

# Complementi per il corso di Analisi 1

Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2022/2023

## 1 La funzione esponenziale

Vogliamo dimostrare il seguente

**Teorema.** *Dato  $a > 0$ , esiste un'unica funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  tale che, per ogni  $x_1, x_2$ ,*

$$(i) f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2),$$

$$(ii) f(1) = a.$$

*Se inoltre  $a \neq 1$ , tale funzione è invertibile.*

Premettiamo alcune considerazioni, nell'ipotesi che il teorema sia stato verificato. La funzione  $f$  si chiama "esponenziale di base  $a$ " e si denota con  $\exp_a$ . Se  $a \neq 1$ , la funzione inversa  $f^{-1} : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  si chiama "logaritmo di base  $a$ " e si denota con  $\log_a$ . Si ha quindi, per  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in ]0, +\infty[$ ,

$$\exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y).$$

Dalle proprietà dell'esponenziale

$$(i) \exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \exp_a(x_2),$$

$$(ii) \exp_a(1) = a,$$

seguono le corrispondenti proprietà del logaritmo

$$(i') \log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2),$$

$$(ii') \log_a(a) = 1.$$

Siccome la funzione costante  $f(x) = 1$  verifica a) e b) con  $a = 1$ , si ha che  $f = \exp_1$ ; in altri termini,  $\exp_1(x) = 1$  per ogni  $x$ .

Vediamo dapprima alcune proprietà della funzione esponenziale. Notiamo che  $\exp_a(1) = a^1$ ,

$$\exp_a(2) = \exp_a(1 + 1) = \exp_a(1) \exp_a(1) = a \cdot a = a^2,$$

e, come si può vedere per induzione,

$$\exp_a(n) = a^n,$$

per ogni  $n \geq 1$ . Inoltre, siccome  $\exp_a(1) = \exp_a(1 + 0) = \exp_a(1) \exp_a(0)$ , si ha che  $\exp_a(0) = 1$ . Per queste analogie con le potenze, spesso si scrive  $a^x$  invece di  $\exp_a(x)$ .

Se scriviamo

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp_a\left(\frac{1}{2}\right) \exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2,$$

si vede che, essendo l'esponenziale positivo,

$$\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a}.$$

Si verifica poi per induzione che, per ogni  $n \geq 1$ ,

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n,$$

e in particolare

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(n \frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Pertanto,  $\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)$  risolve l'equazione  $x^n = a$ . Tale  $x$  è la "radice  $n$ -esima di  $a$ " e si scrive  $x = \sqrt[n]{a}$ : si ha quindi

$$\exp_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a},$$

e pertanto, se  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \exp_a\left(m \frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Notiamo che, se  $b = \sqrt[n]{a}$ , si ha  $a^m = (b^n)^m = b^{nm} = (b^m)^n$ , da cui  $b^m = \sqrt[n]{a^m}$ . Possiamo quindi anche scrivere

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}.$$

Scrivendo

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(x - x) = \exp_a(x) \exp_a(-x),$$

vediamo che vale inoltre la formula

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}.$$

Enunciamo infine le seguenti tre proprietà dell'esponenziale:

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}, \quad (a^y)^x = a^{yx}.$$

La prima segue dal fatto che la funzione  $f(x) = a^x b^x$  verifica la proprietà (i) e  $f(1) = ab$ , per cui  $f = \exp_{ab}$ . La seconda è analoga, prendendo  $f(x) = \frac{1}{a^x}$ ; per la terza, si prenda  $f(x) = a^{yx}$ .

Concludiamo con due utili proprietà del logaritmo:

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \quad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Verifichiamo la prima: poniamo  $u = \log_a(x^y)$  e  $v = \log_a(x)$ . Allora  $a^u = x^y$  e  $a^v = x$ , da cui  $a^u = (a^v)^y = a^{vy}$ . Ne segue che  $u = vy$ , che è quanto volevamo dimostrare. Un procedimento analogo permette di verificare anche la seconda.

## 1.1 La costruzione - primo passo

Ci proponiamo di costruire la funzione  $f$  avente le proprietà dell'enunciato. Innanzitutto, viene fissato un numero reale  $a > 0$ , che sarà la "base" della funzione esponenziale  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  che vogliamo costruire. Se  $a = 1$ , la costruzione è immediata: basta prendere la funzione costante  $f(x) = 1$ . Supporremo quindi  $a \neq 1$ .

