Lezione 11

Teorema Siano X e Y spazi compatti. Allora $X \times Y$ è compatto.

Dim Base di $X \times Y$: prodotti di aperti.

$\mathcal{U} = \{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto basico di $X \times Y$

$U_\alpha \subset X$, $V_\alpha \subset Y$ aperti $\forall \alpha \in A$.

$\forall x \in X$ poniamo $Y_x := \{x\} \times Y \subset X \times Y \Rightarrow Y_x \cong Y$

compatto $\rightsquigarrow \mathcal{V}_x = \{(U_\alpha \times V_\alpha) \cap Y_x\}_{\alpha \in A}$

ricoprimento aperto di $Y_x \underset{Y\ cpt}{\Longrightarrow} \exists A'_x \subset A$ insieme finito t.c.

$\mathcal{V}'_x = \{(U_\alpha \times V_\alpha) \cap Y_x\}_{\alpha \in A'_x}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}'_x$ per Y_x

Possiamo assumere che $\emptyset \notin \mathcal{V}'_x$ (altrimenti si rimuove).

$$Y_x = \{x\} \times Y \subset \bigcup_{\alpha \in A'_x} (U_\alpha \times V_\alpha) \quad \text{e} \quad x \in U_\alpha \quad \forall \alpha \in A'_x$$

$$\Rightarrow W_x := \bigcap_{\alpha \in A'_x} U_\alpha \subset X \text{ aperto } (A'_x \text{ finito}),\ x \in W_x.$$

$\Rightarrow \mathcal{W} := \{W_x\}_{x \in X}$ ricoprimento aperto di $X \underset{X\ cpt}{\Longrightarrow}$

$\exists\ \mathcal{W}' = \{W_{x_1}, \dots, W_{x_k}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{W}$ per X

$\rightsquigarrow A' := \bigcup_{i=1}^{k} A'_{x_i} \subset A$ sottoinsieme finito di A

Si ha che $\mathcal{U}' = \{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ è sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$

Infatti: $\forall (x, y) \in X \times Y$ $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ t.c. $x \in W_{x_i}$

$\Rightarrow \exists \alpha_0 \in A'_{x_i} \subset A'$ t.c. $(x_i, y) \in U_{\alpha_0} \times V_{\alpha_0} \in \mathcal{V}'_{x_i} \Rightarrow$

$(x, y) \in W_{x_i} \times V_{\alpha_0} \subset U_{\alpha_0} \times V_{\alpha_0}$ dato che $W_{x_i} = \bigcap_{\alpha \in A'_{x_i}} U_\alpha$.

Corollario Siano $X_1, \dots, X_n$ spazi compatti. Allora $X_1 \times \dots \times X_n$ è compatto.

<u>Es</u> $[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times \dots \times [0,1]}_{n \text{ volte}}$ è compatto

Questo è un caso particolare di un teorema che non dimostriamo:

Teorema di Tychonoff Sia I un qualunque insieme e sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi compatti. Allora il prodotto topologico $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto.

<u>Es</u> $[0,1]^\infty := \prod_{n \in \mathbb{N}} [0,1]$ è compatto (con la topologia prodotto)

$[0,1]^\infty$ è detto <u>cubo di Hilbert</u>

Si può dimostrare che $[0,1]^\infty$ è metrizzabile e II-numerabile.

Ogni spazio metrizzabile compatto si immerge in $[0,1]^\infty$ (la dimostrazione va oltre le finalità di questo corso).

Teorema di Heine-Borel $X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ X è chiuso e limitato

<u>Dim</u> $\boxed{\Rightarrow}$ X compatto e $\mathbb{R}^n$ di Hausdorff $\Rightarrow$ X chiuso in $\mathbb{R}^n$.

$\{B(0;r) \cap X\}_{r>0}$ ricoprimento aperto di X $\Rightarrow$

$\exists$ sottoricoprimento finito $\Rightarrow$ $\exists\, r>0$ t.c. $X \subset B(0;r)$ limitato

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, r>0$ t.c. $X \subset B(0;r) \subset [-r,r]^n \cong [0,1]^n$ compatto

X chiuso in $\mathbb{R}^n \Rightarrow X$ chiuso in $[-r,r]^n \Rightarrow X$ compatto.

Corollario Gli spazi seguenti sono compatti: $B^n, S^n, T^n \ \forall n \geq 0$.

Dim B^n e S^n chiusi e limitati per definizione.

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}} \text{ prodotto di spazi compatti.}$$

Teorema Sia $X \subset \mathbb{R}$ compatto non vuoto. Allora X ammette massimo e minimo.

Dim X limitato $\Rightarrow$ $\alpha = \inf X$ e $\beta = \sup X \in \mathbb{R}$

X chiuso $\Rightarrow$ $\alpha, \beta \in X$. Infatti $\forall\, U \subset \mathbb{R}$ aperto t.c.

$\alpha \in U \Rightarrow U \cap X \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in Cl_{\mathbb{R}} X = X$

e similmente per β. Pertanto $\alpha = \min X$, $\beta = \max X$.

Teorema Sia X uno spazio compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ammette massimo e minimo.

Dim $f(X) \subset \mathbb{R}$ compatto $\rightsquigarrow$ $\alpha = \min f(X)$, $\beta = \max f(X)$

$\Rightarrow \exists\, a, b \in X$ t.c.

$$f(a) = \alpha = \min f, \quad f(b) = \beta = \max f.$$

Corollario Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora $\operatorname{diam} X < \infty$ e $\exists\, a, b \in X$ a distanza massima.

Dim $d : X \times X \to \mathbb{R}$ continua $\boxed{E}$ e $X \times X$ compatto.

Successioni

X spazio topologico

Una successione su X è una funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

che denotiamo con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Def $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ è convergente se $\exists\, x \in X$ t.c. $\forall\, U \subset X$ intorno di x, $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $x_n \in U$ $\forall\, n \geq \bar{n}$.
In tal caso diremo che x è limite di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

NB Non è detto che il limite esista, né che sia unico

Es $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_{\text{ban}}$ converge a qualunque punto.

Prop Sia X uno spazio di Hausdorff e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione convergente. Allora il limite è unico e si denota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$.

Dim $\boxed{E}$

Def Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Consideriamo una successione strettamente crescente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ di numeri naturali. La successione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ è detta sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Def Uno spazio X è detto compatto per successioni (o sequenzialmente compatto) se ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

OSS La compattezza per successioni è una proprietà topologica.

NB Compatto $\overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ compatto per successioni

Vale il teorema seguente, che non dimostriamo.

Teorema Sia X uno spazio metrizzabile. Allora X è compatto $\Leftrightarrow$ X è compatto per successioni.

Pertanto B^n, S^n, $[0,1]^n$, T^n sono compatti per successioni e $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto per successioni $\Leftrightarrow$ X chiuso e limitato.