Teoria della Misura

Teoria della Misura

- Idea: generalizzare il concetto di
  - lunghezza, area, volume, ...
- Definizione simile a quella di probabilità, tranne la normalizzazione
  - la misura può prendere anche valore infinito
  - le proprietà sono simili a quelle delle probabilità, con alcune eccezioni
- Esempio più importante: misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Teoria della Misura

- $(\Omega, \mathscr{F})$ spazio misurabile; una misura è una applicazione

$$m : \mathscr{F} \to [0, \infty]$$

tale che

  - $m(\varnothing) = 0$
  - [σ-additività] per ogni $(A_n)_{n \geq 1}$ con $A_n \in \mathscr{F}$, a due a due disgiunti,

$$m\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\Big) = \sum_{n \geq 1} m(A_n)$$

- $m(A) = +\infty$ è possibile!
- $(\Omega, \mathscr{F}, m)$ spazio misurabile

Teoria della Misura

- $(\Omega, \mathscr{F}, m)$ spazio di misura; alcuni casi particolari
  - m è una probabilità se
  $$m(\Omega) = 1$$
  - m è finita se
  $$m(\Omega) < +\infty$$
  - m è σ-finita se esiste $(A_n)_{n\geq 1}$ tale che per ogni n
  $$A_n \in \mathscr{F}, \qquad m(A_n) < +\infty$$
  e inoltre
  $$\Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$
- Esempio. Se $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, $m(\Omega) = +\infty$, non è σ-finito

Teoria della Misura

- Esempio. Misura di conteggio: Ω insieme, $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$, $S \subset \Omega$ fissato

$$\gamma_S(A) = \begin{cases} \text{numero di elementi in } A \cap S & \text{se } A \cap S \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

γ_S è la misura di conteggio indotta da S

  - $\gamma_S(A) =$ quanti elementi di S sono in A
  - $\Omega = \mathbb{N}$, $S = \{\text{numeri primi}\}$
  - $S = \{\omega\}$ (singleton): γ_S si scrive δ_ω, misura di Dirac $\rightsquigarrow$ una probabilità

Teoria della Misura

- Proprietà della misura

  - [Finita additività] se $A_1, \ldots, A_n$ con $A_i \in \mathscr{F}$ a due a due disgiunti,

    $$m(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = m(A_1) + \ldots + m(A_n)$$

  - [Monotonia] se $A, B \in \mathscr{F}$ con $A \subset B$

    $$m(A) + m(B - A) = m(B) \qquad \text{e} \qquad m(A) \leq m(B)$$

  - se $A, B \in \mathscr{F}$

    $$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

Teoria della Misura

- Proprietà della misura
  - [Subadditività] se $(A_n)_{n\geq 1}$ con $A_n \in \mathscr{F}$,

$$m\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} m(A_n)$$

  - [Continuità] se $(A_n)_{n\geq 1}$ con $A_n \in \mathscr{F}$ e

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots, \text{ posto } \lim_n A_n = \cup_{n\geq 1} A_n$$

oppure se $m(A_1) < +\infty$ e

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots, \text{ posto } \lim_n A_n = \cap_{n\geq 1} A_n$$

allora

$$m(\lim_n A_n) = \lim_n m(A_n)$$

Teoria della Misura

- Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$
  - misura "standard" su $\mathbb{R}^n$
  - estende la nozione di lunghezza $(n = 1)$, area $(n = 2)$, volume $(n = 3)$, ...
  - a quali insiemi si può estendere?
  - per ogni iper-rettangolo (chiuso, limitato) $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \in \mathscr{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ con $a_i \leq b_i$ per ogni i, si pone
    $$\lambda_0(I) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

Teoria della Misura

- Misura di Lebesgue su $\Omega = \mathbb{R}^n$; come estendere tale misura?
  - per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ la misura esterna di Lebesgue di A è

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i \geq 1} \lambda_0(I_i) \,|\, I_i \text{ iper-rettangolo}, A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i \right\}$$

  - un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è Lebesgue misurabile se

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E - A) \text{ per ogni } E \subset \mathbb{R}^n$$

    $\rightsquigarrow$ la misura di ogni E si ricostruisce additivamente da quella di $E \cap A$ e $E - A$

  - $\mathscr{L}^n$ è la classe di tutti gli insiemi Lebesgue misurabili

Teoria della Misura

- Teorema (Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$)
  - $\mathscr{L}^n$ è una σ-algebra con $\mathscr{B}^n \subsetneq \mathscr{L}^n \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}$
  - $\lambda \equiv \lambda^*|_{\mathscr{L}^n}$ è una misura su $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n)$
  - $\lambda(I) = \lambda_0(I)$ per ogni iper-rettangolo I (chiuso, limitato)
  - per ogni altra misura m su $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n)$ tale che $m(I) = \lambda_0(I)$ per ogni iper-rettangolo I (chiuso, limitato) $\Rightarrow m = \lambda$
  - $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n, \lambda)$ è σ-finito
  - ogni insieme discreto ha misura di Lebesgue nulla
- Una proprietà $\mathscr{P}_x$, $x \in \mathbb{R}$ è vera quasi ovunque (q.o.) se l'insieme degli x per cui $\mathscr{P}_x$ è falsa ha misura di Lebesgue nulla

Teoria della Misura

- Misura di Lebesgue su $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \in \mathscr{L}^n$
  - σ-algebra traccia

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n_D =& \{A \cap D | \, A \in \mathscr{L}^n\} \\ =& \{A | \, A \in \mathscr{L}^n, A \subset D\}\end{aligned}$$

  - misura di Lebesgue su D, λ_D

$$\lambda_D(A) = \lambda(A \cap D)$$

- Esempio. Se $D = [0,1]^n$, λ_D è una probabilità