Legge di una Variabile Aleatoria

Legge di una Variabile Aleatoria

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, X variabile aleatoria; la misura immagine/legge/distribuzione di X è

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B), \qquad B \in \mathscr{B}$$

  - P_X è un probabilità su $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$

- La funzione di ripartizione di X, F_X, è la restrizione di P_X agli intervalli $B = (-\infty, x])$

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

  quindi $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$

  - notazione: variabile/i aleatoria/e $\equiv$ va
    funzione di ripartizione $\equiv$ fdr

Legge di una Variabile Aleatoria

- Proprietà della funzione di ripartizione

  1. F_X non decrescente
  2. F_X continua a destra
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  4. se $x < y$, $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$,
     $P(X > x) = 1 - F_X(x)$
  5. $P(X < x) = \lim_{y \uparrow x} F_X(y) \equiv F_X(x-)$
  6. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$ "salto" di F_X in x

Legge di una Variabile Aleatoria

- Teorema: per ogni funzione $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ che soddisfa (i), (ii), (iii) (nota come funzione di ripartizione)
  - esiste un unica probabilità P su $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ tale che
  $$P((-\infty, x]) = F(x)$$
  - esiste una variabile aleatoria X su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ tale che $F_X = F$
- Prob. su intervalli $\Rightarrow$ estende unicamente ai Boreliani
- Si può specificare una fdr senza indicare lo spazio di probabilità

Legge di una Variabile Aleatoria

- Due variabili aleatorie X, Y tali che $F_X = F_Y$, cioè $P_X = P_Y$, hanno la stessa legge, scritto

$$X \sim Y$$

  - da un punto di vista probabilistico, X e Y sono uguali
  - se $X = Y$ q.c. allora $X \sim Y$ ma non viceversa!
  - Esempio. $X = 1_A$ con $P(A) = 1/2$, $Y = 1 - 1_A$

Legge di una Variabile Aleatoria

- F fdr, $S = \{x \in \mathbb{R} | F \text{ discontinua in } x\}$
  $\Rightarrow$ se X ha fdr F, $S = \{x \in \mathbb{R} | P(X = x) > 0\}$

  - Teorema: S è discreto

  - Lemma: $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ a due a due disgiunti con $A_\alpha \in \mathscr{F}$ e $P(A_\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \Rightarrow I$ è discreto
    Prova: $I_n = \{\alpha \in I | P(A_\alpha) > 1/n\}$, $\# I_n$ finito e $I = \cup_n I_n$

- $x \in S \Rightarrow x$: $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-) = p \rightsquigarrow$ massa di probabilità pari a p in x

Legge di una Variabile Aleatoria

- Va X discreta: insieme dei valori $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ finito o numerabile
  - F_X costante tra due determinazioni successive
  - massa di probabilità pari a $P(X = x_i) = p_i$ in x_i
  - spesso si assegnano direttamente i valori $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ e le masse $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ con

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i \geq 1} p_i = 1$$

  - allora è una fdr

$$F_X(x) = \sum_{i:\, x_i \leq x} p_i$$

inoltre per ogni Boreliano B, $P(X \in B) = \sum_{i:\, x_i \in B} p_i$

Legge di una Variabile Aleatoria

- Esempio.
  - $X = c$ q.c. degenere, $P_X \equiv \delta_c$
  - $X = 1_A$, $P(A) = p$; $X \sim$ Bernoulli(p)
  - $X \sim$ Binomiale(n, p) con $n \geq 1$, $0 < p < 1$

    $$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ i = 0, \ldots, n$$

    $X =$ numero di successi in n prove indipendenti ed equiprobabili
  - $X \sim$ Poisson(λ) con $\lambda > 0$

    $$P(X = i) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i},\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Legge di una Variabile Aleatoria

- Esercizio. Siano $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ eventi (prove) indipendenti ed equiprobabili con $P(E_n) = p$ per ogni n
  - trovare la distribuzione del numero di insuccessi X prima di vedere il primo successo (distribuzione geometrica)
  - trovare la fdr di X (usare $\lfloor x \rfloor =$ massimo intero $\leq x$)
  - trovare la distribuzione di Y_k, numero di insuccessi prima di vedere il k-esimo successo, con $k \geq 1$ (distribuzione binomiale negativa)

Legge di una Variabile Aleatoria

- Va X continua: la fdr F_X è continua
  - quindi $P(X = x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
  - caso particolare: X dotata di densità f_X se F_X è assolutamente continua, cioè esiste $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, integrabile, tale che

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}$$

  - notazione: funzione densità di probabilità $\equiv$ fdp

Legge di una Variabile Aleatoria

- Va X assolutamente continua
  - spesso si assegna direttamente la fdp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile con
    $$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = 1$$
  - allora è una fdr
    $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u, \qquad x \in \mathbb{R}$$
  - inoltre per ogni Boreliano B, $P(X \in B) = \int_B f_X(u)\mathrm{d}u$

Legge di una Variabile Aleatoria

- Proprietà della densità: X va con fdp f_X e fdr F_X
  - [Densità da funzione di ripartizione] se $x \in \mathbb{R}$ tale che f_X continua in x,
    $$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}(x)$$
    e quindi
    $$F_X(x+\Delta) - F_X(x) = f_X(x) + o(\Delta)$$
    (“o piccolo”: ogni funzione tale che $o(z)/z \to 0$ se $z \to 0$) da cui
    $$P(x < X \leq x+\Delta) \approx f_X(x)\Delta$$
  - [Densità da funzione di ripartizione] $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}(x)$ q.o.

