ESERCIZIO 1

Calcolare il campo all'interno ed all'esterno di un cilindro carico, con densità di carica (non uniforme) data dalla seguente:

$$\rho = \rho_0(a - br)$$

Applicando il teorema di Gauss ad una superficie gaussiana cilindrica, coassiale all'asse del cilindro carico, di raggio r possiamo distinguere due casi (sia R il raggio del cilindro carico):

$\underline{r < R}$

Il campo elettrico è radiale quindi nel computo del flusso è non nullo solo quello attraverso la superficie laterale

$$2\pi r L E(r) = \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r'\, dr' \frac{\rho(r')}{\epsilon_0} = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\int_0^r \rho_0(a - br')r'\, dr' =$$

$$= \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\left[\rho_0 a \frac{r'^2}{2} - \rho_0 b \frac{r'^3}{3}\right]_0^r = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\left[\rho_0 a \frac{r^2}{2} - \rho_0 b \frac{r^3}{3}\right]$$

da cui si ottiene il campo elettrico

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[\frac{ar}{2} - \frac{br^2}{3}\right]$$

$\underline{r > R}$

$$2\pi r L E(r) = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\int_0^R \rho_0(a - br')r'\, dr' = \frac{2\pi L}{\epsilon_0}\left[\rho_0 a \frac{R^2}{2} - \rho_0 b \frac{R^3}{3}\right]$$

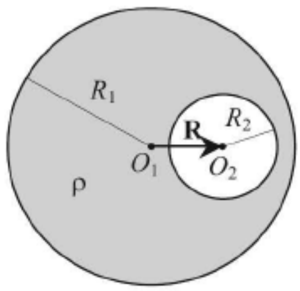
da cui

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[\frac{aR^2}{2} - \frac{bR^3}{3}\right]\cdot\frac{1}{r}$$

che come si può vedere decresce come l'inverso della distanza dal cilindro.

ESERCIZIO 2

Si consideri una sfera con centro in O_1 e raggio R_1, uniformemente carica con densità di carica volumetrica ρ. All'interno della sfera viene praticato un foro sferico con centro in O_2 e raggio $R_2 < R_1$, all'interno del quale c'è il vuoto, come mostrato in figura. Sia R la distanza fra O_1 e O_2. Si calcoli il campo elettrico all'interno del foro.



Questo esercizio era già stato affrontato in parte nella esercitazione precedente; a partire da questo avevamo determinato il campo elettrico all'interno di una sfera piena; in questa lezione abbiamo risolto il quesito proposto applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. La distribuzione di carica assegnata equivale a una sfera di raggio O_1 e centro R_1 uniformemente carica con la densità volumetrica ρ a cui si sovrappone una sfera più piccola con centro in O_2 e raggio R_2 con la medesima densità di carica ma di segno opposto. In un punto interno al foro, utilizzando il risultato visto nella lezione precedente, ha la seguente espressione

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{r_1} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{r_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{R},$$

dove R è il vettore che congiunge i due coentri. Si osserva dunque che il campo all'interno della cavità è uniforme ed è proporzionale alla distanza fra i centri delle due sfere.

ESERCIZIO 3

Cinque sfere (di spessore trascurabile) conduttrici concentriche di raggi R = 1,2,3,4,5 cm, hanno inizialmente carica nulla. La seconda e la terza sono unite da un filo conduttore ed anchela quarta e la quinta. Sul conduttore più interno si deposita una carica $q = 4{*}10^9$ C. Calcolare la carica indotta su ogni sfera, la differenza di potenziale tra il più interno ed il più esterno, l'energia elettrostatica totale.

Posta la carica q sul conduttore più interno, sugli altri per induzione completa si avrà

$$q_1 = q = q_3 = q_5 \qquad q_2 = -q = q_4$$

La differenza di potenziale tra le varie sfere, ed in particolare tra la prima e l'ultima, sarà quindi

$$\begin{aligned}\Delta V_{1,5} &= \Delta V_{1,2} + \Delta V_{2,3} + \Delta V_{3,4} + \Delta V_{4,5} = \Delta V_{1,2} + \Delta V_{3,4} = \\ &= \frac{Q}{C_{12}} + \frac{Q}{C_{34}} = q\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right] = 2100\ V\ .-\end{aligned}$$

L'energia elettrostatica totale del sistema sarà invece

$$U = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,4} + U_{4,5} + U_5 = U_{1,2} + U_{3,4} + U_5 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{12}} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{34}} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_5} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) + \frac{1}{R_5}\right] = 3.5\ 10^{-9}\ J\ .$$