$$\mathcal{H}_{phys} = \frac{\text{Ker } Q_B}{\text{Im } Q_B} \quad \longleftrightarrow \quad \text{COHOMOLOGY of } Q_{BRST}$$

Vediamo ora in un esempio semplice che questa condizione riproduce esattamente gli stati fisici che ci aspettiamo.

Per semplicità, consideriamo una teoria ABELIANA (i ghost sono DISACCOPPIATI, ma la procedura di BRST è ancora valida, specialmente nell'identificare gli stati fisici).

- Prendiamo $G(A) = \partial_\mu A^\mu$
- Integriamo su B: le trasformazioni di BRST diventano

$$\delta A_\mu = \partial_\mu c \qquad \delta \bar{c} = -\partial_\mu A^\mu/\xi \qquad \delta c = 0$$

- Espandiamo i campi in operatori di costruzione e distruzione:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(a^\mu(\bar{p}) e^{ipx} + a^{\mu+}(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$c(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(d(\bar{p}) e^{ipx} + d^+(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

$$\bar{c}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(b(\bar{p}) e^{ipx} + b^+(\bar{p}) e^{-ipx} \right)$$

- $[Q_B, a^\mu(\bar{p})] = -p^\mu d(\bar{p})$ $\quad$ $[Q_B, a^{\mu\dagger}(\bar{p})] = p^\mu d^\dagger(\bar{p})$

  $\{Q_B, b(\bar{p})\} = p^\mu a_\mu(\bar{p})/\xi$ $\quad$ $\{Q_B, b^\dagger(\bar{p})\} = p^\mu a_\mu^\dagger(\bar{p})/\xi$

  $\{Q_B, d(\bar{p})\} = 0$ $\quad$ $\{Q_B, d^\dagger(\bar{p})\} = 0$

- Consideriamo gli stati $|\psi\rangle$ t.c. $Q_B|\psi\rangle = 0$
  - gli stati $|e,\psi\rangle \equiv e_\mu a^{\mu\dagger}|\psi\rangle$ sono FISICI se $e_\mu p^\mu = 0$
  - gli stati $|\psi\rangle' \equiv b^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle$ soddisfano $Q_B|\psi\rangle' = \frac{p^\mu}{\xi} a_\mu^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle$

  $\Rightarrow |e+\alpha p, \psi\rangle = |e_\mu, \psi\rangle + \xi\alpha\, Q_B|\psi\rangle' \cong |e,\psi\rangle$

  (solita condizione di gauge-invarianza applicata ai vettori di polarizzazione.)

  - Abbiamo anche $Q_B b^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle = \frac{p^\mu}{\xi} a_\mu(\bar{p})|\psi\rangle \neq 0$

    $\rightarrow$ stati $b^\dagger|\psi\rangle$ NON sono fisici

  - $\forall e_\mu$ con $e_\mu p^\mu \neq 0$ $\quad d^\dagger(\bar{p})|\psi\rangle = Q_B \frac{e_\mu a^{\mu\dagger}(p)|\psi\rangle}{(e\cdot p)} \Rightarrow$

    $\Rightarrow d^\dagger(\bar{p})$ è Q_B-esatto $\Rightarrow \cong 0$

  $\Rightarrow \mathcal{H}_{phys}$ non contiene ghost!

- $[a_\mu(\bar{p}), a_\nu^\dagger(\bar{p}')] = -\eta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\bar{p}-\bar{p}') \Rightarrow \|a_0^\dagger|0\rangle\|^2 < 0$

  $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

  Lo sp. di Fock NON è uno SPAZIO DI HILBERT

(a_0 è distr. e $a_0^\dagger$ contr. per consistenza con Lorentz inv.)

La vera domanda è "$\mathcal{H}_{phys}$ è uno SP. DI HILBERT ?"

$\updownarrow$

S-matrix è unitaria

La risp. è "SI".

$\downarrow$

Basta dimostrarlo per una scelta di $G(A)$. Siccome esistono "GAUGE UNITARIE" ⊙ in cui la risp. è manifesta, allora sarà vera anche per le altre scelte di gauge fixing.

⊙ AXIAL GAUGE in YM.

→ Il metodo di FP genera una Lagrangiana che è QUADRATICA nei campi c e $\bar{c}$.

Questo è ok per $G(A) = \partial_\mu A^\mu$

$\updownarrow$

controllare la rinormalizzabilità

Ci sono altre scelte di G che richiedono termini CUBICI o QUARTICI (in $\bar{c}, \bar{c}$) in $\mathcal{L}$ per cancellare degli infiniti in  o  .

