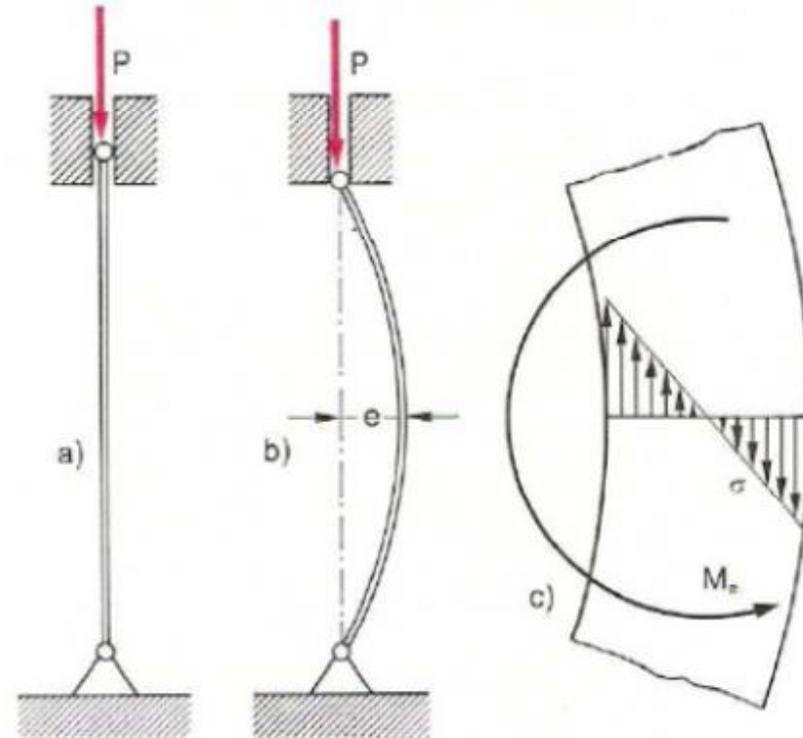
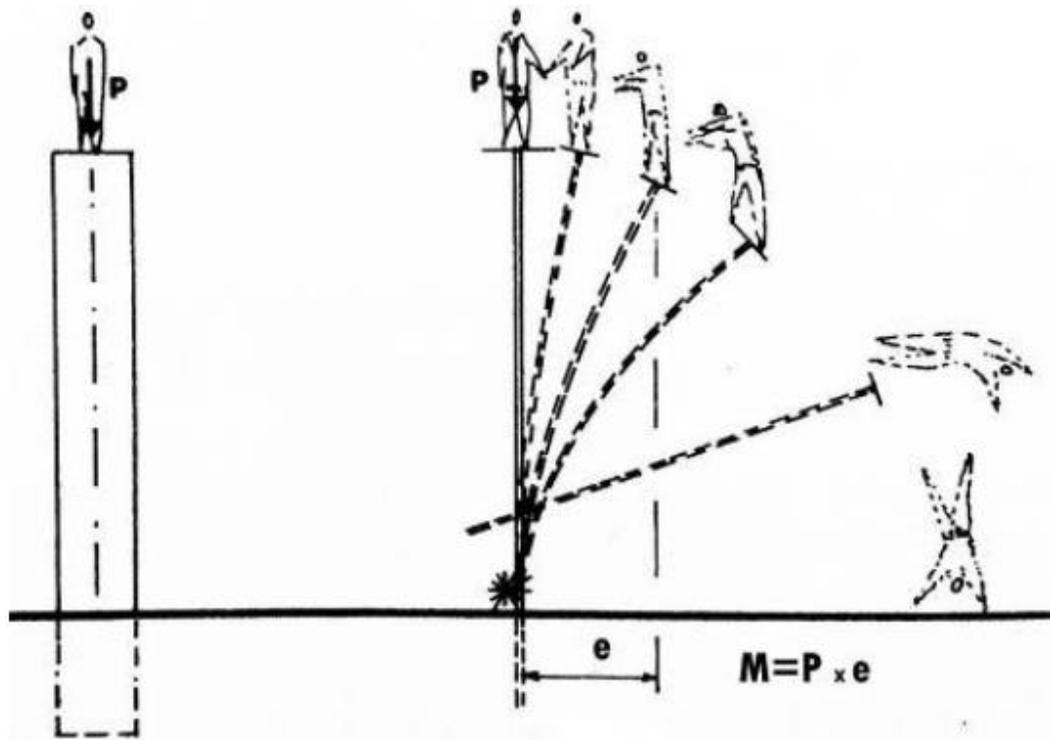




Costruzioni in Acciaio

Stabilità dell'equilibrio

Stabilità dell'equilibrio



Stabilità dell'equilibrio

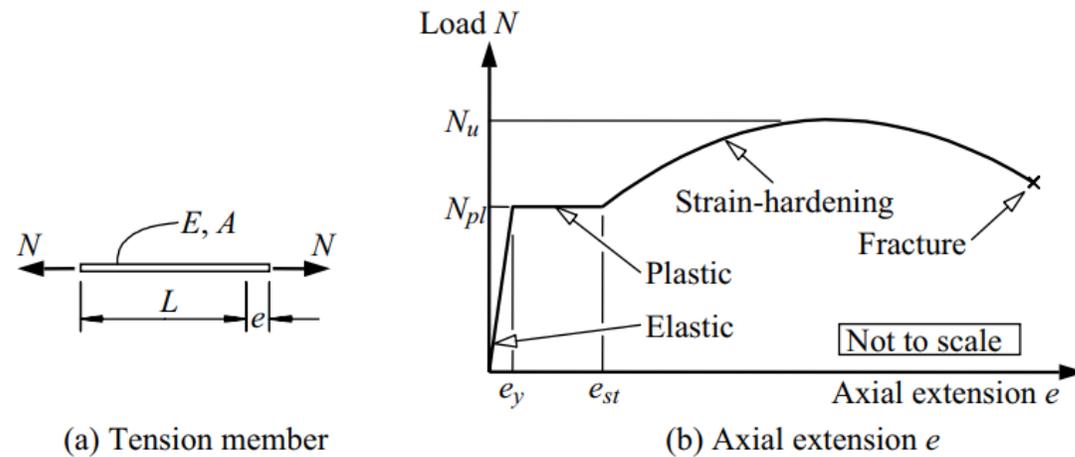
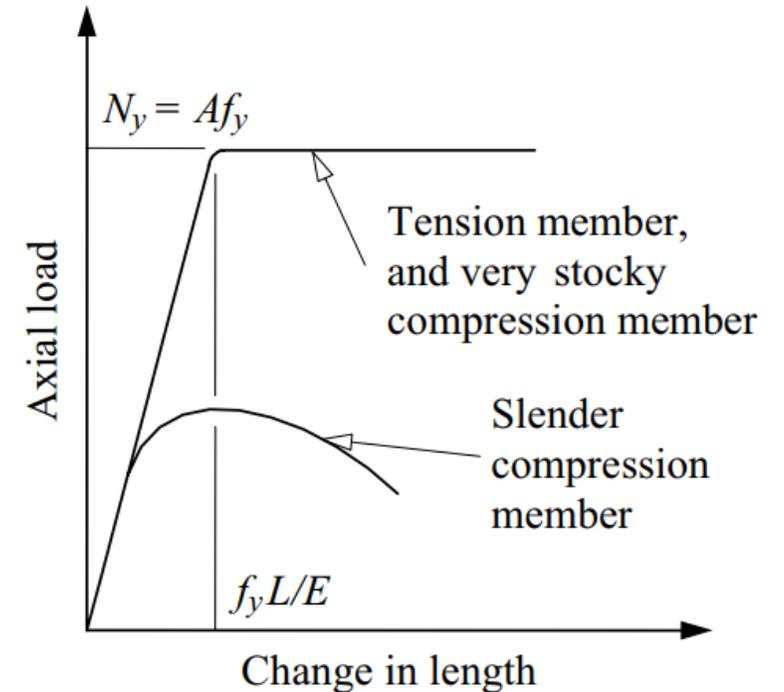
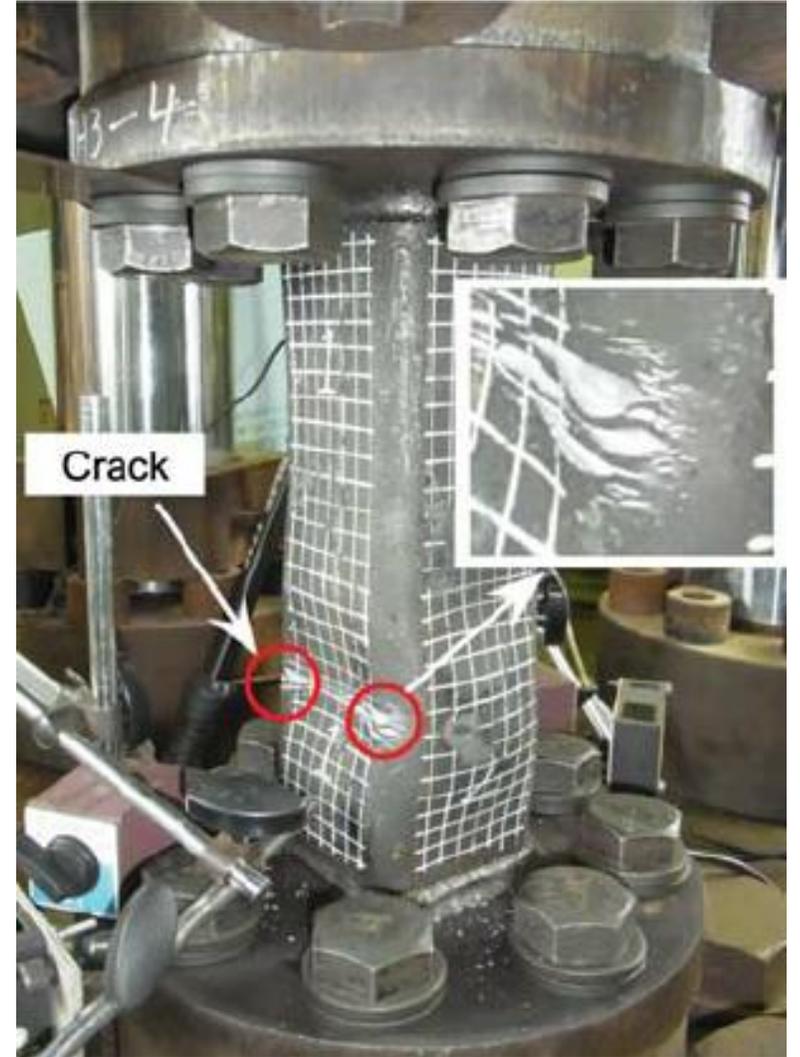
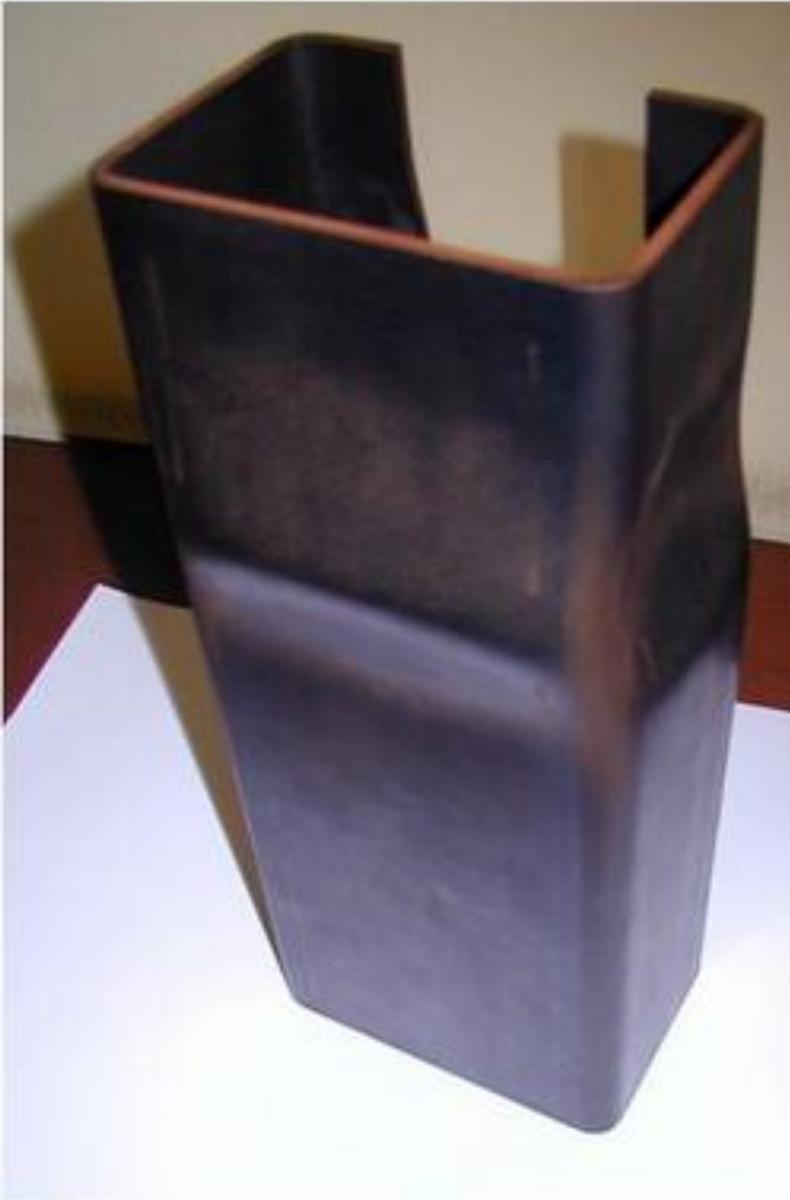