Legge di una Variabile Aleatoria

- Proprietà della densità: X va con fdp f_X e fdr F_X
  - [Unicità] f_X è unica q.o., cioè se g è un altra fdp per X allora $f_X = g$ q.o.; in particolare, si può alterare arbitrariamente f_X su un insieme discreto ottenendo una nuova fdp per X
  - [Derivata e densità] se F_X è derivabile tranne che su un insieme discreto,
  $$\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}(x) = F_X'(x)$$
  esiste tranne che per $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, allora F_X' è una fdp per X (definire arbitrariamente F_X' sugli x_i)

Legge di una Variabile Aleatoria

- Esempio.
  - X uniforme su (a,b) (con $a<b$); $X \sim U(a,b)$
    $$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{ se } a<x<b; \qquad 0 \text{ altrimenti}$$
  - distribuzione gamma, $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\lambda)$ (con $\alpha>0, \lambda>0$)
    $$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ se } x>0; \qquad 0 \text{ altrimenti}$$
    $\Gamma(\cdot)$ è la funzione gamma:
    $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x, \qquad \alpha>0$$
    (alcune proprietà: $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$)
  - X esponenziale, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \equiv \mathrm{Gamma}(1,\lambda)$

Legge di una Variabile Aleatoria

- Esercizio. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
  - trovare la fdr di X
  - trovare la distribuzione di $Y = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda X}$
  - trovare la distribuzione di $Z = X^{1/\gamma}$ con $\gamma > 0$
- Esempio.
  - X normale di parametri μ, σ^2; $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

- Esercizio. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; trovare la fdp di $Y = \mathrm{e}^X$ (distribuzione lognormale(μ, σ^2))

Legge di una Variabile Aleatoria

- Mistura di funzioni di ripartizione
  - se F_1, F_2 sono fdr, allora tale è

    $$G = \lambda F_1 + (1-\lambda) F_2$$

    per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$ (mistura di F_1, F_2 con pesi $\lambda, 1-\lambda$)
  - se X_1, X_2 sono va con fdr F_1, F_2, allora G è la fdr della "lotteria" Y in cui si riceve X_1 con prob. λ e X_2 con prob. $1-\lambda$

Legge di una Variabile Aleatoria

- Mistura di funzioni di ripartizione
  - costruzione: sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ su cui X_1, X_2 sono definite, sia $A \in \mathscr{F}$, $P(A) = \lambda$, A indipendente da X_1, X_2 e

$$Y = 1_A \cdot X_1 + 1_{\bar{A}} \cdot X_2 = \begin{cases} X_1 & \text{se } A \text{ è V} \\ X_2 & \text{se } A \text{ è F} \end{cases}$$

  - Se entrambe F_1, F_2 sono discrete (continue) $\Rightarrow$ G è discreta (continua); cosa succede se F_1 è discreta e F_2 continua?
- Si estende al caso di n fdr

Legge di una Variabile Aleatoria

- Variabile aleatoria X di tipo misto: quando non è nè discreta nè continua
  - sia $S = \{x \in \mathbb{R} | P(X = x) > 0\}$, con $0 < \sum_{x \in S} P(X = x) = \lambda < 1$
  - parte discreta di F_X:

$$F_d(x) = \sum_{y \in S, y \leq x} P(X = y) = \sum_{y \in S, y \leq x} (F_X(y) - F_X(y-))$$

$\Rightarrow \widetilde{F}_d = \frac{1}{\lambda} F_d$ è una fdr discreta

  - parte continua:

$$F_c(x) = F_X(x) - F_d(x)$$

$\Rightarrow \widetilde{F}_c = \frac{1}{1-\lambda} F_c$ è una fdr continua

Legge di una Variabile Aleatoria

- Variabile aleatoria X di tipo misto: quando non è nè discreta nè continua
  - quindi
$$F_X = F_d + F_c = \lambda \widetilde{F}_D + (1-\lambda)\widetilde{F}_c$$
  - spesso si assegnano direttamente i valori $x_1, \dots, x_n, \dots$ e le masse $p_1, \dots, p_n \dots$ con
$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i\geq 1} p_i = \lambda < 1$$
e la "densità" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile tale che
$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - \lambda < 1$$
e si definisce direttamente la fdr
$$F_X(x) = \sum_{i:\, x_i \leq x} p_i + \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u$$

Legge di una Variabile Aleatoria

- Esercizio. Edificio dal valore di 100m€ soggetto a rischio incendio;
  con prob. 50% non c'è incendio; con prob 5% l'incendio distrugge l'edificio completamente; con prob. 45%, il danno da incendio è distribuito uniformemente tra 0 e 100m€
  trovare la fdr del danno X

- X danno totale di un portafoglio con distribuzione Exp(λ);
  cessione in un trattato riassicurativo stop loss con franchigia d e limite l (con $l > d$)

  $$Y = \min\{\max\{X - d, 0\}, l - d\}$$

  trovare la fdr di Y