F. Obersnel
Università degli Studi di Trieste
ufficio 336 (terzo piano) tel. 040 558 2616
e.mail: obersnel@units.it
https://dmi.units.it/ obersnel/

Basi propedeutiche alle scienze radiologiche [493ME]

Modulo di Analisi Matematica 493ME-4

Anno Accademico 2022/2023

Propedeuticità:

Propedeuticità:

Non sono richieste particolari conoscenze preliminari se non quelle di base generalmente studiate nei primi anni delle scuole secondarie di secondo grado.

Propedeuticità:

Non sono richieste particolari conoscenze preliminari se non quelle di base generalmente studiate nei primi anni delle scuole secondarie di secondo grado.

Orario delle lezioni:

Propedeuticità:

Non sono richieste particolari conoscenze preliminari se non quelle di base generalmente studiate nei primi anni delle scuole secondarie di secondo grado.

Orario delle lezioni:

Le lezioni si svolgeranno nelle giornate di
lunedì 7 novembre 16.00 - 17.45,
giovedì 10 novembre 11.00 - 12.45,
giovedì 17 novembre 9.00 - 10.45,
giovedì 24 novembre 9.00 - 10.45,
lunedì 28 novembre 15.00 - 16.45.

Salvo diverse comunicazioni tutte le lezioni si svolgono in presenza presso la sede di Valmaura, aula 121.

Ricevimento studenti e reperibilità docente:

◁ ▷

Ricevimento studenti e reperibilità docente:

Il ricevimento avverrà in presenza nel mio ufficio o in forma telematica attraverso l'applicazione Teams su appuntamento (scrivere una mail).

e-mail: obersnel units.it

http://www.dmi.units.it/˜obersnel

Testi consigliati:

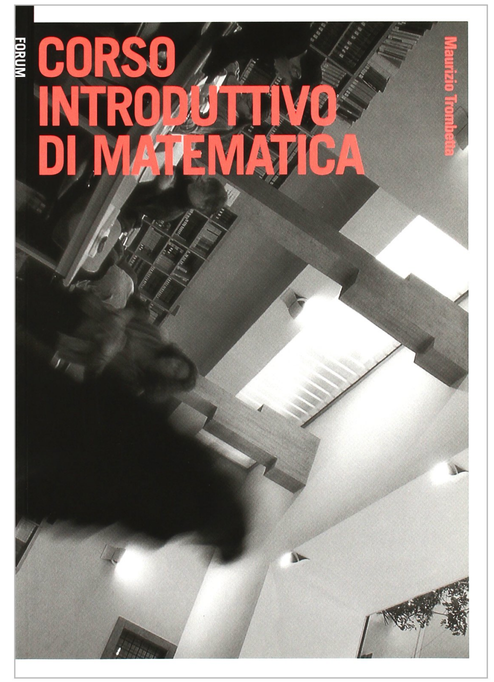
Testi consigliati:

In rete, nella mia pagina e nel sito Moodle dedicato, potete trovare alcune note schematiche sul corso, dove sono riportate essenzialmente le cose indispensabili da sapere, senza esempi e discussione.

◁ ▷

Testi consigliati:

In rete, nella mia pagina e nel sito Moodle dedicato, potete trovare alcune note schematiche sul corso, dove sono riportate essenzialmente le cose indispensabili da sapere, senza esempi e discussione.



V. Villani, G. Gentili, Matematica: comprendere e interpretare fenomeni delle scienze della vita, McGraw-Hill. (Buon testo con un approccio adatto a studenti di materie sanitarie)

M. Trombetta, Corso Introduttivo di Matematica, Forum Ed. Univ., Udine 2004. (testo utile per rispolverare alcune nozioni base di matematica)

Programma

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Nel corso illustreremo alcuni strumenti matematici fondamentali e cercheremo di comprendere qualitativamente alcuni concetti utili nelle applicazioni.

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Nel corso illustreremo alcuni strumenti matematici fondamentali e cercheremo di comprendere qualitativamente alcuni concetti utili nelle applicazioni.

Gli argomenti principali che speriamo di riuscire a trattare nel tempo esiguo a nostra disposizione sono i seguenti:

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Nel corso illustreremo alcuni strumenti matematici fondamentali e cercheremo di comprendere qualitativamente alcuni concetti utili nelle applicazioni.

Gli argomenti principali che speriamo di riuscire a trattare nel tempo esiguo a nostra disposizione sono i seguenti:

- **funzioni e loro rappresentazione,**

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Nel corso illustreremo alcuni strumenti matematici fondamentali e cercheremo di comprendere qualitativamente alcuni concetti utili nelle applicazioni.

Gli argomenti principali che speriamo di riuscire a trattare nel tempo esiguo a nostra disposizione sono i seguenti:

- **funzioni e loro rappresentazione,**
- **funzioni reali di variabile reale elementari (potenze e radici, funzioni razionali, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche),**

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Nel corso illustreremo alcuni strumenti matematici fondamentali e cercheremo di comprendere qualitativamente alcuni concetti utili nelle applicazioni.

Gli argomenti principali che speriamo di riuscire a trattare nel tempo esiguo a nostra disposizione sono i seguenti:

- funzioni e loro rappresentazione,
- funzioni reali di variabile reale elementari (potenze e radici, funzioni razionali, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche),
- operazioni tra funzioni, composizione con funzioni lineari e modifiche del grafico,

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Nel corso illustreremo alcuni strumenti matematici fondamentali e cercheremo di comprendere qualitativamente alcuni concetti utili nelle applicazioni.

Gli argomenti principali che speriamo di riuscire a trattare nel tempo esiguo a nostra disposizione sono i seguenti:

- **funzioni e loro rappresentazione,**
- **funzioni reali di variabile reale elementari (potenze e radici, funzioni razionali, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche),**
- **operazioni tra funzioni, composizione con funzioni lineari e modifiche del grafico,**
- **decomposizione di un segnale periodico in armoniche, cenni alla serie di Fourier,**

Programma

Il programma dettagliato del corso, aggiornato generalmente settimanalmente, sarà reperibile nella mia pagina web e nel sito Moodle dedicato.

Le slides presentate a lezione saranno pubblicate nel sito Moodle.

Nel corso illustreremo alcuni strumenti matematici fondamentali e cercheremo di comprendere qualitativamente alcuni concetti utili nelle applicazioni.

Gli argomenti principali che speriamo di riuscire a trattare nel tempo esiguo a nostra disposizione sono i seguenti:

- **funzioni e loro rappresentazione,**
- **funzioni reali di variabile reale elementari (potenze e radici, funzioni razionali, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche),**
- **operazioni tra funzioni, composizione con funzioni lineari e modifiche del grafico,**
- **decomposizione di un segnale periodico in armoniche, cenni alla serie di Fourier,**
- **cenni ai concetti di limite, derivata, integrale definito.**

Procedimenti valutativi.

Procedimenti valutativi.

Nella valutazione finale si terrà conto della partecipazione attiva degli studenti a lezione e di un colloquio orale.

Procedimenti valutativi.

Nella valutazione finale si terrà conto della partecipazione attiva degli studenti a lezione e di un colloquio orale.