Iniziamo definendo la funzione sull'insieme

$$F = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

che è denso in  $\mathbb{R}$ . Nel caso in cui  $m = 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ , possiamo definire

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

per induzione. Se  $n = 0$ , poniamo  $f(1) = a$ . Supponendo di averla definita per un certo  $n \in \mathbb{N}$ , poniamo

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{f\left(\frac{1}{2^n}\right)}.$$

Si noti l'uguaglianza

$$\left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n} = a,$$

verificabile per induzione. Poniamo ora

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^m,$$

con  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Verifichiamo che è una buona definizione. Siano  $m, n$  e  $m', n'$  tali che  $\frac{m}{2^n} = \frac{m'}{2^{n'}}$ : se, per esempio,  $n' \geq n$ , si vede che

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{2^{n'-n}},$$

e perciò

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^n}\right)^m = \left(f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{2^{n'-n}}\right)^m = f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{m2^{n'-n}} = f\left(\frac{1}{2^{n'}}\right)^{m'} = f\left(\frac{m'}{2^{n'}}\right).$$

Quindi,  $f$  è ben definita su  $F$ , a valori positivi. Ne evidenzieremo alcune proprietà.

**Proprietà 1.** Si ha

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2), \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in F.$$

Infatti, dati  $x_1 = \frac{m}{2^n}$  e  $x_2 = \frac{m'}{2^n}$  (li possiamo prendere con lo stesso denominatore), si ha

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{2^n} + \frac{m'}{2^n}\right) &= f\left(\frac{m+m'}{2^n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{m+m'} \\ &= \left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^m \left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{m'} = f\left(\frac{m}{2^n}\right) f\left(\frac{m'}{2^n}\right). \end{aligned}$$

**Proprietà 2.** Se  $a > 1$ , allora  $f$  è strettamente crescente.

In questo caso, infatti, si ha che  $f(x) > 1$  per ogni  $x \in F$  positivo. Ne segue che

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1)f(x_2 - x_1) > f(x_1).$$

In modo analogo si vede che, se  $a < 1$ , allora  $f$  è strettamente decrescente.

**Proprietà 3.** La funzione  $f : F \rightarrow ]0, +\infty[$  è continua. Più precisamente:

*per ogni  $N \geq 1$  e ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che,  
presi  $x_1, x_2 \in F \cap [-N, N]$ ,  $d(x_1, x_2) \leq \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$ .*

Per dimostrare questa affermazione, supponiamo  $a > 1$  e vediamo dapprima che è

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ ; sia  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\bar{n} \geq (a-1)/\varepsilon$ . Allora, per ogni  $n \geq \bar{n}$ ,

$$\left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n} = a \leq 1 + n\varepsilon \leq 1 + 2^n\varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^{2^n},$$

per cui

$$1 < f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq 1 + \varepsilon.$$

Ne segue l'affermazione, essendo  $f$  crescente.

Dimostriamo ora la Proprietà 3, sempre per  $a > 1$ . Fissiamo un intero  $N \geq 1$  e un  $\varepsilon > 0$ . Per quanto visto sopra, esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad 1 < f(x) < 1 + \frac{\varepsilon}{f(N)}.$$

Allora, presi  $x_1, x_2 \in F \cap [-N, N]$  tali che  $x_1 < x_2$  e  $x_2 - x_1 \leq \delta$ , si ha

$$0 < f(x_2) - f(x_1) = f(x_1)(f(x_2 - x_1) - 1) < f(N) \frac{\varepsilon}{f(N)} = \varepsilon.$$

Se  $a < 1$ , la dimostrazione è analoga.

## 1.2 Funzioni uniformemente continue

Siano  $E$  ed  $E'$  due spazi metrici qualunque. Una funzione  $f : E \rightarrow E'$  si dice *uniformemente continua* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Enunciamo un importante teorema di estensione.

**Teorema.** *Sia  $F$  un sottoinsieme denso in  $E$ , e sia  $E'$  completo. Se  $f : F \rightarrow E'$  è uniformemente continua, allora esiste un'unica funzione continua  $\tilde{f} : E \rightarrow E'$  la cui restrizione a  $F$  coincide con  $f$ .*

Dimostrazione. Prendendo  $x \in E$ , esiste una successione  $(x_n)_n$  in  $F$  tale che  $x_n \rightarrow x$ . Siccome  $f$  è uniformemente continua e  $(x_n)_n$  è una successione di Cauchy, si vede che anche  $(f(x_n))_n$  è di Cauchy. Essendo  $E'$  completo, esiste un  $y \in E'$  tale che  $f(x_n) \rightarrow y$ . Definiamo  $\tilde{f}(x) = y$ .