Figure 2.1 Load-extension behaviour of a perfect tension member.

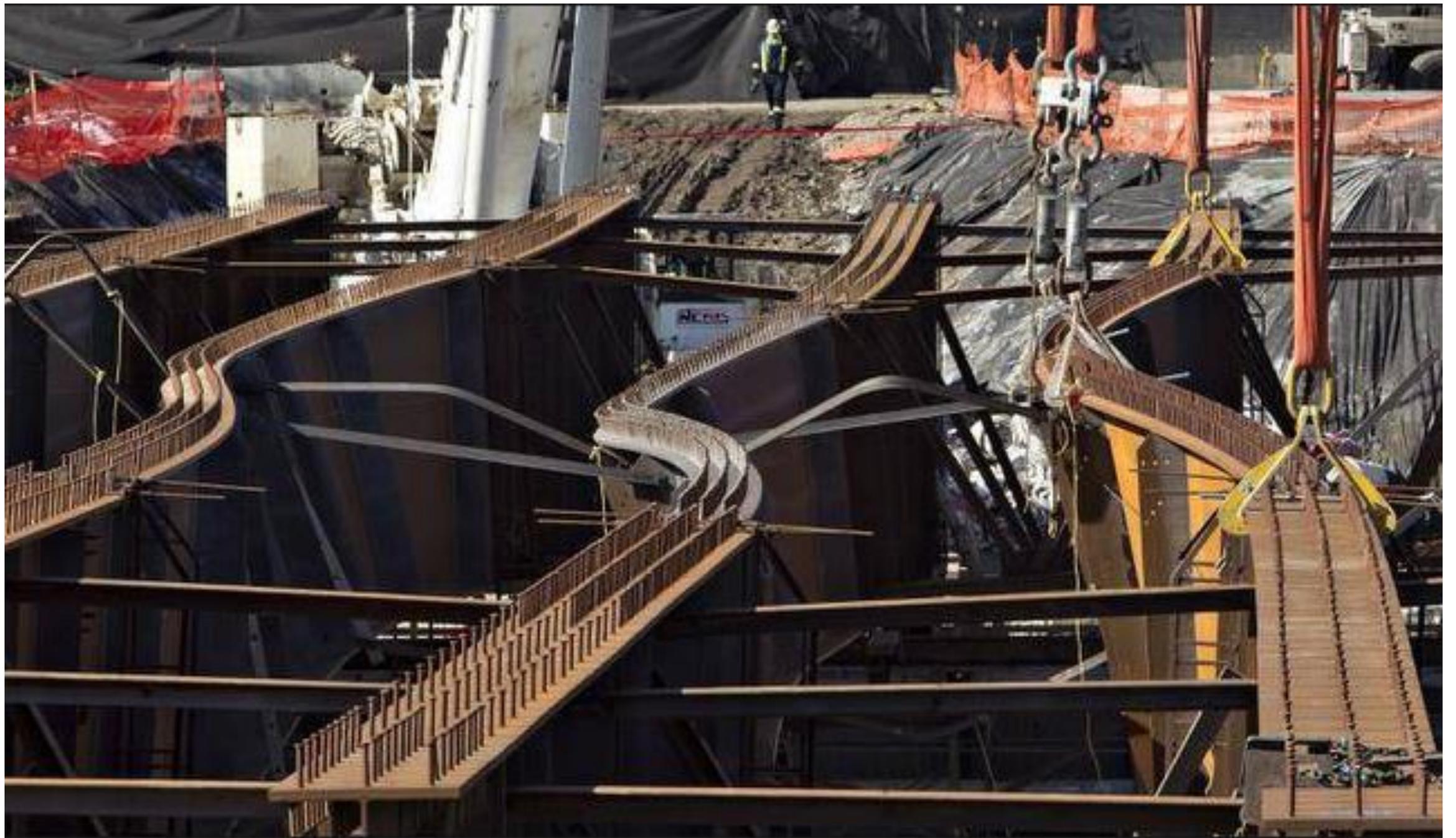


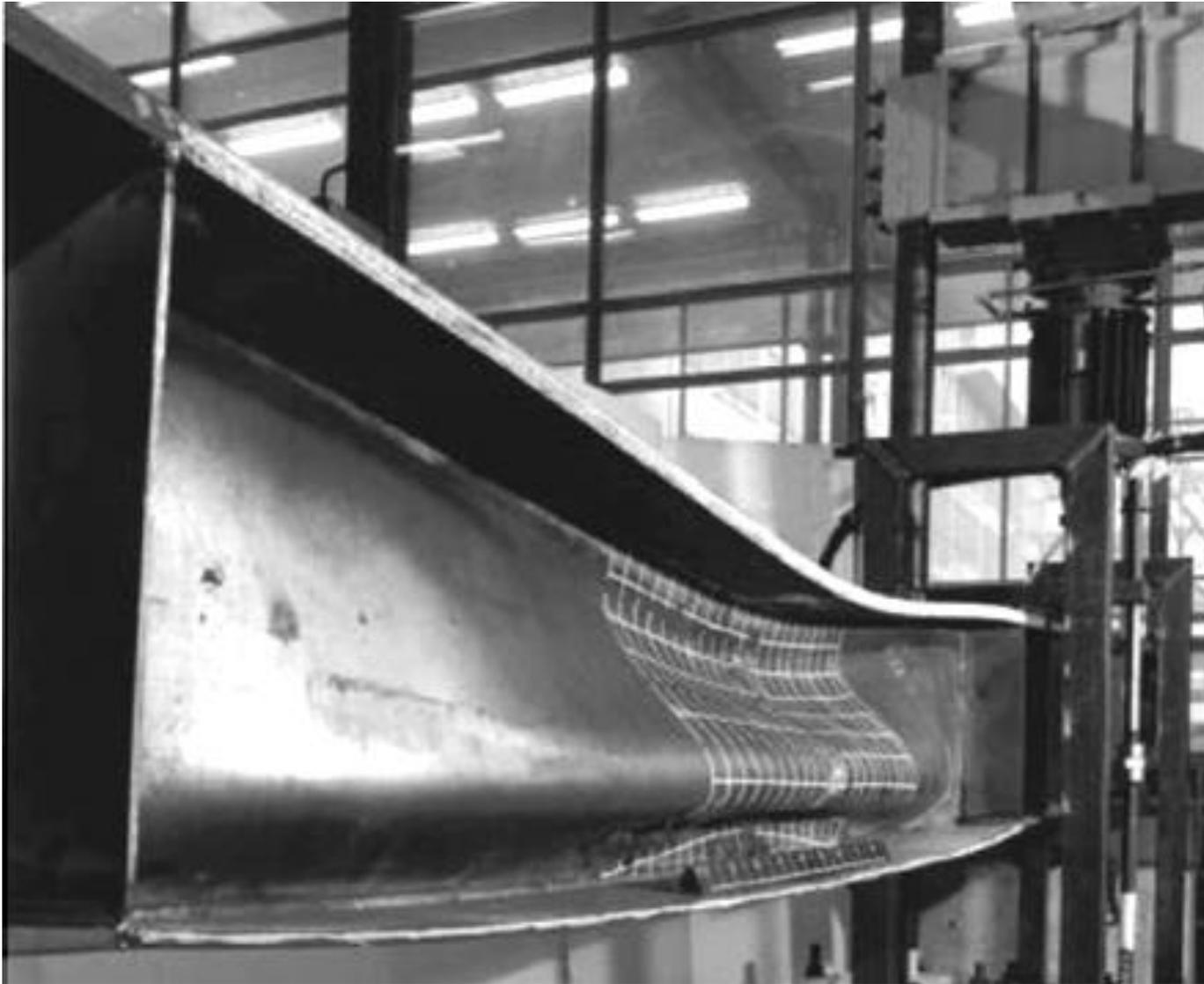
Resistances of axially loaded members.