Nel caso di esito negativo, lo studente può ripetere il colloquio dopo aver provveduto a migliorare la propria preparazione.

Il calendario per gli appelli d'esame verrà concordato con gli studenti.

Procedimenti valutativi.

Nella valutazione finale si terrà conto della partecipazione attiva degli studenti a lezione e di un colloquio orale.

Nel caso di esito negativo, lo studente può ripetere il colloquio dopo aver provveduto a migliorare la propria preparazione.

Il calendario per gli appelli d'esame verrà concordato con gli studenti.

Valutazione del corso.

Procedimenti valutativi.

Nella valutazione finale si terrà conto della partecipazione attiva degli studenti a lezione e di un colloquio orale.

Nel caso di esito negativo, lo studente può ripetere il colloquio dopo aver provveduto a migliorare la propria preparazione.

Il calendario per gli appelli d'esame verrà concordato con gli studenti.

Valutazione del corso.

Al termine delle lezioni vi verrà chiesto di esprimere una valutazione sul corso da voi seguito. La procedura è elettronica. L'iscrizione agli esami non è possibile se non si è prima provveduto a dare una valutazione del corso.

Alcune notazioni

Alcune notazioni

$\mathbb{N}$ **è l'insieme dei numeri naturali** $0, 1, 2, 3, \ldots$**.**
$\mathbb{N}^+$ **è l'insieme dei numeri naturali positivi** $1, 2, 3, \ldots$**.**
$\mathbb{Z}$ **è l'insieme dei numeri interi** $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$**.**

Alcune notazioni

$\mathbb{N}$ **è l'insieme dei numeri naturali** $0, 1, 2, 3, \ldots$**.**
$\mathbb{N}^+$ **è l'insieme dei numeri naturali positivi** $1, 2, 3, \ldots$**.**
$\mathbb{Z}$ **è l'insieme dei numeri interi** $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$**.**

$\mathbb{Q}$ **è l'insieme dei numeri razionali** $\frac{m}{n}$**, con** $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$**,** $n \neq 0$**, dove si identificano frazioni equivalenti, cioè si pone**

$$\frac{m}{n} = \frac{j}{k} \text{ se } mk = nj.$$

$\mathbb{R}$ **è l'insieme dei numeri reali.**
$\mathbb{C}$ **è l'insieme dei numeri complessi.**

Alcune notazioni

$\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali $0, 1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{N}^+$ è l'insieme dei numeri naturali positivi $1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali $\frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, dove si identificano frazioni equivalenti, cioè si pone

$$\frac{m}{n} = \frac{j}{k} \text{ se } mk = nj.$$

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$ è l'insieme dei numeri complessi.

Il simbolo $\subset$ o $\subseteq$ indica l'inclusione tra insiemi. $A \subseteq B$ significa A è contenuto in B (si noti che $A \subseteq A$ per ogni insieme A). $A \subseteq B$ significa che ogni elemento a di A è anche un elemento di B.

Alcune notazioni

$\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali $0, 1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{N}^+$ è l'insieme dei numeri naturali positivi $1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali $\frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, dove si identificano frazioni equivalenti, cioè si pone

$$\frac{m}{n} = \frac{j}{k} \text{ se } mk = nj.$$

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$ è l'insieme dei numeri complessi.

Il simbolo $\subset$ o $\subseteq$ indica l'inclusione tra insiemi. $A \subseteq B$ significa A è contenuto in B (si noti che $A \subseteq A$ per ogni insieme A). $A \subseteq B$ significa che ogni elemento a di A è anche un elemento di B.
Il simbolo $\in$ indica l'appartenenza ad un insieme. $x \in X$ significa x è un elemento dell'insieme X.

Gli elementi di un insieme sono spesso indicati tra parentesi graffe, per elencazione o descritti da una proprietà.

◁ ▷

Gli elementi di un insieme sono spesso indicati tra parentesi graffe, per elencazione o descritti da una proprietà.

Esempi: $X = \{a, b, c \ldots z\}$**;** $Y = \{$ **studenti del corso** $\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n^2+1}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$**.**

Gli elementi di un insieme sono spesso indicati tra parentesi graffe, per elencazione o descritti da una proprietà.

Esempi: $X = \{a, b, c \dots z\}$**;** $Y = \{$ **studenti del corso** $\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n^2+1}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$**.**

Unione di insiemi: $A \cup B = \{x : x \in A$ **oppure** $x \in B\}$.

Intersezione di insiemi: $A \cap B = \{x : x \in A$ **e** $x \in B\}$.

◁ ▷

Gli elementi di un insieme sono spesso indicati tra parentesi graffe, per elencazione o descritti da una proprietà.

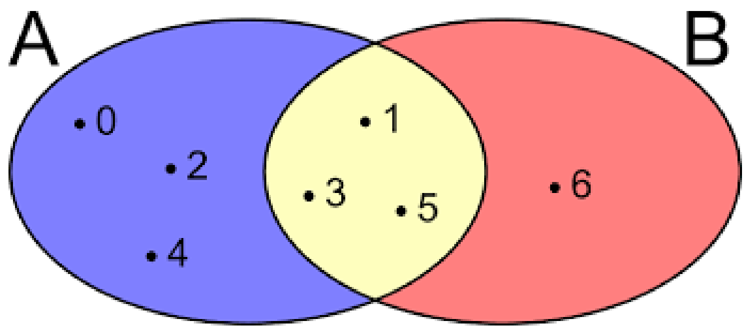
Esempi: $X = \{a, b, c \ldots z\}$; $Y = \{$ **studenti del corso** $\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n^2+1}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.

Unione di insiemi: $A \cup B = \{x : x \in A$ **oppure** $x \in B\}$.

Intersezione di insiemi: $A \cap B = \{x : x \in A$ **e** $x \in B\}$.

Esempio. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$.



◁ ▷

Gli elementi di un insieme sono spesso indicati tra parentesi graffe, per elencazione o descritti da una proprietà.

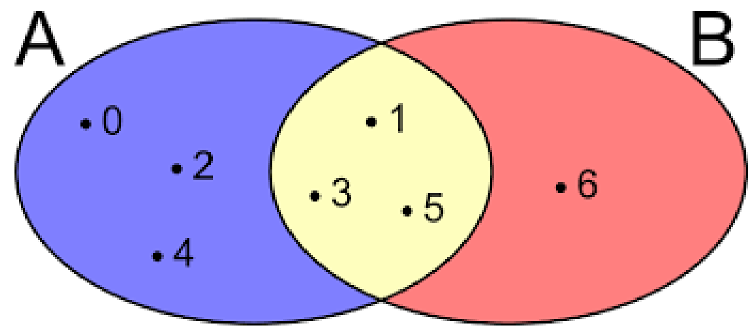
Esempi: $X = \{a, b, c \dots z\}$; $Y = \{$ **studenti del corso** $\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n^2+1}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.

Unione di insiemi: $A \cup B = \{x : x \in A$ **oppure** $x \in B\}$.

Intersezione di insiemi: $A \cap B = \{x : x \in A$ **e** $x \in B\}$.