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Se  $(\tilde{x}_n)_n$  è un'altra successione in  $F$  tale che  $\tilde{x}_n \rightarrow x$ , allora  $d(x_n, \tilde{x}_n) \rightarrow 0$ , e siccome  $f$  è uniformemente continua, si ha che  $d(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \rightarrow 0$ . Ne segue che  $(f(\tilde{x}_n))_n$  ha lo stesso limite di  $(f(x_n))_n$ , e la definizione di  $\tilde{f}$  è consistente.

Chiaramente, la funzione  $\tilde{f}$  così definita estende  $f$ , siccome, se  $x \in U$ , possiamo prendere la successione  $(x_n)_n$  costantemente uguale a  $x$ . Dimostriamo che  $\tilde{f}$  è (uniformemente) continua. Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che, prendendo  $u, v \in F$ ,

$$d(u, v) \leq 2\delta \quad \Rightarrow \quad d(f(u), f(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se  $x, y$  sono due punti in  $E$  tali che  $d(x, y) \leq \delta$ , possiamo prendere due successioni  $(x_n)_n$  e  $(y_n)_n$  in  $F$  tali che  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ . Allora, per  $n$  sufficientemente grande,

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &\leq d(\tilde{f}(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), \tilde{f}(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

il che dimostra che  $\tilde{f}$  è uniformemente continua.

Per concludere, sia  $\hat{f} : E \rightarrow E'$  una qualsiasi funzione continua che estende  $f$ . Allora, per ogni  $x \in E$ , prendendo una successione  $(x_n)_n$  in  $F$  tale che  $x_n \rightarrow x$ ,

$$\hat{f}(x) = \lim_n \hat{f}(x_n) = \lim_n f(x_n) = \tilde{f}(x).$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $\tilde{f}$  è l'unica possibile estensione continua di  $f$  a  $E$ . ■

### 1.3 Secondo passo: estensione a tutto $\mathbb{R}$

Supponiamo  $a > 1$  e modifichiamo la funzione  $f : F \rightarrow ]0, +\infty[$  definendo, per ogni intero  $N \geq 1$ , la funzione  $f_N : F \cap [-N, N] \rightarrow [f(-N), f(N)]$ , tale che  $f_N(x) = f(x)$  per ogni  $x \in F \cap [-N, N]$ . L'insieme  $F \cap [-N, N]$  è denso in  $[-N, N]$  e, per la Proprietà 3, la funzione  $f_N$  è uniformemente continua. Inoltre, ha valori in un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$ , pertanto in uno spazio metrico completo. Essa si può pertanto estendere, in un unico modo, a una funzione continua  $\tilde{f}_N : [-N, N] \rightarrow [f(-N), f(N)]$ .

Possiamo allora definire  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  in questo modo: dato  $x \in \mathbb{R}$ , si prende un intero  $N$  per cui  $x \in [-N, N]$  e si pone  $f(x) = \tilde{f}_N(x)$ . Per l'unicità delle estensioni, questa risulta essere una buona definizione, ed è una funzione continua.

La Proprietà 1 (di omomorfismo) continua a essere soddisfatta. Infatti, presi due numeri reali  $x_1, x_2$ , posso scegliere un intero  $N \geq 1$  tale che  $x_1, x_2$  e  $x_1 + x_2$  stanno in  $[-N, N]$ . Prendendo due successioni<sup>1</sup>  $(x_1^n)_n$  e  $(x_2^n)_n$  in  $F \cap [-N, N]$  tali che  $\lim_n x_1^n = x_1$  e  $\lim_n x_2^n = x_2$ , si ha:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \tilde{f}_N(x_1 + x_2) \\ &= \lim_n f_N(x_1^n + x_2^n) = \lim_n (f_N(x_1^n) f_N(x_2^n)) = \lim_n f_N(x_1^n) \lim_n f_N(x_2^n) \\ &= \tilde{f}_N(x_1) \tilde{f}_N(x_2) = f(x_1) f(x_2). \end{aligned}$$

Dalla Proprietà 2 dedurremo ora che, se  $a > 1$ , anche  $f$  è strettamente crescente. Infatti, presi due numeri reali  $x_1 < x_2$ , posso sempre individuare un intero  $N \geq 1$  e due numeri  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  in  $F \cap [-N, N]$  tali che

$$-N \leq x_1 < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < x_2 \leq N.$$