The Windsor Tower was among the ten tallest in Madrid, Spain.



Cenni sulla stabilità e riferimenti EC3

Molte strutture quando soggette ad un processo di carico crescente subiscono improvvisamente una brusca variazione nel modo di deformarsi che non è conseguenza della crisi del materiale o di altre proprietà meccaniche. Esso è dovuto al fatto che il modo di deformarsi della struttura al crescere del carico per un certo valore di questo, diventa instabile e la struttura cerca allora un altro tipo di deformata stabile.

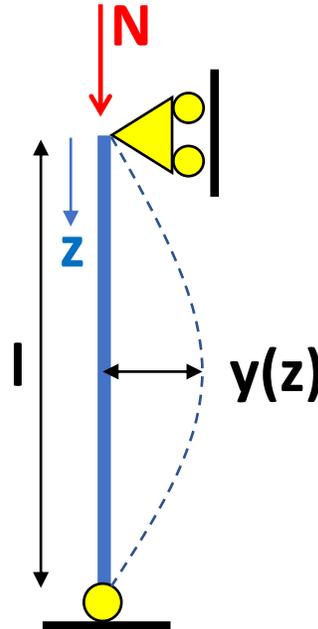
Se questo brusco passaggio nel modo di deformarsi della struttura avviene quando il materiale è ancora **linearmente elastico**, si parla di **instabilità elastica**, altrimenti di **instabilità elastoplastica**. Il carico per cui si ha questa variazione nel comportamento deformativo viene detto **carico critico** per la struttura.

Per valutare il fenomeno della stabilità di una struttura esistono in generale tre metodi di soluzione:

metodo statico per sistemi elastici e non elastici;

metodo energetico per sistemi conservativi (dal punto di vista della struttura (elastica) e dei carichi);

metodo dinamico generale.



Asta perfetta

Utilizzando un approccio statico, la determinazione del carico critico avverrà equiparando il momento interno dovuto alla curvatura a quello esterno dovuto al braccio creatosi in seguito all'inflessione della trave.

Il momento esterno varrà quindi:

$$M_e(z) = N \cdot y(z)$$

Mentre per quanto riguarda il momento interno vale la relazione:

$$-\frac{M}{EJ} = y''$$

che rappresenta una teoria del secondo ordine linearizzata. Avremo quindi:

$$M_i = -y'' \cdot EJ$$

$$M_i - M_e = 0$$

$$y'' \cdot EJ + Ny = 0$$

L'equazione differenziale omogenea risolvente assume la forma

$$y'' + \frac{Ny}{EJ} = 0$$

Stabilità

Asta perfetta

Definendo k^2 come:

$$k^2 = \frac{N}{EJ}$$

avremo che l'equazione omogenea assume la forma:

$$y'' + k^2 y = 0$$

La sua equazione caratteristica sarà quindi:

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -k^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i k$$

La soluzione generale vale:

$$y = A \sin kz + B \cos kz \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{N}{EJ}$$

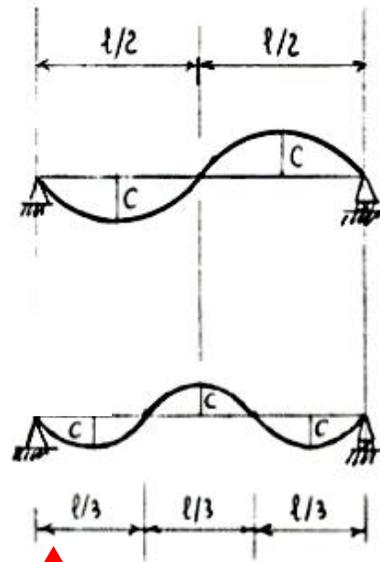
Imponendo le condizioni al contorno:

$$y = 0 \quad \text{per} \quad z = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$y = 0 \quad \text{per} \quad z = l \quad \rightarrow \quad kl = n\pi$$

Avremo quindi che:

$$N_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l_0^2}$$



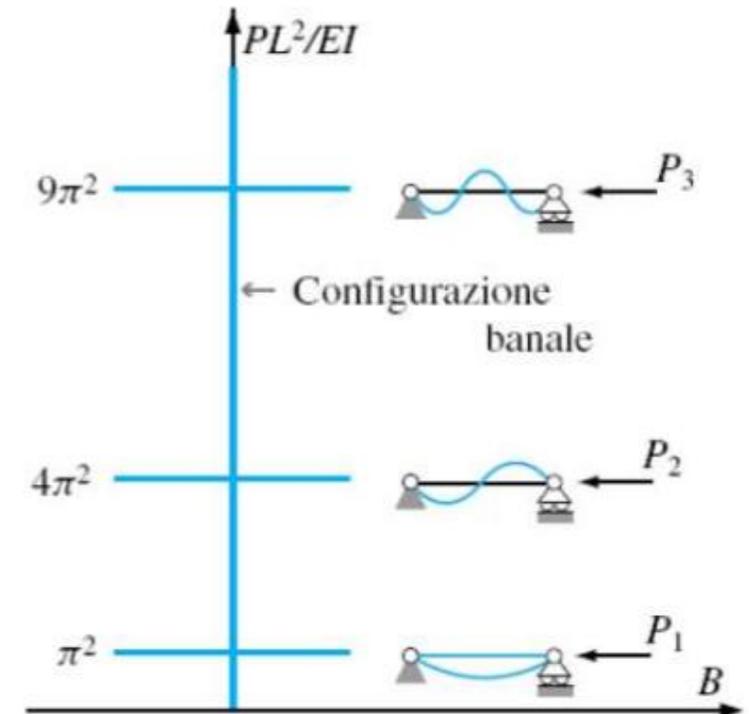
$n=2$

$$P_{cr} = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

$n=3$

$$P_{cr} = 9\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Deformate sotto carico critico per $n=2$ ed $n=3$



Stabilità

Asta perfetta

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \pi^2 EJ}{l_0^2}$$



$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EJ}{Al_0^2} = \pi^2 E \frac{\rho_{min}^2}{l_0^2}$$

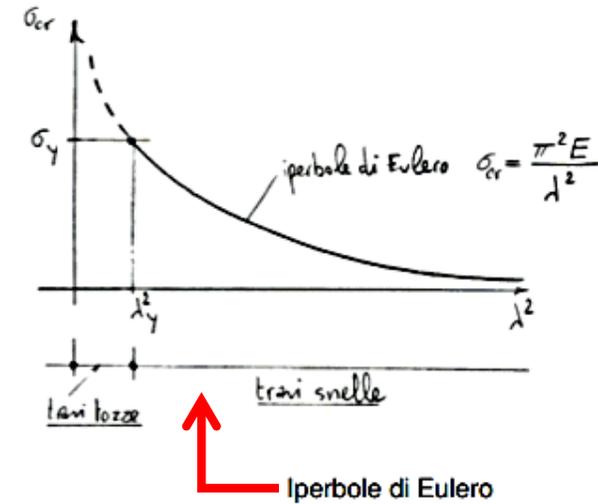
dove σ_{cr} è la tensione normale corrispondente al carico critico. Posto:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}}$$

dove λ è detta **snellezza** dell'asta, la formula di Eulero diviene:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Se si riportano in ascissa λ^2 e in ordinata σ_{cr} :



La formula di Eulero è limitata in validità dalla richiesta che la σ_{cr} non super il valore della f_y della tensione normale al limite di proporzionalità. Il valore della snellezza corrispondente, λ_1 , detta snellezza limite, si ottiene imponendo che sia:

$$f_y = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2}$$

da cui

$$\lambda_1 = \lambda_y = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Stabilità