Esempio. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$.



$A \cap B = \{1, 3, 5\}$. $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 6\}$.

◁ ▷

Gli elementi di un insieme sono spesso indicati tra parentesi graffe, per elencazione o descritti da una proprietà.

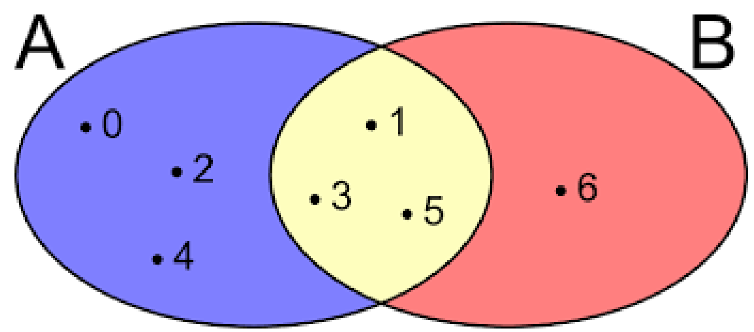
Esempi: $X = \{a, b, c \dots z\}$; $Y = \{$ **studenti del corso** $\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2n^2+1}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$**.**

Unione di insiemi: $A \cup B = \{x : x \in A$ **oppure** $x \in B\}$.

Intersezione di insiemi: $A \cap B = \{x : x \in A$ **e** $x \in B\}$.

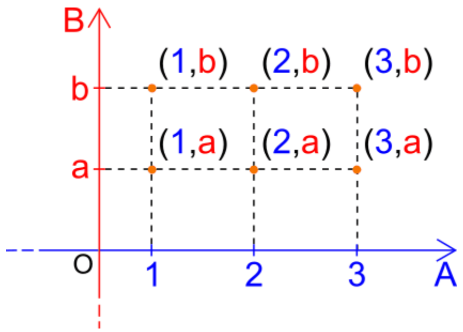
Esempio. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$**,** $B = \{1, 3, 5, 6\}$**.**



$A \cap B = \{1, 3, 5\}$**.** $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 6\}$.

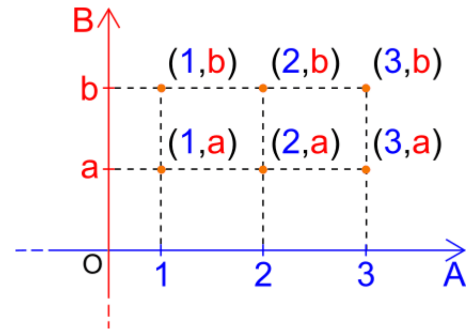
Si osservi che, per ogni A, B**, si ha** $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ **e** $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$**.**

Il prodotto cartesiano $A \times B$ tra due insiemi A e B è l'insieme delle coppie (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$.



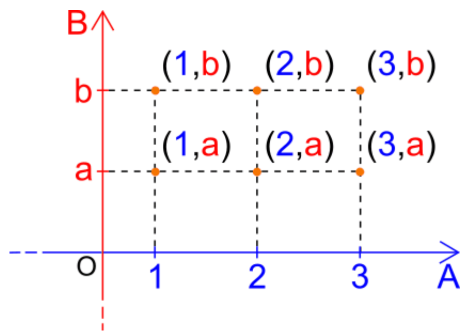
◁ ▷

Il prodotto cartesiano $A \times B$ tra due insiemi A e B è l'insieme delle coppie (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$.



Si osservi che $(a, b) \neq (b, a)$

Il prodotto cartesiano $A \times B$ tra due insiemi A e B è l'insieme delle coppie (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$.

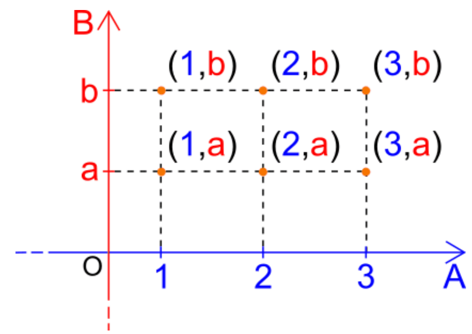


Si osservi che $(a, b) \neq (b, a)$

Esempio: $A = \{1, 2, 3\}$**,** $B = \{a, b\}$**.** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

◁ ▷

Il prodotto cartesiano $A \times B$ tra due insiemi A e B è l'insieme delle coppie (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$.



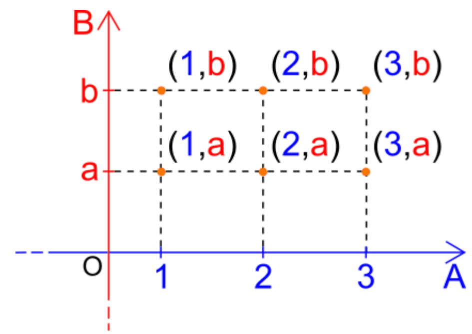
Si osservi che $(a, b) \neq (b, a)$

Esempio: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Se gli insiemi A e B sono finiti, A con n elementi, B con k elementi, l'insieme $A \times B$ ha

◁ ▷

Il prodotto cartesiano $A \times B$ tra due insiemi A e B è l'insieme delle coppie (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$.