Essendo  $f_N$  strettamente crescente, con semplici passaggi al limite si vede che  $\tilde{f}_N$  è crescente, per cui

$$f(x_1) = \tilde{f}_N(x_1) \leq \tilde{f}_N(\tilde{x}_1) = f_N(\tilde{x}_1) < f_N(\tilde{x}_2) = \tilde{f}_N(\tilde{x}_2) \leq \tilde{f}_N(x_2) = f(x_2).$$

Dimostriamo ora che, se  $a > 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

I due limiti sicuramente esistono, siccome  $f$  è crescente. Osservando che, se  $m \in \mathbb{Z}$ , si ha  $f(m) = a^m$ , e che

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} a^m = 0, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} a^m = +\infty,$$

si giunge alla conclusione. A questo punto, possiamo anche affermare che, se  $a > 1$ , la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  è biiettiva: essendo continua, l'immagine deve essere un intervallo, e da quanto sopra questo intervallo deve essere proprio  $]0, +\infty[$ .

Se  $a < 1$ , considerazioni analoghe portano a dimostrare che la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  è biiettiva e strettamente decrescente.

<sup>1</sup>Qui scriviamo gli indici in apice per non avere doppi indici in basso.

## 2 La funzione circolare

Dato  $T > 0$ , una funzione  $F : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  (qui  $\Omega$  è un insieme qualsiasi) si dice “periodica di periodo  $T$ ” se

$$F(x + T) = F(x),$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Chiaramente, se  $T$  è un periodo per la funzione  $F$ , anche  $2T, 3T, \dots$  lo sono. Diremo che  $T$  è il “periodo minimo” se non ci sono periodi più piccoli. Introduciamo l’insieme

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Si tratta della circonferenza centrata nell’origine, di raggio 1, pensata come sottoinsieme del campo complesso. In analogia con il procedimento seguito per introdurre la funzione esponenziale, vogliamo dimostrare il seguente enunciato.

**Teorema.** *Dato  $T > 0$ , esiste un’unica funzione  $h_T : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , continua e periodica di periodo minimo  $T$ , tale che, per ogni  $x_1, x_2$ ,*

$$(j) \quad h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1)h_T(x_2),$$

$$(jj) \quad h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i.$$

Costruiremo ora una tale funzione, in modo del tutto simile a quello seguito per la funzione esponenziale. Premettiamo anche qui alcune considerazioni, supponendo che il teorema sia stato verificato.

La funzione  $h_T$  si chiama “funzione circolare di base  $T$ ”. Pensando al codominio  $S^1$  come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , la funzione  $h_T$  ha due componenti, che denotiamo con  $\cos_T$  e  $\sin_T$ : sono il “coseno di base  $T$ ” e il “seno di base  $T$ ”, rispettivamente. Scriveremo quindi

$$h_T(x) = (\cos_T(x), \sin_T(x)), \quad \text{oppure} \quad h_T(x) = \cos_T(x) + i \sin_T(x),$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Tali funzioni sono continue e periodiche di periodo  $T$ , e dalle proprietà della funzione circolare ricaviamo le seguenti:

$$(a) \quad (\cos_T(x))^2 + (\sin_T(x))^2 = 1,$$

$$(b) \quad \cos_T(x_1 + x_2) = \cos_T(x_1)\cos_T(x_2) - \sin_T(x_1)\sin_T(x_2),$$

$$(c) \quad \sin_T(x_1 + x_2) = \sin_T(x_1)\cos_T(x_2) + \cos_T(x_1)\sin_T(x_2),$$

$$(d) \quad \cos_T\left(\frac{T}{4}\right) = 0, \quad \sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1.$$