Asta perfetta

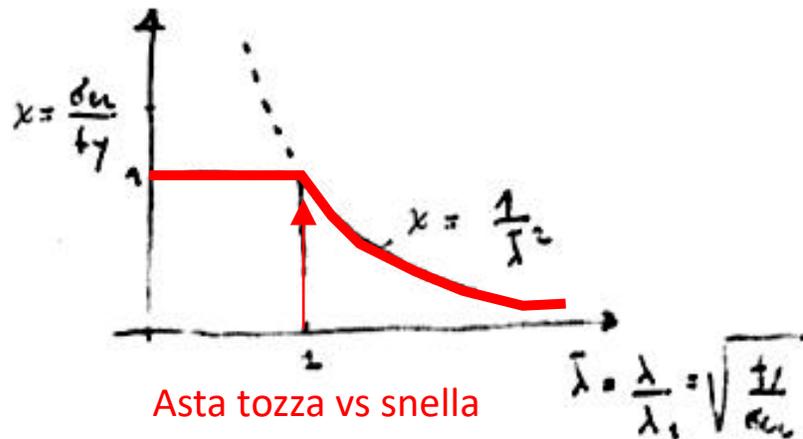
Ipotezzando di avere a che fare con un materiale elastico perfettamente plastico avremo che:

$$N_{cr} = \chi \cdot N_{pl} \Rightarrow \sigma_{cr} = \chi \cdot f_y$$

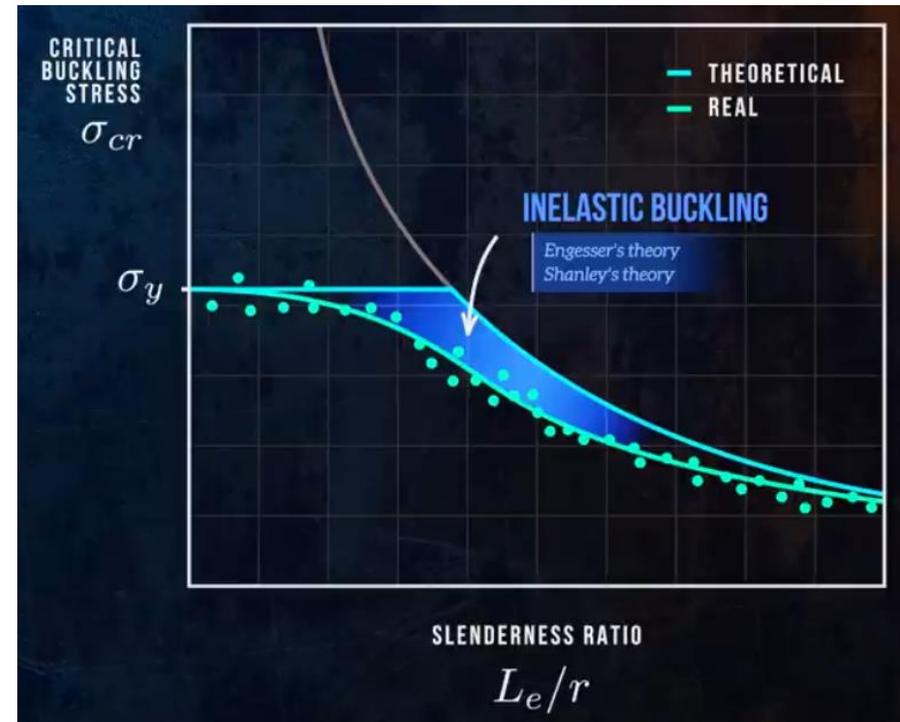
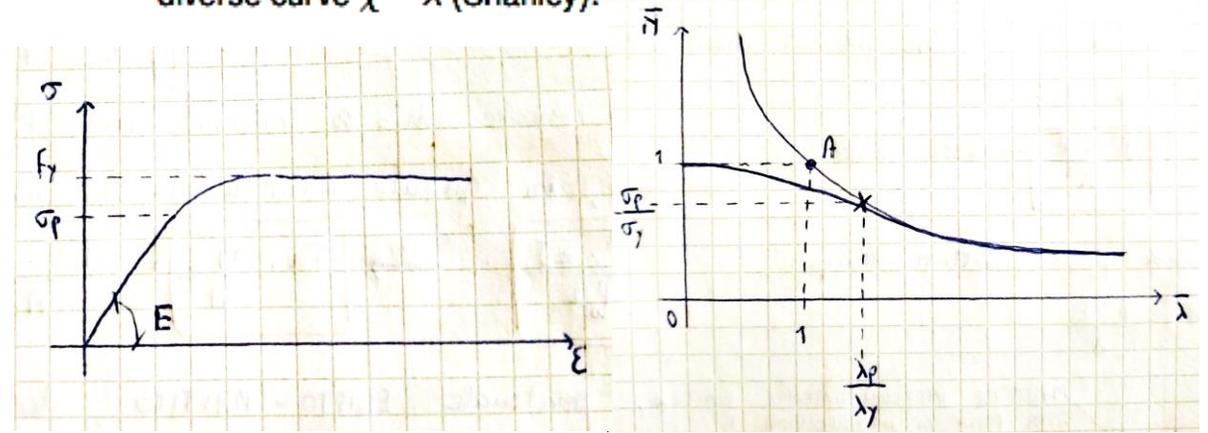
con χ coefficiente di riduzione. Definendo inoltre $\bar{\lambda}$ come una *snellezza normalizzata* data da:

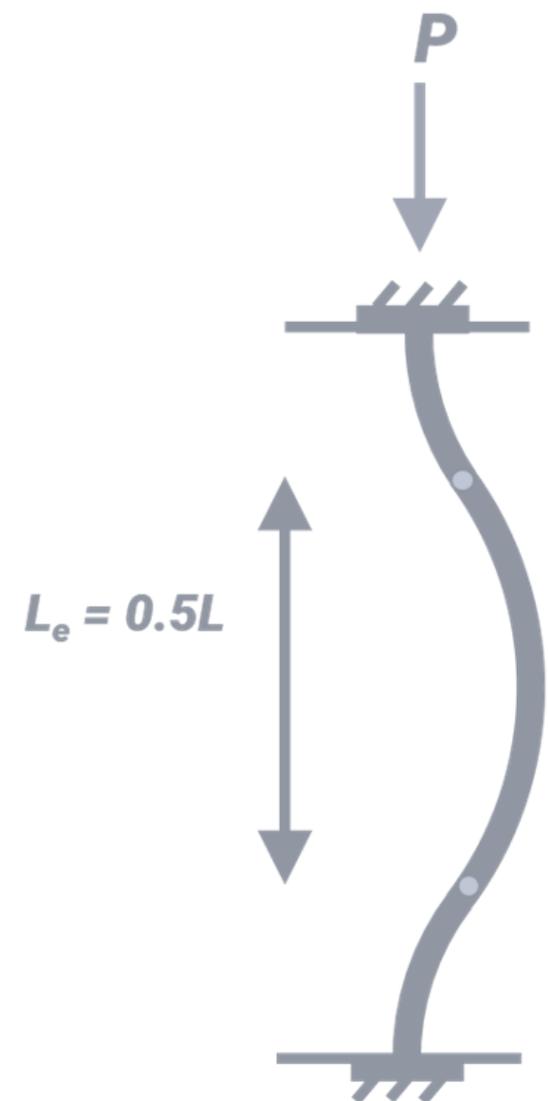
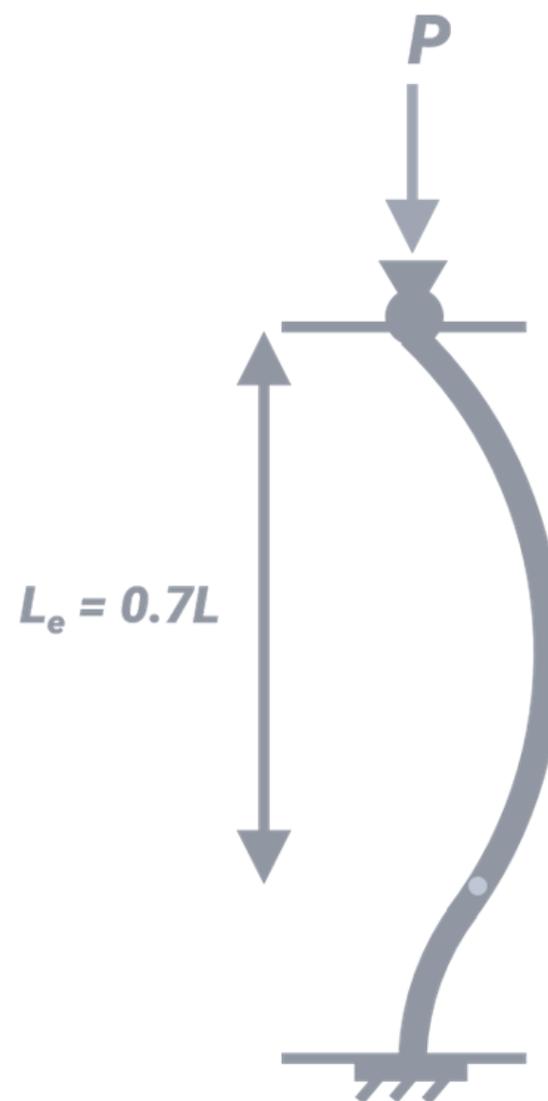
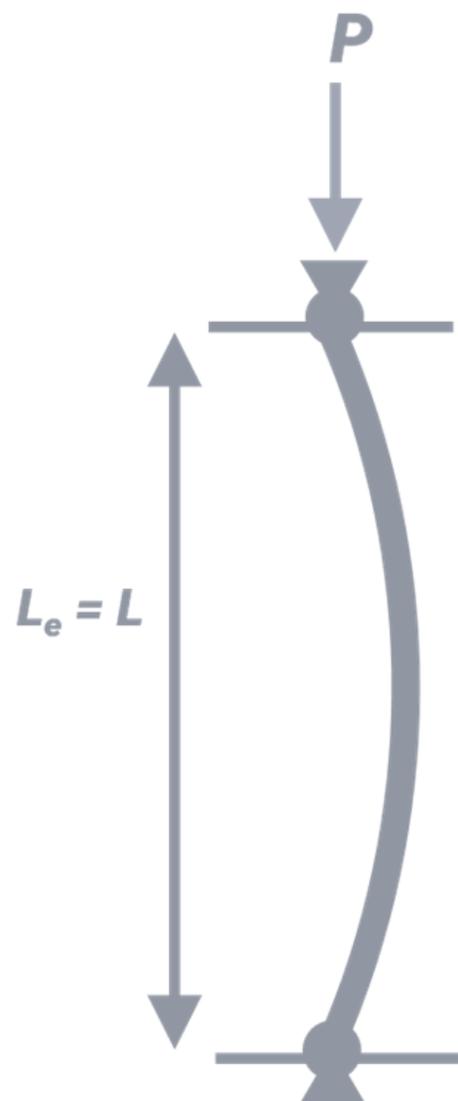
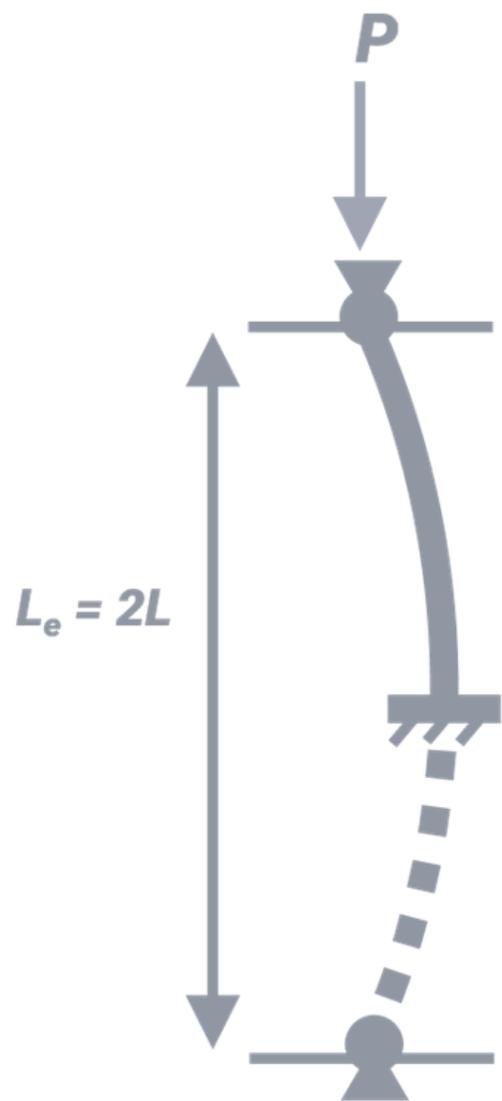
$$\bar{\lambda} = \lambda \lambda_1$$