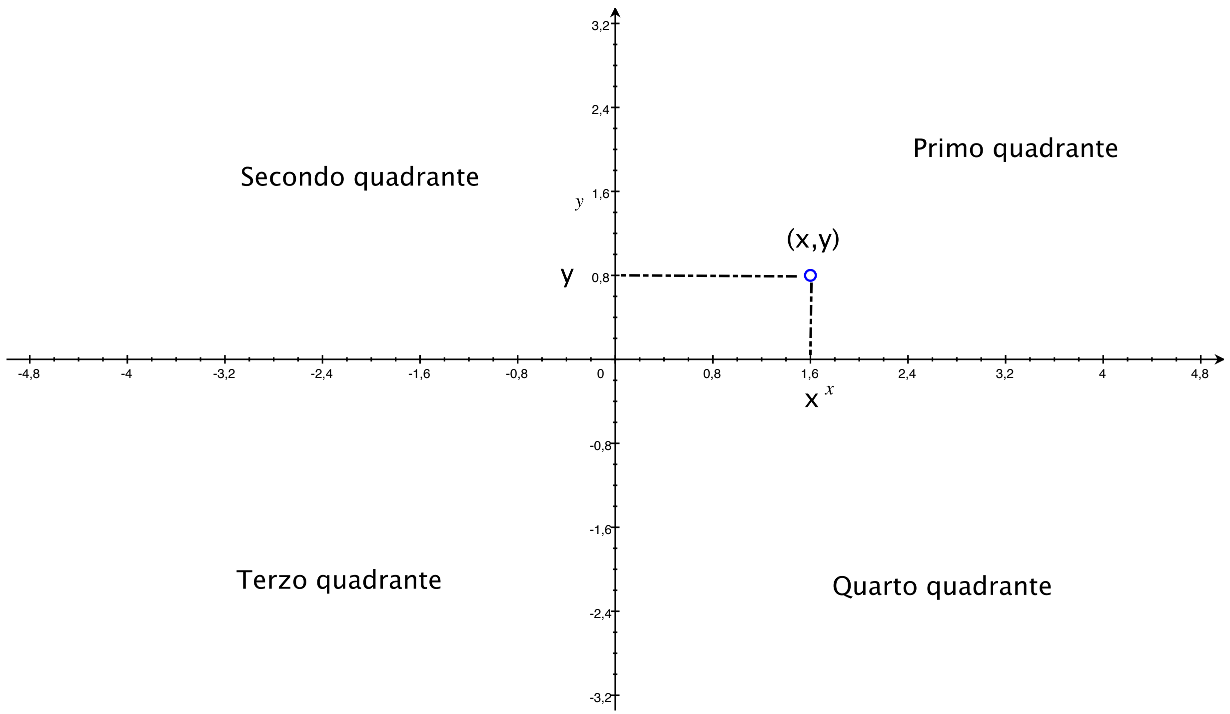
Si osservi che $(a, b) \neq (b, a)$

Esempio: $A = \{1, 2, 3\}$**,** $B = \{a, b\}$**.** $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Se gli insiemi A e B sono finiti, A con n elementi, B con k elementi, l'insieme $A \times B$ ha $m \cdot k$ elementi.

◁ ▷

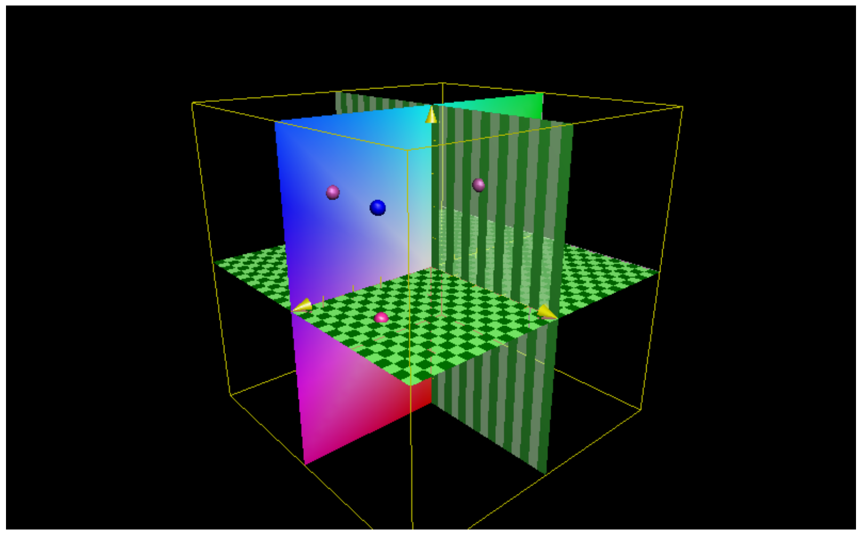
Se $A = B = \mathbb{R}$ il prodotto cartesiano è il piano $\mathbb{R}^2$, i cui elementi sono coppie di numeri reali del tipo (x, y); x e y sono le coordinate del punto (x, y); il primo elemento si dice ascissa, il secondo ordinata.

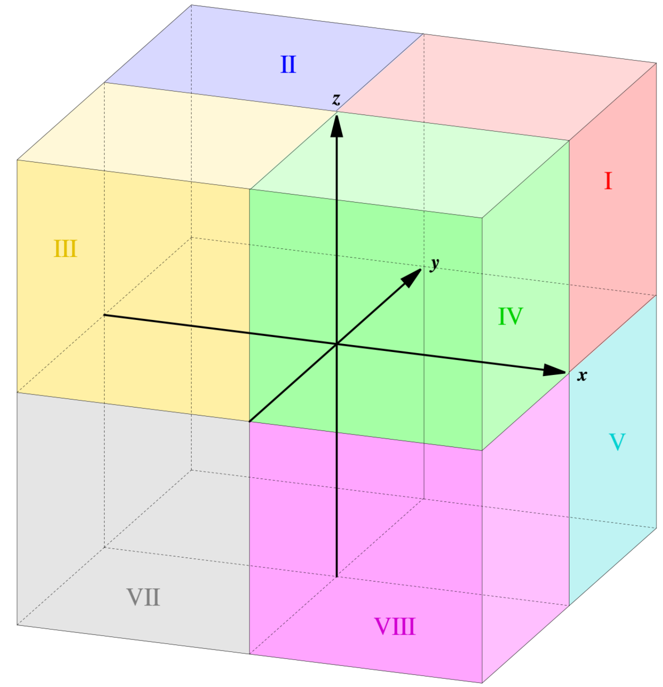


Nel piano cartesiano individuiamo gli assi cartesiani (x e y), l'origine $(0, 0)$. Il punto $(x, 0)$ è la proiezione sull'asse x del punto (x, y), il punto $(0, y)$ è la proiezione sull'asse y del punto (x, y).

Gli assi cartesiani dividono il piano in quattro regioni angolari, delle quadranti.

Analogamente si può definire lo spazio $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Un punto di $\mathbb{R}^3$ è una terna di numeri reali (coordinate) del tipo (x, y, z): ascissa, ordinata, quota.





Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ individuiamo gli assi cartesiani (x, y e z), i piani cartesiani (x, y; x, z e y, z), l'origine $(0, 0, 0)$. Il punto $(x, y, 0)$ è la proiezione sul piano x, y del punto (x, y, z), il punto $(0, y, z)$ è la proiezione sul piano y, z del punto (x, y, z), il punto $(x, 0, z)$ è la proiezione sul piano x, z del punto (x, y, z).

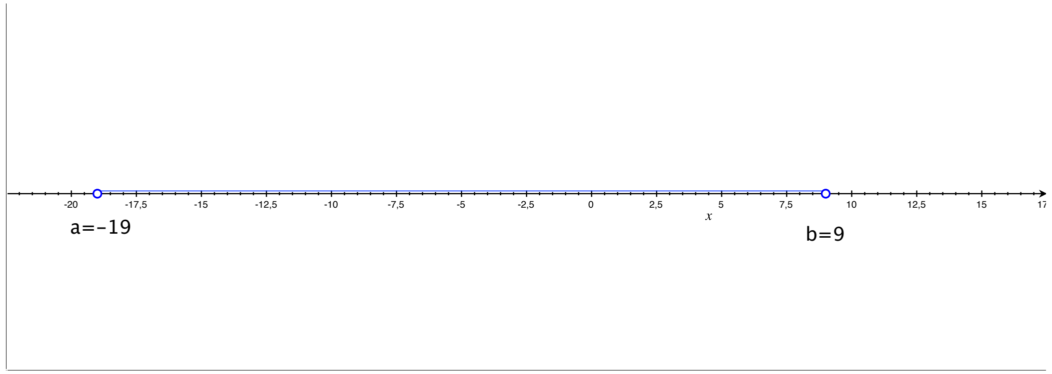
I piani cartesiani dividono lo spazio in otto regioni angolari, delle ottanti.