Concentriamo ora l’attenzione sull’intervallo  $[0, T[$ . Scrivendo

$$i = h_T\left(\frac{T}{4}\right) = h_T\left(0 + \frac{T}{4}\right) = h_T(0)h_T\left(\frac{T}{4}\right) = h_T(0)i,$$

ne ricaviamo che  $h_T(0) = 1$ . Inoltre,

$$h_T\left(\frac{T}{2}\right) = h_T\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = h_T\left(\frac{T}{4}\right)h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i^2 = -1,$$

mentre

$$h_T\left(\frac{3T}{4}\right) = h_T\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{4}\right) = h_T\left(\frac{T}{2}\right)h_T\left(\frac{T}{4}\right) = (-1)i = -i,$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} \cos_T(0) &= 1, & \sin_T(0) &= 0, \\ \cos_T\left(\frac{T}{4}\right) &= 0, & \sin_T\left(\frac{T}{4}\right) &= 1, \\ \cos_T\left(\frac{T}{2}\right) &= -1, & \sin_T\left(\frac{T}{2}\right) &= 0, \\ \cos_T\left(\frac{3T}{4}\right) &= 0, & \sin_T\left(\frac{3T}{4}\right) &= -1. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, dalla

$$1 = h_T(0) = h_T(x - x) = h_T(x)h_T(-x),$$

abbiamo che  $h_T(-x) = h_T(x)^{-1} = h_T(x)^*$ , essendo  $|h_T(x)| = 1$ . Quindi,

$$\cos_T(-x) = \cos_T(x), \quad \sin_T(-x) = -\sin_T(x),$$

ossia la funzione  $\cos_T$  è pari, mentre  $\sin_T$  è dispari.

Dimostreremo ora che  $\tilde{h}_T : [0, T[ \rightarrow S^1$ , la restrizione della funzione circolare  $h_T$  all'intervallo  $[0, T[$ , è biiettiva. Vediamo dapprima l'iniettività. Siano  $\alpha < \beta$  in  $[0, T[$ . Se per assurdo fosse  $h_T(\alpha) = h_T(\beta)$ , si avrebbe che

$$h_T(\beta - \alpha) = h_T(\beta)h_T(-\alpha) = \frac{h_T(\beta)}{h_T(\alpha)} = 1.$$

Ma allora

$$h_T(x + (\beta - \alpha)) = h_T(x)h_T(\beta - \alpha) = h_T(x),$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , per cui  $\beta - \alpha$  sarebbe un periodo di  $h_T$  minore di  $T$ , mentre sappiamo che  $T$  è il periodo minimo.

Vediamo ora che

$$\cos_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{4} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{4} < x < \frac{3T}{4} \\ > 0 & \text{se } \frac{3T}{4} < x < T \end{cases}, \quad \sin_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{2} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{2} < x < T \end{cases}.$$

Ad esempio, per  $x \in ]0, \frac{T}{2}[$ , non si può certamente avere  $\sin_T(x) = 0$ , perchè altrimenti i valori in  $x$  di  $\cos_T$ ,  $\sin_T$  coinciderebbero con i valori in 0 o in  $\frac{T}{2}$ , mentre abbiamo visto che, se per  $\alpha, \beta \in [0, T[$  si ha  $\cos_T(\alpha) = \cos_T(\beta)$  e  $\sin_T(\alpha) = \sin_T(\beta)$ , allora  $\alpha = \beta$ . Pertanto, per la continuità,  $\sin_T$  dovrà essere sempre positiva o sempre negativa in  $]0, \frac{T}{2}[$  (teorema degli zeri). Essendo  $\sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1$ , deve essere sempre positiva.

Per concludere, dimostriamo che  $\tilde{h}_T$  è suriettiva (abbiamo già dimostrato prima che è iniettiva). Prendiamo un punto  $P = (X_1, X_2) \in S^1$ . Si ha che  $X_1 \in [-1, 1]$ . I due casi in cui  $X_1 = -1$  o  $X_1 = 1$  si trattano immediatamente, essendo  $h_T\left(\frac{T}{2}\right) = (-1, 0)$  e  $h_T(0) = (1, 0)$ . Supponiamo quindi che sia  $X_1 \in ]-1, 1[$ . Sappiamo che  $\cos_T\left(\frac{T}{2}\right) = -1$ ,  $\cos_T(0) = 1$  e che  $\cos_T$  è una funzione continua e  $T$ -periodica. Per il corollario al teorema degli zeri, esiste un  $\bar{x} \in ]0, \frac{T}{2}[$  tale che  $\cos_T(\bar{x}) = X_1$ . Allora

$$|\sin_T(\bar{x})| = \sqrt{1 - (\cos_T(\bar{x}))^2} = \sqrt{1 - X_1^2} = |X_2|.$$

Abbiamo due possibilità: o  $\sin_T(\bar{x}) = X_2$ , per cui  $h_T(\bar{x}) = P$ , oppure  $\sin_T(\bar{x}) = -X_2$ , nel qual caso

$$h_T(T - \bar{x}) = h_T(-\bar{x}) = h_T(\bar{x})^* = (X_1, X_2) = P.$$

Essendo  $T - \bar{x} \in ]\frac{T}{2}, T[$ , ciò mostra che  $\tilde{h}_T$  è suriettiva.