è possibile ottenere il seguente diagramma:



Si noti, invece, come legami costitutivi diversi portino a diverse curve $\chi - \bar{\lambda}$ (Shanley):





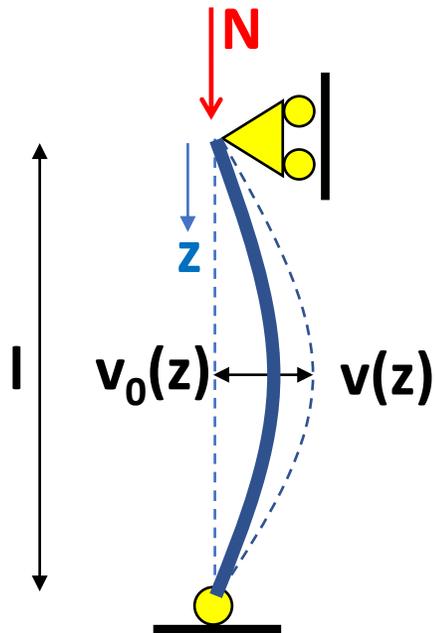
Pinned



Fixed

Stabilità

**Asta imperfetta – Curvatura iniziale
(deviazione rispetto all'asse dell'elemento rettilineo)**



In questo caso l'equazione risolvente assume la forma:

$$M_e = M_i$$

$$-EJv'' = N \cdot (v + v_0)$$

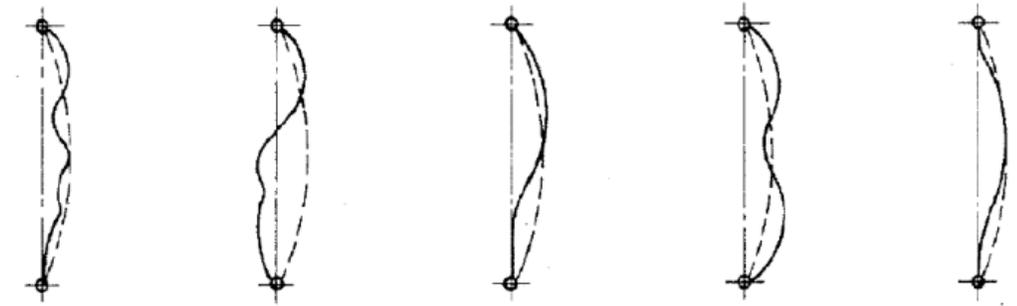
L'equazione differenziale, questa volta non omogenea, è

$$v'' + \frac{N}{EJ}(v + v_0) = 0$$

con v inflessione aggiuntiva e $v_0(z)$ inflessione iniziale. Si assume che la deformata iniziale abbia una forma sinusoidale:

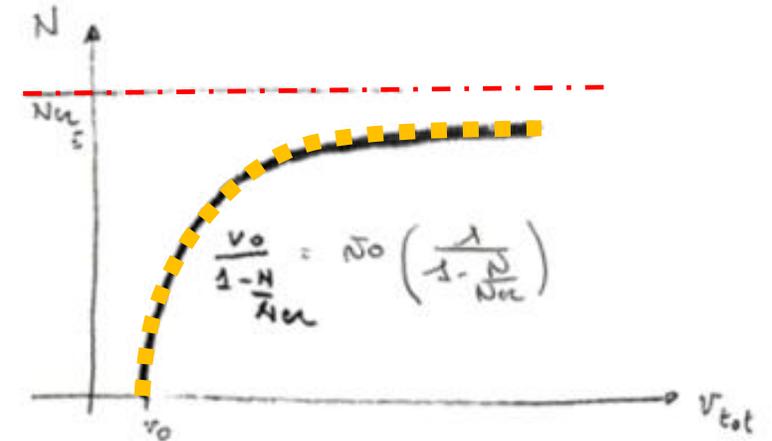
$$v_0(z) = v_0 \sin \frac{\pi z}{l}$$

Dalla figura si nota come l'asta imperfetta tenda al carico critico solo per spostamenti molto grandi.



----- curva assunta

————— deformazione misurata
(funzione del tipo di sezione)



Il momento del secondo ordine che deriva dalla soluzione generale è pari a:

$$M = N \cdot v_{tot} = \frac{N \cdot v_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$$

Stabilità

Asta imperfetta – Eccentricità iniziale

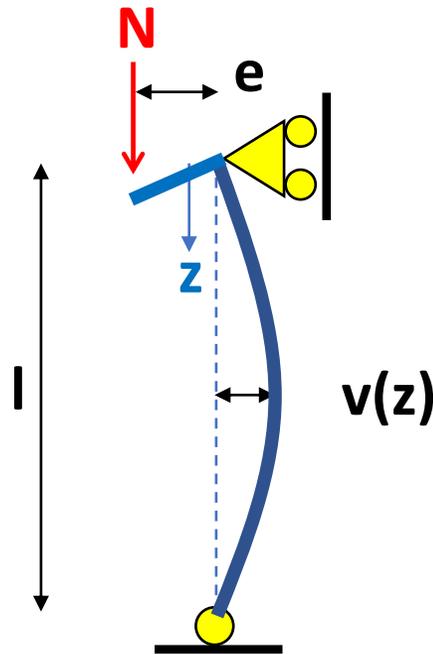
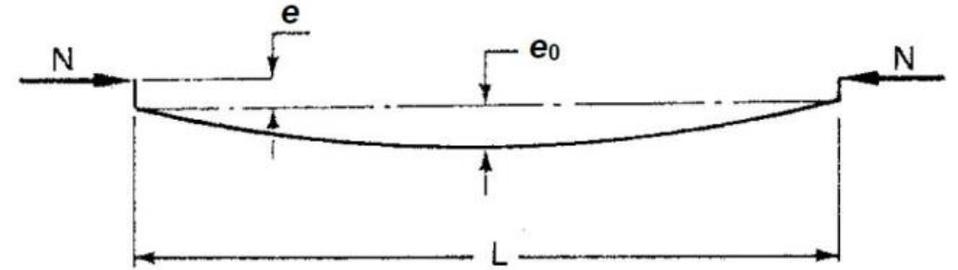
Anche nel caso di eccentricità iniziale l'equazione differenziale che deriva dall'impostazione del problema

$$y' + \frac{N}{EJ}y = -\frac{N \cdot e}{EJ}$$

conduce, dopo opportune semplificazioni, alla stessa formula:

$$M = N(e + y_{max}) \approx \frac{N \cdot e}{1 - \frac{N}{N_E}}$$

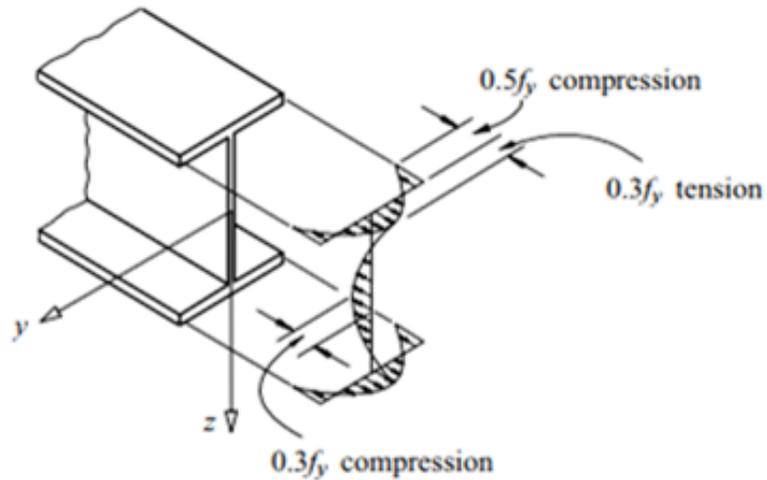
Potrò quindi trattare allo stesso modo l'eccentricità di carico e le imperfezioni dovute a flessioni iniziali.



