$$

$$\text{Area (settore circolare)} = \frac{\vartheta}{2}$$

$$0 < \frac{\sin\vartheta}{2} < \frac{\vartheta}{2} \iff \sin\vartheta < \vartheta \quad \forall\, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x \leq x \qquad \forall\, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

Per $x \geq \frac{\pi}{2}$ è vero che $\sin x \leq x$?

E' vero perché

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x \qquad \forall\, x \geq \frac{\pi}{2}$$

Pertanto $\quad |\sin x| \leq x \qquad \forall\, x \geq 0$

$$\implies \quad |\sin x| \leq |x| \qquad \forall\, x \geq 0$$

Siccome $|\sin x|$ e $|x|$ sono funzioni pari

segue che $\quad |\operatorname{sen} x| \leq |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Qui ho usato $|-x| = |x|$

$$|\sin(-x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$$

Dimostriamo $\quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos(0)$

Utilizzerò $\quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \iff \lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0 \implies \lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = \lim_{x\to 0}(-1)(1-\cos x)$$

$$= -1 \cdot 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{(\cos x - 1)}_{\to 0} + \underbrace{1}_{\to 1}\right] = 0 + 1 = 1$$

Dimostro $\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$ $\qquad |x| < \frac{\pi}{2}$

$$1-\cos x = (1-\cos x)\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} =$$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$$= \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \le \sin^2 x$$

Ho dimostrato che per $|x| \le \frac{\pi}{2}$

$\cos x > 0$

$$\implies \frac{1}{1+\cos x} < 1$$

$$\implies \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} < \sin^2 x$$

$$0 \le 1-\cos(x) \le \sin^2(x)$$

$x\to 0$: $\quad 0 \to 0$, $\quad \sin^2(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$

$$\implies \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$$

Ora verifichiamo $\lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$

$\sin x = \sin(h+x_0)$

$x = h + x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\sin x = \lim_{h\to 0}\sin(h+x_0)$$

$$= \sin(h)\cos(x_0) + \cos(h)\sin(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\sin(h+x_0) = \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{\sin(h)}_{\to 0}\cos(x_0) + \underbrace{\cos(h)}_{\to 1}\sin(x_0)\right]$$

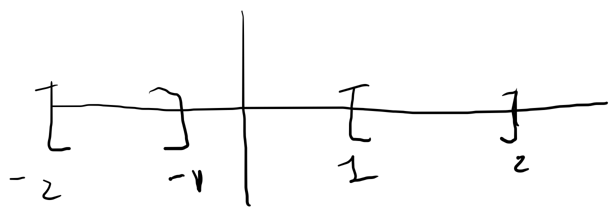
$$= \sin(x_0)$$

In modo analogo $\lim_{x\to x_0}\cos(x) = \cos(x_0)$

$-X$

$X \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad -X = \{-x : x \in X\}$

$* \quad \inf X = -\sup(-X)$



Devo dimostrare

1) $x \geq -\sup(-X) \quad \forall x \in X$

2) $x \geq M \ \forall x \in X \Rightarrow M \leq -\sup(-X)$

$\Rightarrow *$

$x \geq -\sup(-X) \quad \forall x \in X \iff -x \leq \sup(-X) \quad \forall x \in X$

$\iff y \leq \sup(-X) \quad \forall y \in -X$

$y = -x$