## 2.1 La costruzione - primo passo

Definiamo la successione  $(\sigma_n)_n$ , con  $\sigma_n = x_n + iy_n \in S^1$ :

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = i,$$

e, per  $n \geq 3$ ,

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}}{2}} + i \frac{y_{n-1}}{\sqrt{2(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2})}},$$

così che  $\sigma_n^2 = \sigma_{n-1}$ , (vedi la formula per le radici quadrate di un numero complesso) e  $0 < x_n < 1$ ,  $0 < y_n < 1$ .

Ci interessano ora le potenze di  $\sigma_n$ , quando  $n \geq 2$ . Sicuramente  $\sigma_n^m$  sta in  $S^1$ , per ogni  $n$  e  $m$ . Vediamo inoltre che la distanza tra una potenza e la successiva è sempre costante:

$$|\sigma_n^{m+1} - \sigma_n^m| = |\sigma_n^m| |\sigma_n - 1| = |\sigma_n|^m |\sigma_n - 1| = |\sigma_n - 1|.$$

Infine, si vede per induzione che

$$\sigma_n^{2^n} = 1.$$

Queste considerazioni ci permettono di interpretare geometricamente i punti  $\sigma_n^m$ : fissato  $n \geq 2$ , i punti

$$1, \sigma_n, \sigma_n^2, \dots, \sigma_n^{2^{n-1}}$$

sono i vertici di un poligono regolare di  $2^n$  lati inscritto in  $S^1$ .

Vogliamo definire la funzione  $h_T : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , di periodo minimo  $T$ . Per cominciare, definiamola sull'insieme

$$\widehat{F} = \left\{ \frac{mT}{2^n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \right\},$$

in questo modo:

$$h_T \left( \frac{mT}{2^n} \right) = \sigma_n^m.$$

Verifichiamo che è ben definita: siano  $m, n$  e  $m', n'$  tali che  $\frac{mT}{2^n} = \frac{m'T}{2^{n'}}$ ; se, per esempio,  $n' \geq n$ , si vede che  $\sigma_n = \sigma_{n'}^{2^{n'-n}}$ , e perciò

$$\sigma_n^m = (\sigma_{n'}^{2^{n'-n}})^m = \sigma_{n'}^{m2^{n'-n}} = \sigma_{n'}^{m'}.$$

Quindi,  $h_T$  è ben definita su  $\widehat{F}$ , a valori in  $S^1$ . Ne studieremo alcune proprietà.

**Proprietà 1.** Si ha

$$h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1)h_T(x_2), \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \widehat{F}.$$

Infatti, dati  $x_1 = \frac{kT}{2^n}$  e  $x_2 = \frac{mT}{2^n}$  (possiamo prenderli aventi lo stesso denominatore), abbiamo

$$\begin{aligned} h_T\left(\frac{kT}{2^n} + \frac{mT}{2^n}\right) &= h_T\left(\frac{(k+m)T}{2^n}\right) = \sigma_n^{k+m} \\ &= \sigma_n^k \sigma_n^m = h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right). \end{aligned}$$

**Proprietà 2.** La funzione  $h_T$  è periodica, di periodo  $T$ .

Infatti, essendo  $h_T(T) = 1$ , si ha che

$$h_T(x + T) = h_T(x)h_T(T) = h_T(x),$$

per ogni  $x \in \widehat{F}$ .

**Proprietà 3.** La funzione  $h_T : \widehat{F} \rightarrow S^1$  è uniformemente continua. Più precisamente, per ogni  $x_1, x_2$  in  $\widehat{F}$  si ha

$$|h_T(x_2) - h_T(x_1)| \leq \frac{2\pi}{T} |x_2 - x_1|.$$

Infatti, prendiamo due elementi distinti di  $\widehat{F}$ , siano essi  $x_1 = \frac{kT}{2^n}$  e  $x_2 = \frac{mT}{2^n}$ , con  $k < m$ . Allora

$$\begin{aligned} h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) &= \sigma_n^m - \sigma_n^k = \sigma_n^k(\sigma_n^{m-k} - 1) \\ &= \sigma_n^k(\sigma_n - 1)(1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \dots + \sigma_n^{m-k-1}), \end{aligned}$$

e quindi, essendo  $2^n|\sigma_n - 1| < 2\pi$  (visto a lezione), si ha

$$\left| h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) \right| \leq |\sigma_n - 1|(m - k) \leq \frac{2\pi}{T} \left| \frac{mT}{2^n} - \frac{kT}{2^n} \right|.$$