Stabilità

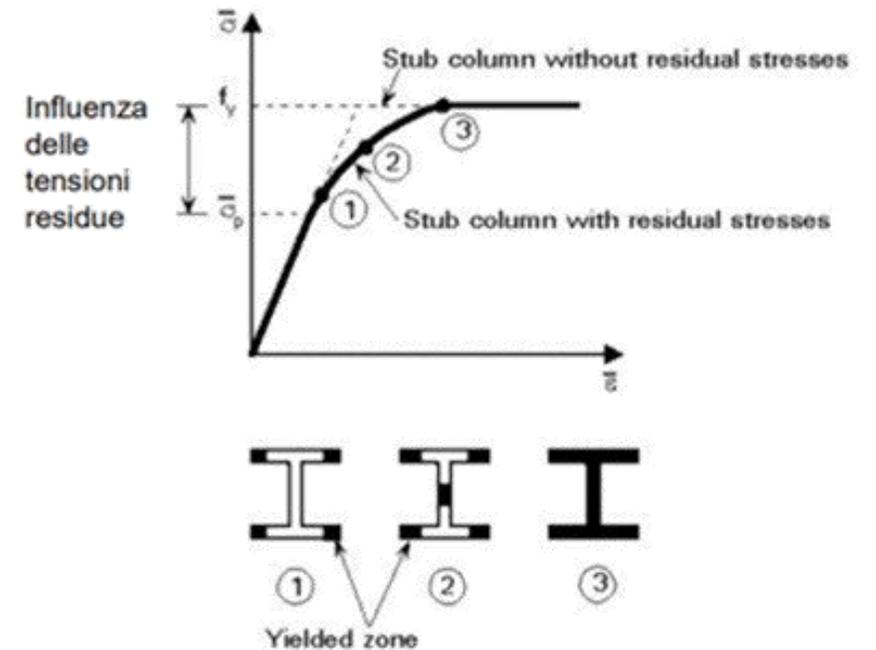
Asta imperfetta – Tensioni residue

Un altro importante fenomeno da tenere in considerazione durante la progettazione delle aste reali è quello delle tensioni residue insite nel materiale: si vengono a creare delle trazioni nella parte nodale a causa delle differenti velocità di raffreddamento.



Questo comporta una perdita di linearità del materiale molto prima del raggiungimento del limite elastico di snervamento; ciò ne comporta un abbassamento. Le tensioni influenzano il comportamento dell'asta per $\sigma_{cr} \geq \bar{\sigma}_p$ e quindi nel campo delle snellezze intermedie.

È evidente che gli effetti dovuti a curvature iniziali, eccentricità iniziali e tensioni residue devono essere considerati contemporaneamente.



Stabilità

Asta imperfetta – Tensioni residue

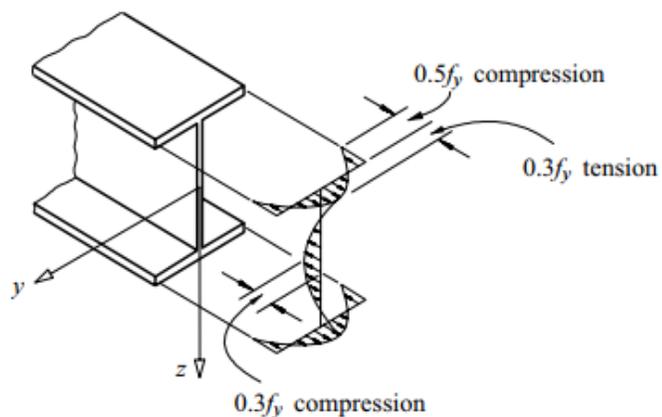


Figure 3.9 Idealised residual stress pattern.

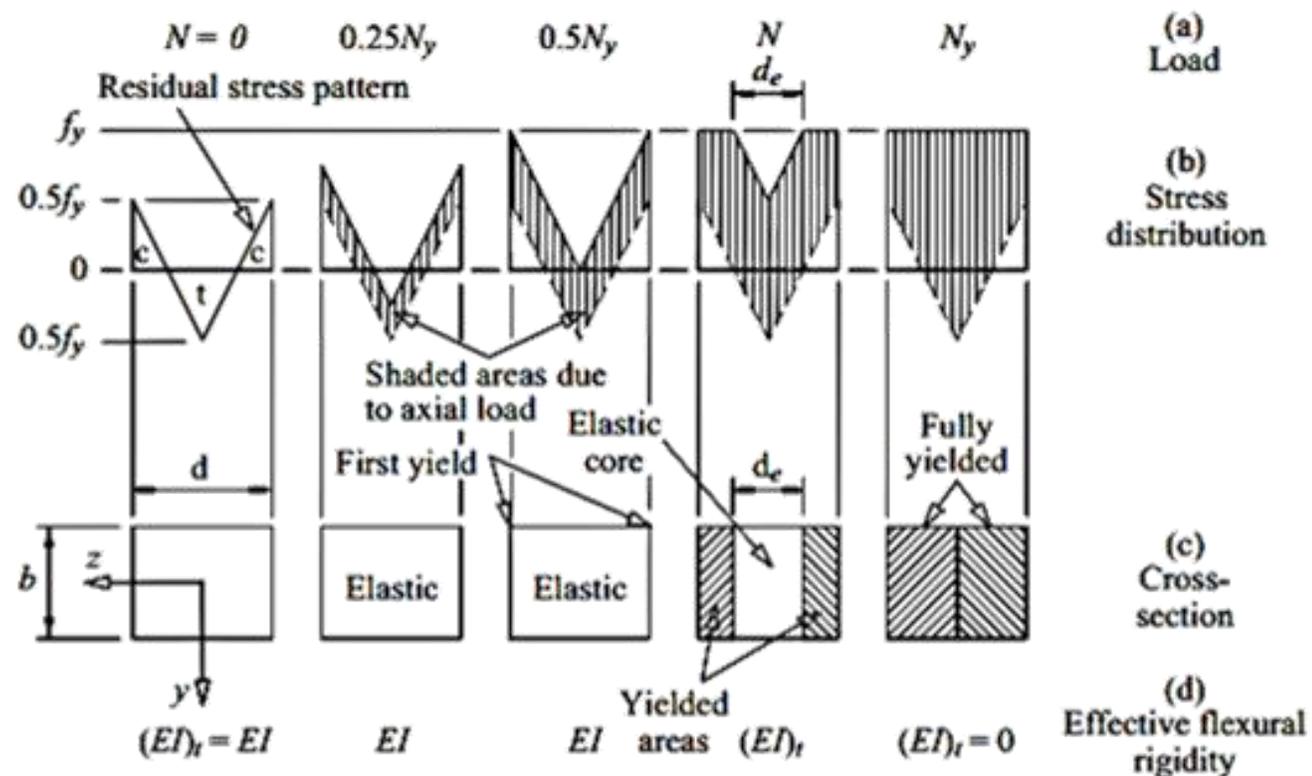
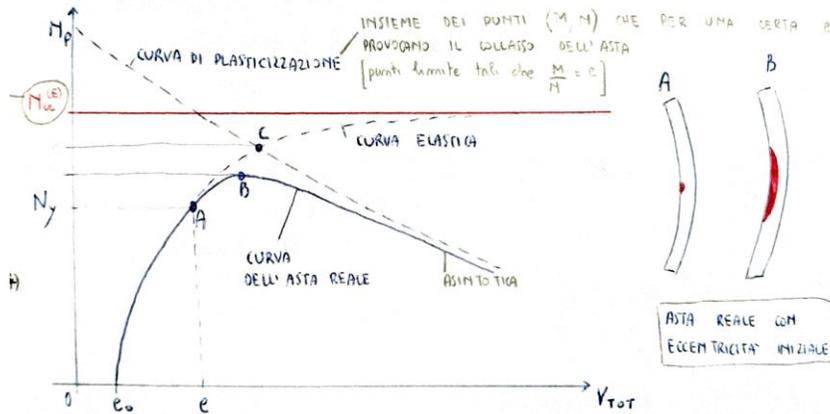


Figure 3.10 Effective section of a member with residual stresses.

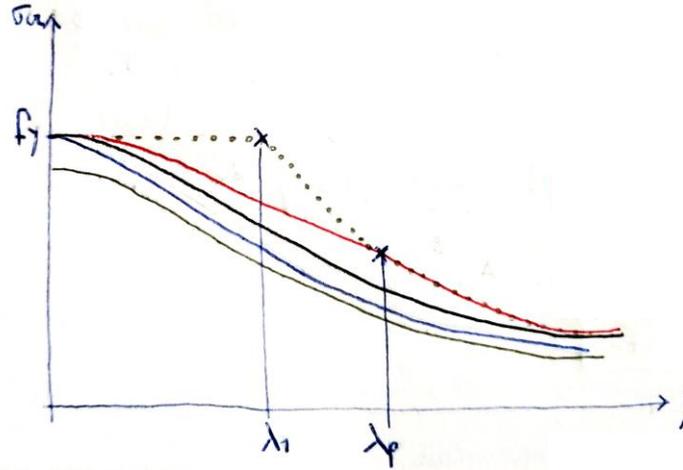
Stabilità – Aste reali

Se si considera l'effetto su un'asta reale dovuto ad una eccentricità iniziale si ha la seguente risposta:



In cui è possibile riconoscere il tratto **AB** di diffusione della plasticizzazione dovuta appunto al prematuro raggiungimento della deformazione causato da e_0 , somma di tutte le imperfezioni a cui è soggetta la trave. Si nota come dal punto di primo snervamento **A** si passi al punto di massimo carico **B** senza mai raggiungere **C**, punto corrispondente all'asta perfetta con legame elastico perfettamente plastico. Sebbene, quindi, il massimo carico raggiungibile sia N_x , per operare a favore di sicurezza si considera N_y .