Notazione di intervallo

siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo allora

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$; **(intervallo chiuso e limitato)**

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; **(intervallo aperto e limitato)**



$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$; **(intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra)**

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$; **(intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra)**

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$; **(intervallo chiuso e illimitato inferiormente)**

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$; **(intervallo aperto e illimitato inferiormente)**

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$; **(intervallo chiuso e illimitato superiormente)**

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$; **(intervallo aperto e illimitato superiormente)**

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Funzioni

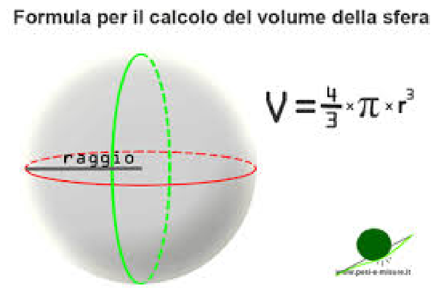
Funzioni

Una funzione è una “legge” che mette in relazione tra loro alcuni oggetti

Funzioni

Una funzione è una "legge" che mette in relazione tra loro alcuni oggetti

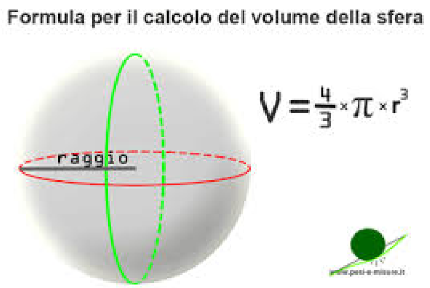
Esempio: il volume della sfera è funzione della lunghezza del raggio r: $V = V(r)$.



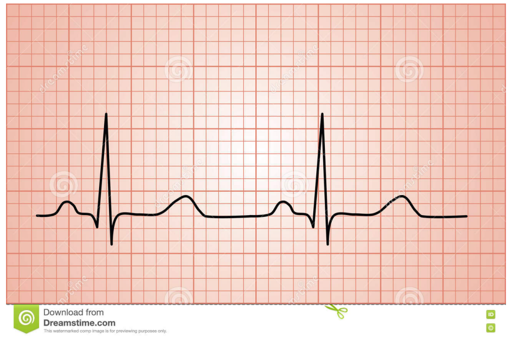
Funzioni

Una funzione è una "legge" che mette in relazione tra loro alcuni oggetti

Esempio: il volume della sfera è funzione della lunghezza del raggio r: $V = V(r)$.



Esempio: l'elettrocardiogramma rappresenta la differenza di potenziale generata dall'attività elettrica del cuore nel tempo: $A = A(t)$.

◁ ▷

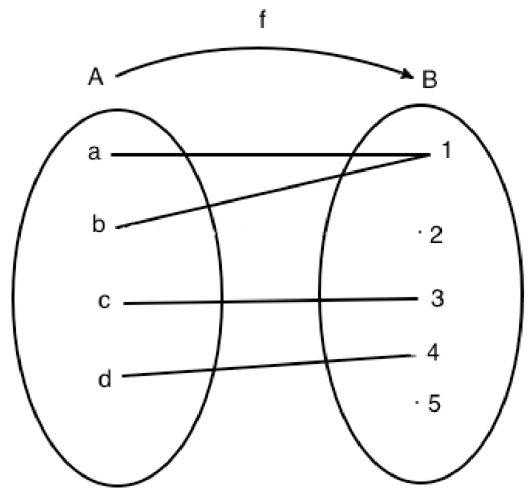
Esempio: il tempo richiesto per effettuare un determinato esame clinico:

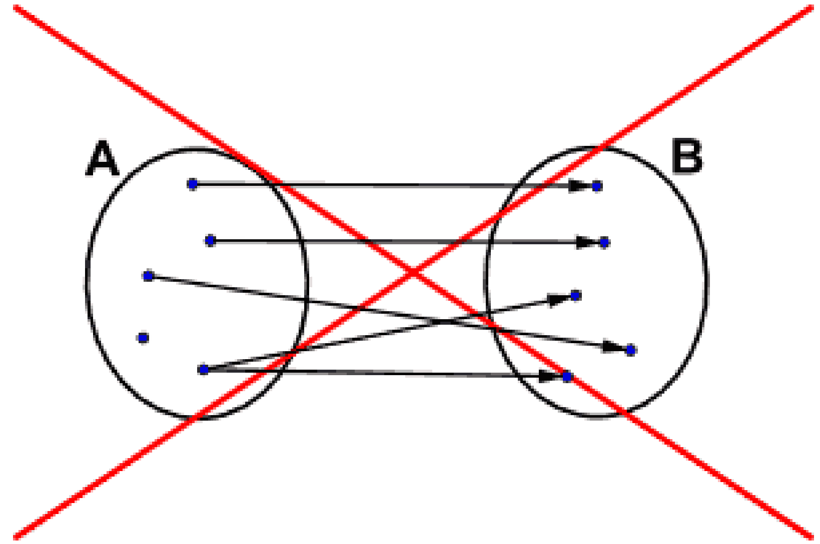
$$T = T(esame).$$

TEMPI / TIPO DI ESAME	15'	20'	30'	45'
Rx tradizionale (per segmento)	x			
Esame contrastografico os		x		
Esame contrastografico per e.v.			x	
TC senza/con mdc			x	
Ricostruzioni elettroniche	x			
Ecografia		x		
RM con e senza mdc				x

Funzioni tra insiemi

• Una funzione $f : A \to B$ è una relazione tra gli oggetti di A e gli oggetti di B che soddisfa la proprietà seguente:
“ad ogni elemento di A viene associato uno ed un solo elemento di B”





L’insieme A si dice il dominio della funzione, l’insieme B si dice il codominio della funzione.

◁ ▷

Esempio.

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$.

Ci sono 8 funzioni da A a B:

$f_1 : A \to B$ $f_1(a) = 0$, $f_1(b) = 0$, $f_1(c) = 0$.

$f_2 : A \to B$ $f_2(a) = 0$, $f_2(b) = 0$, $f_2(c) = 1$.

$f_3 : A \to B$ $f_3(a) = 0$, $f_3(b) = 1$, $f_3(c) = 0$.

$f_4 : A \to B$ $f_4(a) = 0$, $f_4(b) = 1$, $f_4(c) = 1$.

$f_5 : A \to B$ $f_5(a) = 1$, $f_5(b) = 0$, $f_5(c) = 0$.

$f_6 : A \to B$ $f_6(a) = 1$, $f_6(b) = 0$, $f_6(c) = 1$.

$f_7 : A \to B$ $f_7(a) = 1$, $f_7(b) = 1$, $f_7(c) = 0$.

$f_8 : A \to B$ $f_8(a) = 1$, $f_8(b) = 1$, $f_8(c) = 1$.

◁ ▷

Esempio: le funzioni costanti.

Siano Xe Y due insiemi qualsiasi non vuoti. Sia $\alpha \in Y$ un elemento dell'insieme Y. La funzione $f : X \to Y$ definita da $f(x) = \alpha$ per ogni $x \in X$ si dice funzione costante.

Esempio: la funzione identica.

Sia X un insieme qualsiasi non vuoto. La funzione $f : X \to X$ definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in X$ si dice funzione identica dell'insieme X.