## 2.2 Secondo passo: estensione a tutto $\mathbb{R}$

È facile vedere che  $\widehat{F}$  è denso in  $\mathbb{R}$ . D'altra parte,  $S^1$  è chiuso in  $\mathbb{R}^2$ , che è completo. Quindi la funzione  $h_T : \widehat{F} \rightarrow S^1$  essendo uniformemente continua, a valori in uno spazio metrico completo, può essere estesa, in un unico modo, a una funzione continua  $h_T : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ .

La Proprietà 1 (di omomorfismo) si estende con semplici passaggi al limite, come visto per la funzione esponenziale. Lo stesso dicasi per la periodicità.

Dimostriamo ora che  $T$  è il *periodo minimo* di  $h_T$ . Consideriamo dapprima l'insieme

$$K = \{t \in \mathbb{R} : h_T(t) = 1\},$$

cioè il *nucleo*,  $K = \ker h_T$ . È un insieme chiuso che contiene sicuramente  $T$  e tutti i suoi multipli interi. Poniamo  $a = \inf\{x \in K : x > 0\}$ . Deve essere  $a > 0$ , altrimenti  $K$  conterrebbe numeri arbitrariamente piccoli, e con questi tutti i loro multipli; ne verrebbe che  $K$  sarebbe denso in  $\mathbb{R}$ , e perciò coinciderebbe con esso, il che è chiaramente assurdo. Essendo  $K$  chiuso, è  $a \in K$ . Inoltre,  $a$  deve essere un sottomultiplo di  $T$ . Infatti, se così non fosse, potrei prendere  $\bar{n}$ , il più grande intero per cui  $\bar{n}a < T$ . Allora si avrebbe che  $0 < T - \bar{n}a < a$  e  $h_T(T - \bar{n}a) = 1$ , ossia  $T - \bar{n}a \in K$ , una contraddizione con il fatto che  $a$  è il minimo elemento positivo di  $K$ .

Notiamo che  $h_T(\frac{a}{2}) = -1$ . Infatti,

$$h_T\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_T\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = h_T(a) = 1,$$

e  $h_T(\frac{a}{2}) \neq 1$ , essendo  $\frac{a}{2} \notin K$ .

Sia  $N \geq 1$  tale che  $T = Na$ : dimostriamo che deve essere  $N = 1$ . Se per assurdo fosse  $N \geq 2$ , avrei che

$$\frac{a}{2} = \frac{T}{2N} \leq \frac{T}{4}.$$

Facendo vedere che nessun punto dell'intervallo  $[0, \frac{T}{4}]$  può venir mandato in  $-1$ , avremo la contraddizione cercata. Cominciamo prendendo un numero di  $\widehat{F} \cap [0, \frac{T}{4}]$ : sia esso  $\frac{mT}{2^n}$ . Allora, per la Proprietà 1,

$$\left| h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - 1 \right| = \left| h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T(0) \right| \leq \frac{2\pi}{T} \frac{mT}{2^n} \leq \frac{\pi}{2} < 2.$$

Ne segue per continuità che nessun punto di  $[0, \frac{T}{4}]$  può avere immagine in  $-1$ .

Abbiamo quindi dimostrato che  $a = T$ . Supponiamo per assurdo che ci sia un periodo  $\tau > 0$  minore di  $T$ . Ne seguirebbe che

$$h_T(\tau) = h_T(0 + \tau) = h_T(0) = 1,$$

quindi  $\tau \in K$ , e ciò è in contraddizione con il fatto che il nucleo di  $h_T$  è costituito da tutti e soli i multipli interi di  $T$ .