Diagrammando i vari effetti in termini di $\sigma - \lambda$ possiamo individuare cinque curve significative:



- a asta inizialmente rettilinea elasto-plastica;
- b effetto delle tensioni residue;
- A, B curve dovute ad una curvatura iniziale;
- tratto punto curva dovuta ad una eccentricità iniziale.

Per la determinazione del carico critico N_y è necessario determinare il punto di primo snervamento **A**. Lo spostamento, come detto, è pari a

$$e = \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} = e_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} = e_0 \cdot \alpha$$

con α fattore di amplificazione.

La formula della presso-flessione fornisce il valore di N_x :

$$\frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{W} = f_y$$

ponendo poi $\bar{\sigma} = \frac{N_x}{A}$ può essere riscritta come:

$$\bar{\sigma} + \bar{\sigma} \frac{e \cdot A}{W} = f_y$$

la 13.21, in base alla 13.20, si può porre nella forma:

$$\bar{\sigma} + \bar{\sigma} \frac{e_0}{1 - \frac{\sigma_E}{\bar{\sigma}}} \cdot \frac{A}{W} = f_y$$

con σ_E tensione critica Euleriana pari a

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

La 13.22 si può porre nella forma:

$$(\sigma_E - \bar{\sigma}) \cdot (f_y - \bar{\sigma}) = \sigma_E \bar{\sigma} e_0 \cdot \frac{A}{W}$$

$$(\sigma_E - \bar{\sigma}) \cdot (f_y - \bar{\sigma}) = \sigma_E \bar{\sigma} \eta$$

➡ **formula di Ayrton-Perry** ed è alla base della determinazione del carico critico dell'asta.

Stabilità – Aste reali

Il termine η è pari a $\frac{e_0 A}{W}$ e viene denominato fattore di imperfezione generalizzata.

Al fine di pervenire alla versione della formula contenuta nell'EC3, introduciamo due coefficienti:

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{\sigma}}{f_y} = \frac{N_{max}}{N_{pl}} \quad e \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_y} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_e}}$$

Dividendo la 13.23 per f_y si ottiene:

$$\left(\frac{\sigma_E}{f_y} - \tilde{N} \right) (1 - \tilde{N}) = \tilde{N} \frac{\sigma_E}{f_y} \eta$$

Moltiplicando poi entrambi i membri per f_y/σ_E si ottiene:

$$(1 - \tilde{\lambda}^2 \tilde{N})(1 - \tilde{N}) = \tilde{N} \eta$$

È poi possibile porre la 13.24 come equazione di secondo grado in \tilde{N} :

$$\tilde{\lambda}^2 \tilde{N}^2 - (\tilde{\lambda}^2 + \eta + 1)\tilde{N} + 1 = 0$$

Delle due soluzioni $\tilde{N}_{1,2}$ viene considerata solo quella con il segno negativo, in quanto interessa il carico critico più basso.

$$\tilde{N} = \frac{1 + \eta + \tilde{\lambda}^2 - \sqrt{[1 + \eta + \tilde{\lambda}^2]^2 - 4\tilde{\lambda}^2}}{2\tilde{\lambda}^2} = \chi(\tilde{\lambda}, \eta)$$

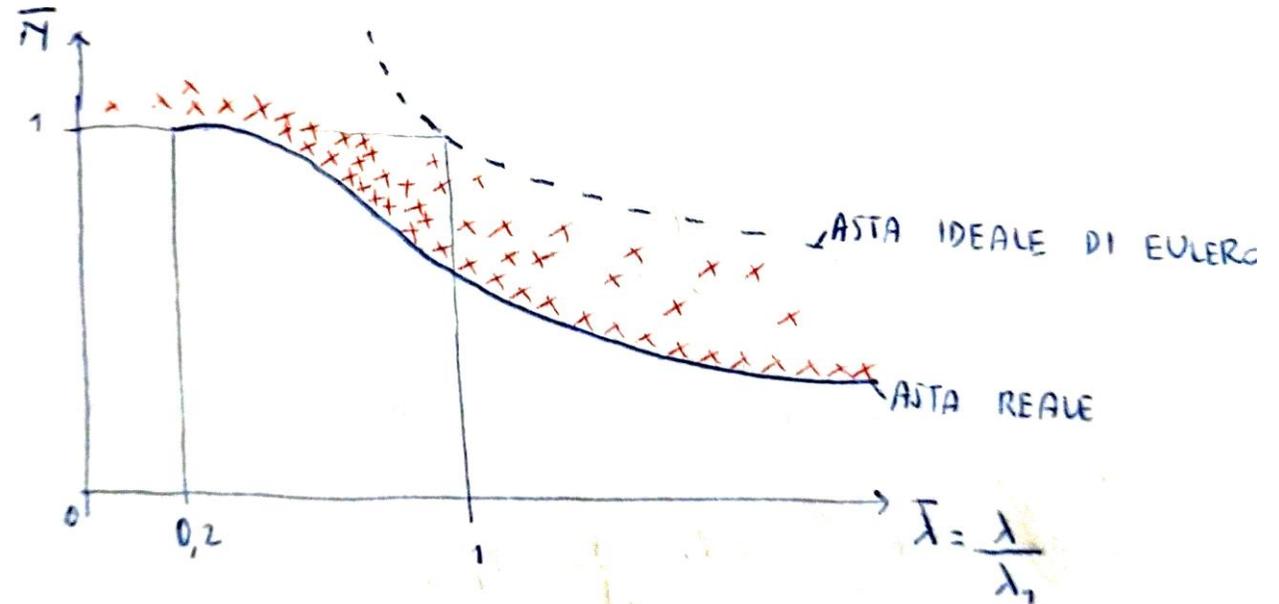
Nell'EC3 si pone

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \eta + \tilde{\lambda}^2) \quad e \quad \chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \tilde{\lambda}^2}}$$

e si assume per η :

$$\eta = \alpha(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_0) = \alpha(\tilde{\lambda} - 0.2)$$

con α coefficiente calibrato su prove sperimentali.



Stabilità – Aste reali

Scelta delle imperfezioni

Il coefficiente η si può porre anche come:

$$\eta = \frac{l \cdot A}{\gamma \cdot W} \quad \text{da} \quad \eta = \frac{e_0 \cdot A}{W}$$

avendo posto

$$\gamma = \frac{l}{e_0}$$

con γ coefficiente di imperfezione geometrica, rappresentante il rapporto tra la lunghezza dell'asta e la curvatura iniziale della stessa.

Si può porre:

$$\lambda = \frac{l}{\rho} \quad \rho^2 = \frac{J}{A} \quad W = \frac{J}{d} = \frac{\rho^2 A}{d}$$

con d distanza tra asse neutro e lembo teso.

$$\eta = \frac{\lambda}{\gamma \cdot (\rho/d)}$$

poiché

$$\lambda = \bar{\lambda} \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{f_y}} = 93,9 \cdot \epsilon \cdot \bar{\lambda}$$

se $f_y = 255 \text{ MPa}$ si ottiene:

$$\eta = \frac{93,9 \epsilon}{\gamma \cdot (\rho/d)} \bar{\lambda} = \alpha_1 \bar{\lambda}$$

Volendo inoltre mettere in conto un plateau per le snellezze minori di 0.2

$$\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0.2)$$

con α coefficiente di imperfezione, variabile tra 0.21 e 0.76.

Secondo l'EC3 quindi l'eccentricità e la curvatura iniziale vengono quantificate pari a:

$$e_0 = \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) \frac{W_{pl}}{A}$$

$$e_0 = \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) \frac{W_{el}}{A}$$

Utilizzando la stessa notazione dell'EC3:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \beta_A A f_y}{\gamma_{M1}} (= \chi \cdot N_{c,Rd})$$

con χ coefficiente di riduzione per la modalità di instabilità pertinente e $N_{c,Rd}$ sforzo normale plastico. Al solito il fattore β_A vale 1 per le sezioni trasversali di Classe 1, 2, o 3; vale A_{eff}/A per le sezioni trasversali di Classe 4.

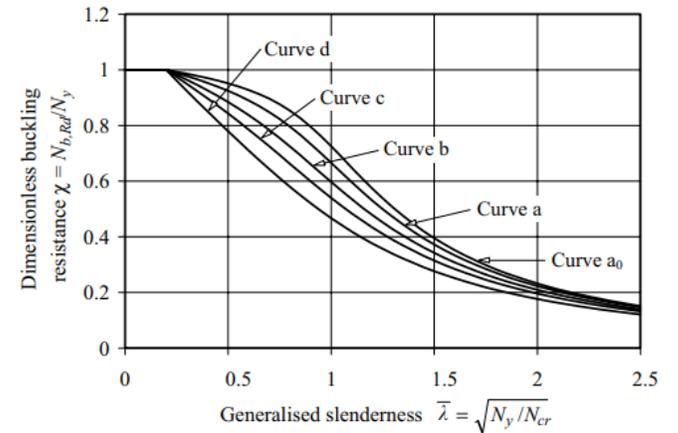
Per le membrature a sezione costante l'EC3 codifica il χ in funzione della snellezza adimensionale pertinente $\bar{\lambda}$:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

con la limitazione $\chi \leq 1$. I vari termini, come già visto, assumono il significato:

$\phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$ dove α è un coefficiente di imperfezione pari a:

Curva di instabilità	a	b	c	d
Coeff. di imperfezione α	0.21	0.34	0.49	0.76



Sezione trasversale	Limiti	Instab. attorno all'asse	Curva di instab.
Sezioni laminare ad I 	h/b > 1,2 :		
	tf ≤ 40mm	y-y z-z	a b
	40mm < tf ≤ 100mm	y-y z-z	b c
	h/b ≤ 1,2 :		
	tf ≤ 100mm	y-y z-z	b c
	tf > 100mm	y-y z-z	d d
Sezioni saldate ad I 	tf ≤ 40mm	y-y z-z	b c
	tf > 40mm	y-y z-z	c d
Sezioni cave 	laminare a caldo	tutti	a
	profilate a freddo - uso di fy,*)	tutti	b
Sez. scatolari saldate 	in generale (eccettuato quanto sotto)	tutti	b
	saldature spesse e b/te < 30 h/te < 30	y-y z-z	c c
Sezioni ad U, L, T e sezioni piene 		tutti	c

*) Vedere il punto 5.5.1.4(4) e la Figura 5.5.2.