La funzione identica si indica talvolta con 1_X.

◁ ▷

Esempio: le successioni.

Sia Y un insieme qualsiasi non vuoto.
Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \to Y$.

Considerare una successione significa "assegnare un numero" agli elementi di Y, costruire un ordine.

◁ ▷

Esempio: le successioni.

Sia Y un insieme qualsiasi non vuoto.
Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \to Y$.

Considerare una successione significa "assegnare un numero" agli elementi di Y, costruire un ordine.

Si dice successione anche una funzione definita su un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ o anche di $\mathbb{Z}$.

Esempio: le successioni.

Sia Y un insieme qualsiasi non vuoto.
Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \to Y$.

Considerare una successione significa "assegnare un numero" agli elementi di Y, costruire un ordine.

Si dice successione anche una funzione definita su un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ o anche di $\mathbb{Z}$.

Si usa scrivere a_n (o x_n, y_n, ecc.) anziché $f(n)$. La successione si indica solitamente con $\left(x_n\right)_n$ o scritture simili.

Esempio: le successioni.

Sia Y un insieme qualsiasi non vuoto.
Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \to Y$.

Considerare una successione significa "assegnare un numero" agli elementi di Y, costruire un ordine.

Si dice successione anche una funzione definita su un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ o anche di $\mathbb{Z}$.

Si usa scrivere a_n (o x_n, y_n, ecc.) anziché $f(n)$. La successione si indica solitamente con $\big(x_n\big)_n$ o scritture simili.

Esempio. Successione costante: $x_n = \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio: elenco gli studenti assegnando un numero corrispondente:

Esempio. $x_n = \frac{1}{n}$ **per** $n \geq 1$

◁ ▷

Esempio. $x_n = \frac{1}{n}$ **per** $n \geq 1$

Esempio. $x_n = (-1)^n$

Esempio. $x_n = \frac{1}{n}$ **per** $n \geq 1$

Esempio. $x_n = (-1)^n$

Esempio. $x_n = 2n + 1$

Esempio. $x_n = \frac{1}{n}$ **per** $n \geq 1$

Esempio. $x_n = (-1)^n$

Esempio. $x_n = 2n + 1$

Esempio. $x_n = \frac{n\pi^n + 2}{\sin(n^2 - 1) + n}$

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c **(dove** $c \in \mathbb{R}$ **è una costante fissata):**
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

$-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

$-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
(Progressione aritmetica di ragione $c = 4$).

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

$-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
(Progressione aritmetica di ragione $c = 4$).

Progressione geometrica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$ **per ogni** n**.**

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c **(dove** $c \in \mathbb{R}$ **è una costante fissata):**
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

$-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
(Progressione aritmetica di ragione $c = 4$**).**

Progressione geometrica di ragione c **(dove** $c \in \mathbb{R}$ **è una costante fissata):**
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0\, c^n$**.**

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

$-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
(Progressione aritmetica di ragione $c = 4$**).**

Progressione geometrica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0\, c^n$**.**
$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

◁ ▷

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

$-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
(Progressione aritmetica di ragione $c = 4$).

Progressione geometrica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0\, c^n$**.**
$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

(Progressione geometrica di ragione $c = \frac{1}{2}$).

Alcune successioni importanti.

Progressione aritmetica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $a_{n+1} - a_n = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0 + nc$**.**

$-7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
(Progressione aritmetica di ragione $c = 4$).

Progressione geometrica di ragione c (dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata):
$(a_n)_n$ **con la proprietà** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c$ **per ogni** n**.**

Si ha $a_n = a_0\, c^n$**.**
$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

(Progressione geometrica di ragione $c = \frac{1}{2}$).

Successione di Fibonacci: $x_0 = 1, x_1 = 1$**,** $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$**.**
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$

Il grafico di una funzione.

- **Diremo grafico di una funzione $f : A \to B$ il sottoinsieme Γ del prodotto cartesiano $A \times B$ definito da**

$$\Gamma = \{\big(a, f(a)\big) \in A \times B : a \in A\}$$

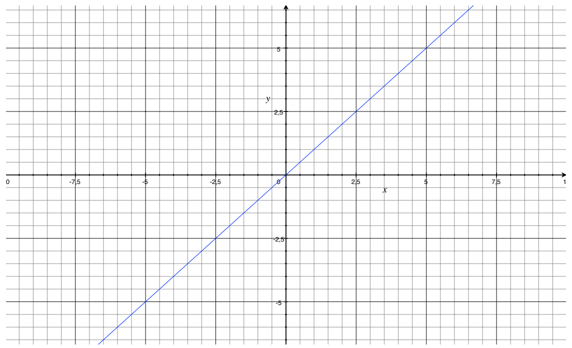
◁ ▷

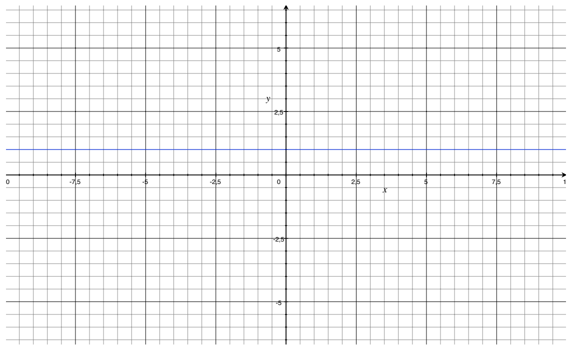
Il grafico di una funzione.

• **Diremo grafico di una funzione $f : A \to B$ il sottoinsieme Γ del prodotto cartesiano $A \times B$ definito da**

$$\Gamma = \{\big(a, f(a)\big) \in A \times B : a \in A\}$$

Esempio di grafici della funzione identica di $\mathbb{R}$ e di una funzione costante.



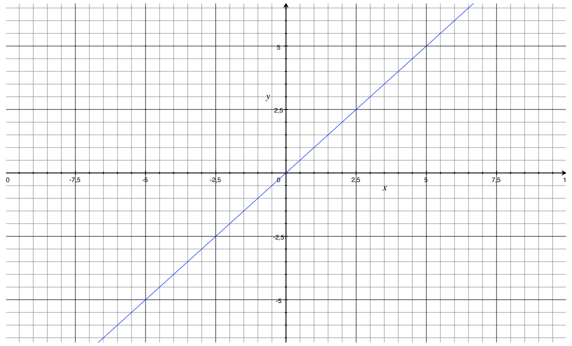


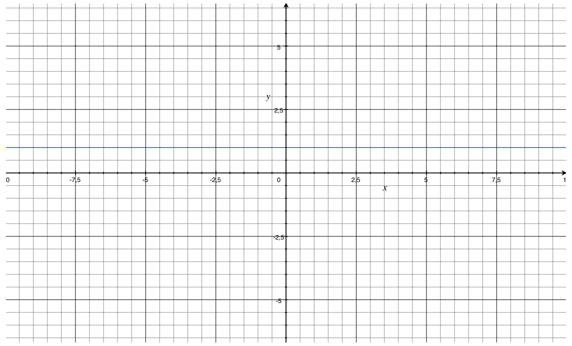
Il grafico di una funzione.