Concludiamo con il seguente

**Teorema.** *Si ha:*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|h_T(x) - 1|}{x} = \frac{2\pi}{T}.$$

Dimostrazione. Cominciamo con il considerare il limite al variare di  $x$  in  $\widehat{F}$ . Sia quindi  $x = \frac{mT}{2^n} > 0$ . Allora,

$$\begin{aligned} \left| \frac{|h_T(x) - 1|}{x} - \frac{2\pi}{T} \right| &= \left| \frac{|\sigma_n^m - 1|}{\frac{mT}{2^n}} - \frac{2\pi}{T} \right| \\ &= \left| \frac{2^n |\sigma_n - 1| |1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \dots + \sigma_n^{m-1}|}{T m} - \frac{2\pi}{T} \right| \\ &\leq \frac{2^n |\sigma_n - 1|}{T} \left| \frac{|1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \dots + \sigma_n^{m-1}|}{m} - 1 \right| + \left| \frac{2^n |\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right| \\ &\leq \frac{2\pi}{T} \left| \frac{1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \dots + \sigma_n^{m-1}}{m} - 1 \right| + \left| \frac{2^n |\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right| \\ &\leq \frac{2\pi}{T} \frac{|\sigma_n - 1| + |\sigma_n^2 - 1| + \dots + |\sigma_n^{m-1} - 1|}{m} + \left| \frac{2^n |\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right|. \end{aligned}$$

Pertanto, essendo  $2^n |\sigma_n - 1| < 2\pi$  (visto a lezione), si ha

$$|\sigma_n^2 - 1| \leq |\sigma_n^2 - \sigma_n| + |\sigma_n - 1| = 2|\sigma_n - 1| \leq 2 \frac{2\pi}{2^n},$$

e così via, fino a  $|\sigma_n^{m-1} - 1| \leq (m-1) \frac{2\pi}{2^n}$ . Usando la formula

$$1 + 2 + 3 + \dots + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{|\sigma_n - 1| + |\sigma_n^2 - 1| + \dots + |\sigma_n^{m-1} - 1|}{m} &\leq \frac{1}{m} \left[ \frac{2\pi}{2^n} + 2 \frac{2\pi}{2^n} + \dots + (m-1) \frac{2\pi}{2^n} \right] \\ &= \frac{1}{m} \frac{(m-1)m}{2} \frac{2\pi}{2^n} = \frac{(m-1)\pi}{2^n} < \frac{\pi}{T} \frac{mT}{2^n}. \end{aligned}$$

In conclusione, se  $x = \frac{mT}{2^n} > 0$ , si ha:

$$\left| \frac{|h_T(x) - 1|}{x} - \frac{2\pi}{T} \right| \leq \frac{2\pi}{T} \frac{\pi}{T} \frac{mT}{2^n} + \left| \frac{2^n |\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right|.$$

Al tendere di  $x = \frac{mT}{2^n}$  a 0, si ha che necessariamente  $n$  tende a  $+\infty$ , e il risultato segue dal fatto che  $2^n |\sigma_n - 1|$  tende a  $2\pi$  (visto a lezione).

Consideriamo ora il limite per  $x \rightarrow 0^+$  senza ulteriori restrizioni su  $x$  e, per assurdo, supponiamo che non esista o non sia uguale a 1. Allora esiste un  $\varepsilon > 0$  e una successione  $(x_n)_n$  tale che  $x_n \rightarrow 0^+$  tale che, per ogni  $n$ ,

$$\frac{|h_T(x_n) - 1|}{t_n} \notin \left[ \frac{2\pi}{T} - \varepsilon, \frac{2\pi}{T} + \varepsilon \right].$$

Per la continuità della funzione  $\frac{|h_T(x)-1|}{x}$  e la densità di  $\widehat{F}$  in  $\mathbb{R}$ , per ogni  $n$  sufficientemente grande si può trovare un  $x'_n \in \widehat{F}$  positivo in modo che

$$|x_n - x'_n| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{e} \quad \frac{|h_T(x'_n) - 1|}{x'_n} \notin \left[ \frac{2\pi}{T} - \varepsilon, \frac{2\pi}{T} + \varepsilon \right],$$

in contraddizione con quanto visto nella prima parte della dimostrazione. ■

Abbiamo definito a lezione le funzioni

$$\cos_T t = \operatorname{Re}(h_T(t)), \quad \sin_T t = \operatorname{Im}(h_T(t)),$$

per cui

$$h_T(t) = \cos_T t + i \sin_T t.$$

Dal teorema sopra dimostrato si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos_T(x) - 1)^2 + (\sin_T(x))^2}{x^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

da cui, essendo  $\cos_T$  una funzione pari,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos_T(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin_T(x))^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos_T x)(1 - \cos_T x)}{x^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

e tenendo conto delle proprietà di segno di  $\sin_T$ , concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin_T x}{x} = \frac{2\pi}{T}.$$