Stabilità – Aste reali

Scelta delle imperfezioni

Curva di instabilità	a	b	c	d
Coeff. di imperfezione α	0.21	0.34	0.49	0.76

La scelta di α è subordinata alla scelta dell'appropriata curva di instabilità:

che, come detto, tiene conto del tipo di sezione, delle tensioni residue e delle imperfezioni geometriche. Si noti come per grandi valori di snellezza le curve tendano all'iperbole di Eulero.

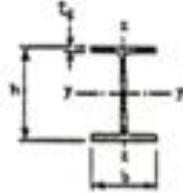
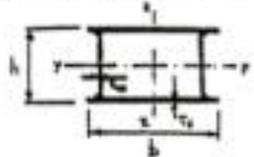
$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta_A A f_y}{N_{cr}}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \sqrt{\beta_A}$$

con λ snellezza per la modalità di instabilità pertinente.

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9 \cdot \epsilon \text{ è la snellezza al limite elastico, quando}$$

$$\epsilon = \sqrt{235/f_y}.$$

Tabella 5.5.3 - Selezione della curva di instabilità per una sezione trasversale.

Sezione trasversale	Limiti	Instab. attorno all'asse	Curva di instab.
Sezioni laminate ad I 	$h/b > 1,2$: $t_f \leq 40\text{mm}$ $40\text{mm} < t_f \leq 100\text{mm}$	$y-y$ $z-z$ $y-y$ $z-z$	a b b c
	$h/b \leq 1,2$: $t_f \leq 100\text{mm}$ $t_f > 100\text{mm}$	$y-y$ $z-z$ $y-y$ $z-z$	b c d d
Sezioni saldate ad I 	$t_f \leq 40\text{mm}$ $t_f > 40\text{mm}$	$y-y$ $z-z$ $y-y$ $z-z$	b c c d
Sezioni cave 	lamine a caldo	tutti	a
	profilate a freddo - uso di f_{yk} *)	tutti	b
	profilate a freddo - uso di f_{yk} *)	tutti	c
Sez. scatolari saldate 	in generale (eccettuato quanto sotto)	tutti	b
	saldature spesse e $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	$y-y$ $z-z$	c c
Sezioni ad U, L, T e sezioni piene 		tutti	c

*) Vedere il punto 5.5.1.4(4) e la Figura 5.5.2.

Riferimenti EC3 – Aste reali

$\bar{\lambda}$	Coefficiente χ			
	a	b	c	d
0.1	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	1.000	1.000	1.000	1.000
0.3	0.977	0.964	0.949	0.923
0.4	0.953	0.926	0.897	0.850
0.5	0.924	0.884	0.843	0.779
0.6	0.890	0.837	0.785	0.710
0.7	0.848	0.784	0.725	0.643
0.8	0.796	0.724	0.662	0.580
0.9	0.734	0.661	0.600	0.521
1	0.666	0.597	0.540	0.467
1.1	0.596	0.535	0.484	0.419
1.2	0.530	0.478	0.434	0.376
1.3	0.470	0.427	0.389	0.339
1.4	0.418	0.382	0.349	0.306
1.5	0.372	0.342	0.315	0.277
1.6	0.333	0.308	0.284	0.251
1.7	0.299	0.278	0.258	0.229
1.8	0.270	0.252	0.235	0.209
1.9	0.245	0.229	0.214	0.192
2	0.223	0.209	0.196	0.177
2.1	0.204	0.192	0.180	0.163
2.2	0.187	0.176	0.166	0.151
2.3	0.172	0.163	0.154	0.140
2.4	0.159	0.151	0.143	0.130
2.5	0.147	0.140	0.132	0.121
2.6	0.136	0.130	0.123	0.113
2.7	0.127	0.121	0.115	0.106
2.8	0.118	0.113	0.108	0.100
2.9	0.111	0.106	0.101	0.094
3	0.104	0.099	0.095	0.088

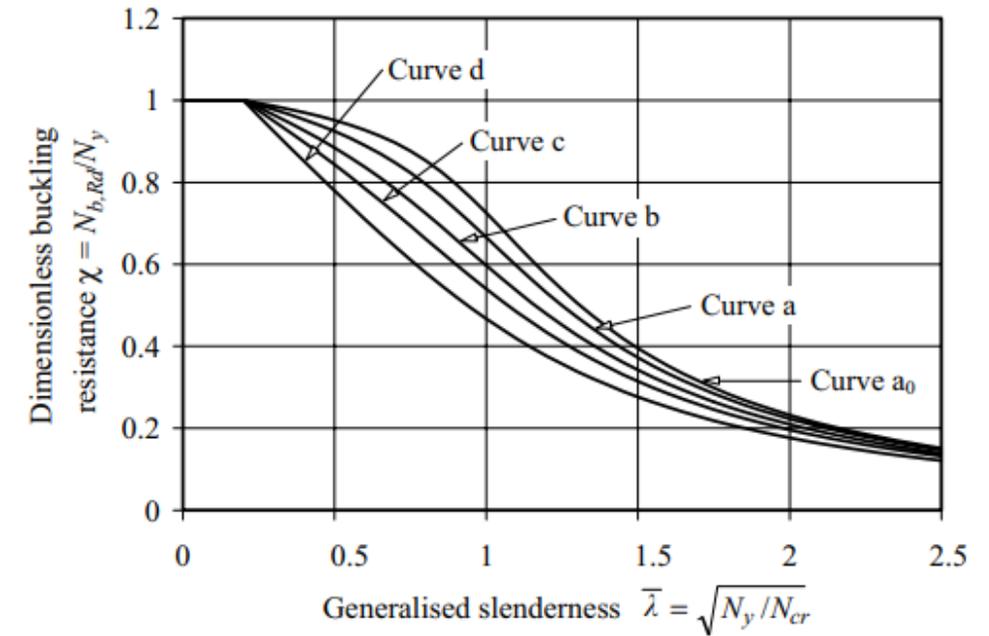


Figure 3.13 Compression resistances of EC3.

Riferimenti EC3 – Aste reali

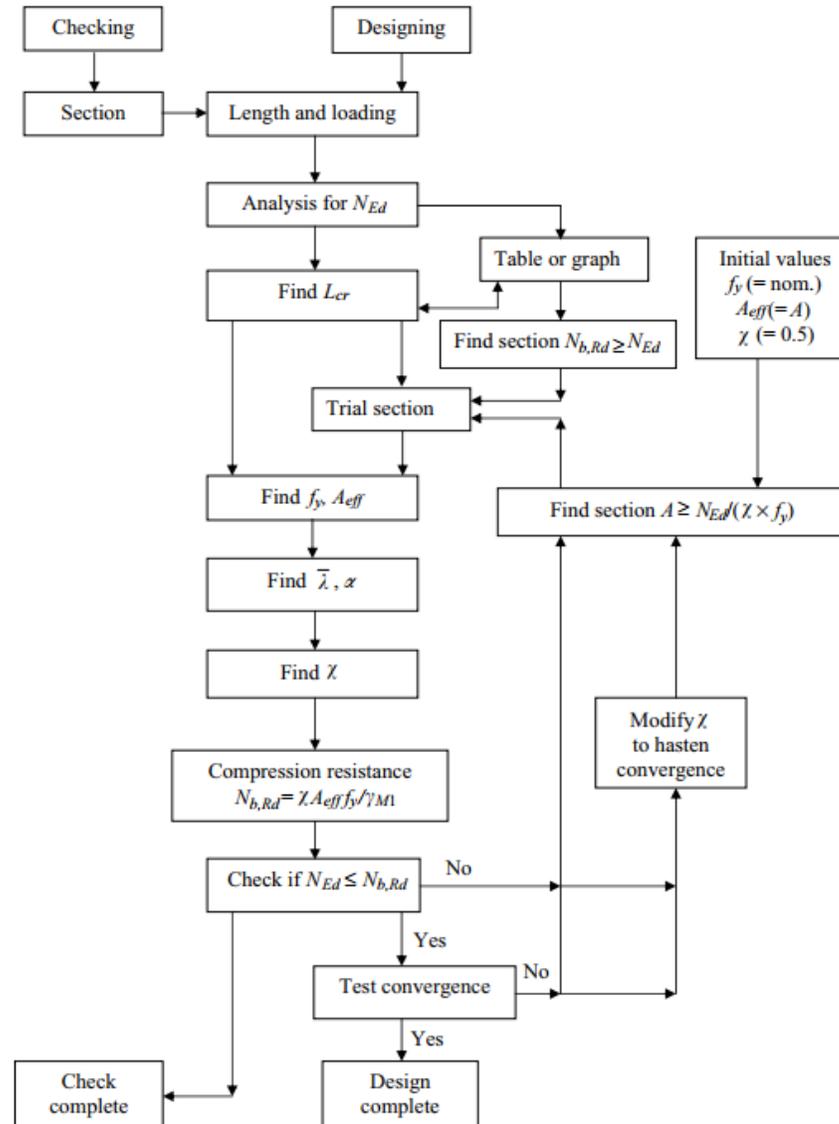


Figure 3.14 Flow chart for the design of compression members.