• **Diremo grafico di una funzione $f : A \to B$ il sottoinsieme Γ del prodotto cartesiano $A \times B$ definito da**

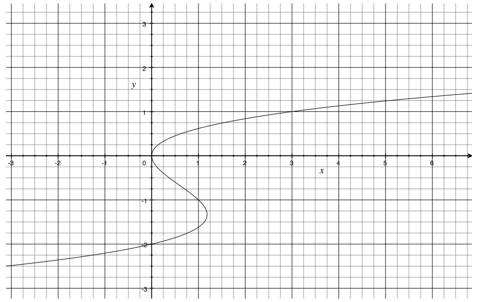
$$\Gamma = \{\big(a, f(a)\big) \in A \times B : a \in A\}$$

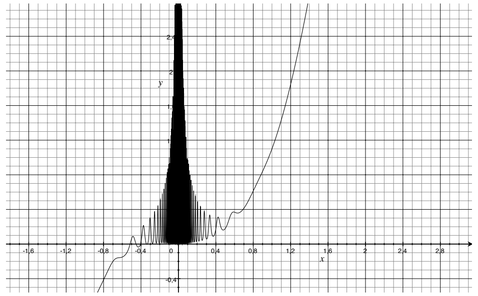
Esempio di grafici della funzione identica di $\mathbb{R}$ e di una funzione costante.





Esempi: dei due diagrammi che seguono, uno è un grafico e uno non lo è.



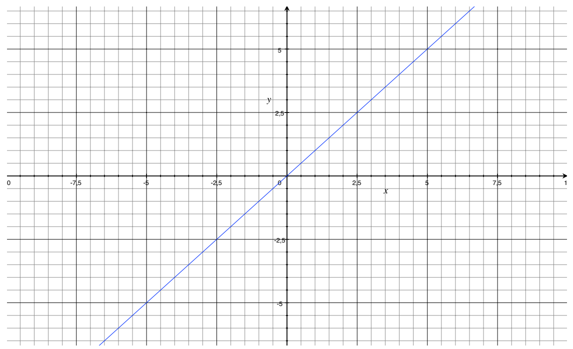
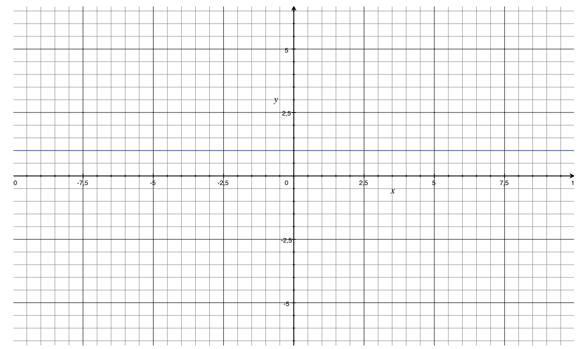


Il grafico di una funzione.

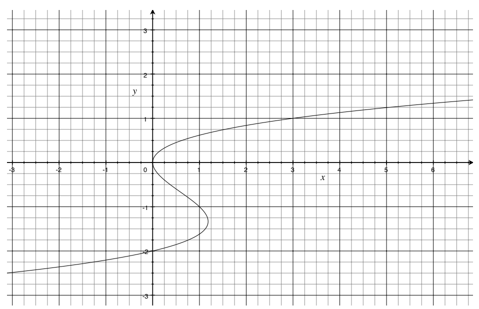
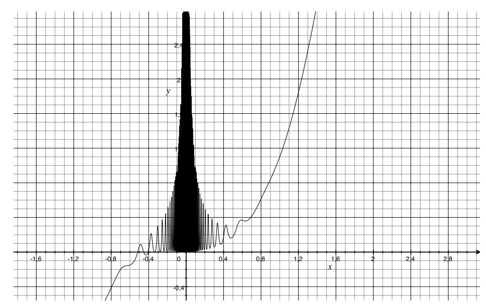
• **Diremo grafico di una funzione $f : A \to B$ il sottoinsieme Γ del prodotto cartesiano $A \times B$ definito da**

$$\Gamma = \{\big(a, f(a)\big) \in A \times B : a \in A\}$$

Esempio di grafici della funzione identica di $\mathbb{R}$ e di una funzione costante.

Esempi: dei due diagrammi che seguono, uno è un grafico e uno non lo è.

Il diagramma a sinistra non è un grafico, mentre quello a destra lo è.

- **Diremo immagine di $f : A \to B$ l'insieme $Im(f) = f(A)$ dei valori assunti da f:**

$$Im(f) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$$

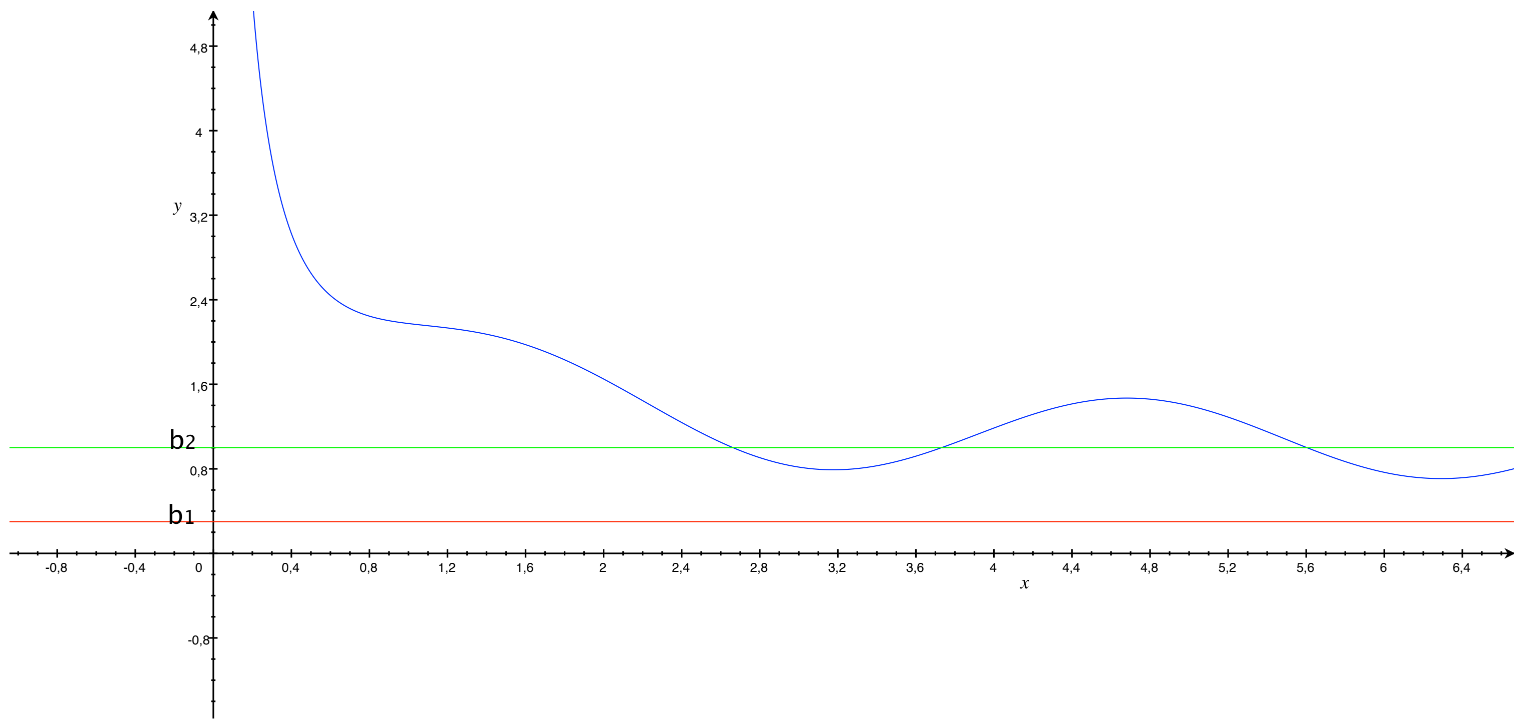
Attenzione! Non è detto che $Im(f)$ coincida con B.