Per fortuna BRST dunque un metodo più generico per generare una classe di Lagrangiane equivalenti che diano la stessa matrice S (tra gli stati fisici):

Prendere $\mathcal{L}$ come il più generico funzionale dei campi $\overbrace{A_\mu, \text{matter}}^{\equiv \phi}$, $c, \bar{c}, B$ t.c. sia INVARIANTE sotto trasf. BRST e sotto tutte le simmetrie globali della teoria (di partenza)

Si può dimostrare che una tale $\mathcal{L}$ è data da

$$\mathcal{L}[\phi, c, \bar{c}, B] = \mathcal{L}_0[\phi] + Q_B \cdot \underbrace{\Psi[\phi, c, \bar{c}, B]}_{\substack{\text{funzionale arbitrario di} \\ \text{ghost n}^\circ = -1}}$$

$\Updownarrow$

$Q_B \cdot \Psi$ non è necessariam. quadratico in $c, \bar{c}$

Stati fisici sono ancora dati da coomologia di Q_B.
$\Rightarrow$ siccome esiste una gauge (es. $A_0 = 0$) in cui i ghost disaccoppiano, allora i ghost non sono fisici in ogni gauge (scelta di Ψ)

WARD-TAKAHASHI IDENTITIES for BRST-transformations.

$S = \int d^4x \, \mathcal{L}$ è inv. sotto BRST

$\Rightarrow$ impone delle RELAZIONI sui CORRELATORI

Consideriamo un operatore $\mathcal{O}$ (non necessariam. gauge-inv.)

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\, \mathcal{O}(A,c,\bar{c},B)\, e^{iS[A,c,\bar{c},B]}$$

rinominiamo le variab. d'integraz.

$$= \int DA'\, Dc'\, D\bar{c}'\, DB'\, \mathcal{O}(A',c',\bar{c}',B')\, e^{iS[A',c',\bar{c}',B']}$$

cambio di variabili

MISURA INTEG. È INV. (Jac = 1)

$$\begin{cases} A' = A + \epsilon Q_B \cdot A \\ c' = c + \epsilon Q_B \cdot c \\ \bar{c}' = \bar{c} + \epsilon Q_B \cdot \bar{c} \\ B' = B \end{cases}$$

$$= \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\, \left(\mathcal{O} + \delta_{BRST} \mathcal{O} \right) e^{iS[A,c,\bar{c},B]}$$

$$= \langle \mathcal{O} \rangle + \langle \delta_{BRST} \mathcal{O} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \delta_B \mathcal{O} \rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \langle Q_B \cdot \mathcal{O} \rangle = 0$$

Ora consideriamo le funz. di Green

$$\tilde{G}(x, x_1, \dots, x_N) = \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\; \mathcal{O}(x) \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i(x_i)\, e^{iS}$$

BRST invarianti

Facendo stesso procedimento di sopra :

$$\langle (Q_B \cdot O) \prod_i O_i \rangle = 0$$

→ correlatore di un operatore BRST-esatto con qualsiasi op. BRST-inv. è nullo.

Usiamo questo risultato per dimostrare che i correlatori di operatori BRST-INVARIANTI sono indipendenti dalla scelta del gauge fixing $G(A)$ (questo in particolare è vero per la funz. di partizione $\langle 1 \rangle$)

Ricordiamoci che $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \left[\bar{c}^a G^a(A) - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a B^a \right]$

⇒ Se prendiamo due diverse funz. $G_1(A)$ e $G_2(A)$, allora

$$S_1 - S_2 = \int d^3x \; Q_B \cdot \left[\bar{c}^a G_1^a(A) - \bar{c}^a G_2^a(A) \right] = $$
$$= Q_B \cdot V_{12}$$

$$\Rightarrow \langle \prod_i O_i(x_i) \rangle_1 = \int e^{iS_1} \prod_i O_i = \int e^{iS_2 + iQ_B V_{12}} \prod_i O_i$$

$\uparrow$ BRST-inv.

$$e^{iQ_B V_{12}} = 1 - i Q_B R_{12} \quad \text{per } Q_B^2 = 0 \qquad R_{12} = \dots V_{12} + \dots V_{12}(Q_B V_{12}) + \dots$$

$$= \int e^{iS_2} \prod_i O_i - \underbrace{i \int e^{iS_2} Q_B \cdot R_{12} \prod_i O_i}_{=0 \text{ per WI}}$$

$$= \langle \prod_i O_i(x_i) \rangle_2$$

"→" gli elem. della matrice S, che si derivano utilizzando tali correlatori, sono anch'essi indip. da $G(A)$.

Qte relazioni sono formali, ci potrebbero essere delle divergenze
→ PI va regolarizzato

Se uno sceglie un REGULATOR che rompe l'inv. per BRST, questi risultati che otteniamo dirette potrebbero non essere più validi.

Ci sono 3 possibilità:

1) Esiste un REGOL. BRST-inv. e lo usiamo: i risultati trovati sopra sono validi per la teoria regolarizzata (e anche per la teoria rinormalizzata)

2) Esiste un REGOL. BRST-inv. ma non lo usiamo nei conti: proprietà trovate sopra non possono essere applicate, ma i risultati sono ancora validi, anche se nascosti

3) Non esiste un REGOL. BRST-inv.: BRST sym è ANOMALA.