- **Diremo immagine di $f : A \to B$ l'insieme $Im(f) = f(A)$ dei valori assunti da f:**

$$Im(f) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$$

Attenzione! Non è detto che $Im(f)$ coincida con B.

Si osservi che $Im(f)$ è l'insieme degli elementi $b \in B$ per cui l'equazione $f(x) = b$ ammette soluzioni $x \in A$.



◁ ▷

Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ ha come insieme immagine l'intervallo $[0, +\infty[$.

Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ ha come insieme immagine l'intervallo $[0, +\infty[$.

Osserviamo che l'equazione $x^2 = b$ ha soluzione se e solo se $b \in [0, +\infty[$.

Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ ha come insieme immagine l'intervallo $[0, +\infty[$.

Osserviamo che l'equazione $x^2 = b$ ha soluzione se e solo se $b \in [0, +\infty[$.

Se $b < 0$ l'equazione $x^2 = b$ non ha soluzioni reali.

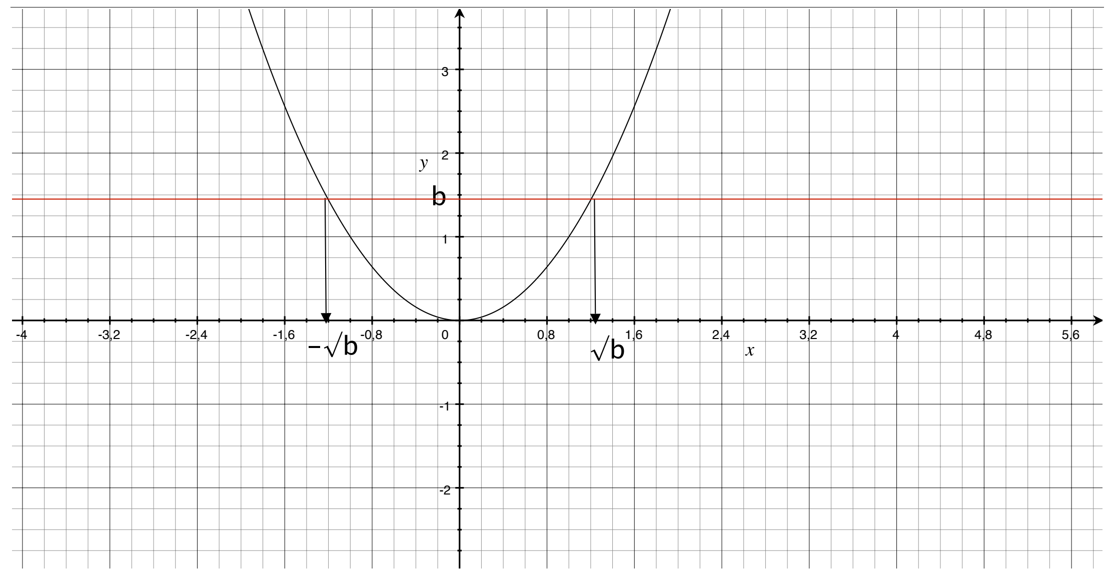
◁ ▷

Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ ha come insieme immagine l'intervallo $[0, +\infty[$.

Osserviamo che l'equazione $x^2 = b$ ha soluzione se e solo se $b \in [0, +\infty[$.

Se $b < 0$ l'equazione $x^2 = b$ non ha soluzioni reali.

Se invece $b > 0$ l'equazione $x^2 = b$ ha due soluzioni $-\sqrt{b}$ e $\sqrt{b}$.

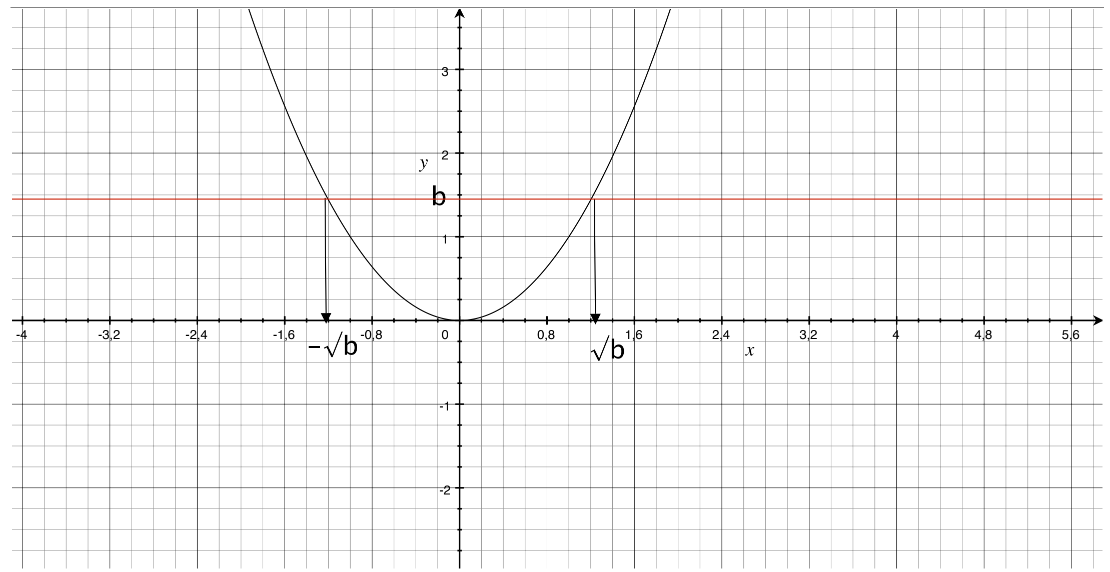


Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ ha come insieme immagine l'intervallo $[0, +\infty[$.

Osserviamo che l'equazione $x^2 = b$ ha soluzione se e solo se $b \in [0, +\infty[$.

Se $b < 0$ l'equazione $x^2 = b$ non ha soluzioni reali.

Se invece $b > 0$ l'equazione $x^2 = b$ ha due soluzioni $-\sqrt{b}$ e $\sqrt{b}$.



Qual è l'immagine di una funzione costante $f(x) = \alpha$?

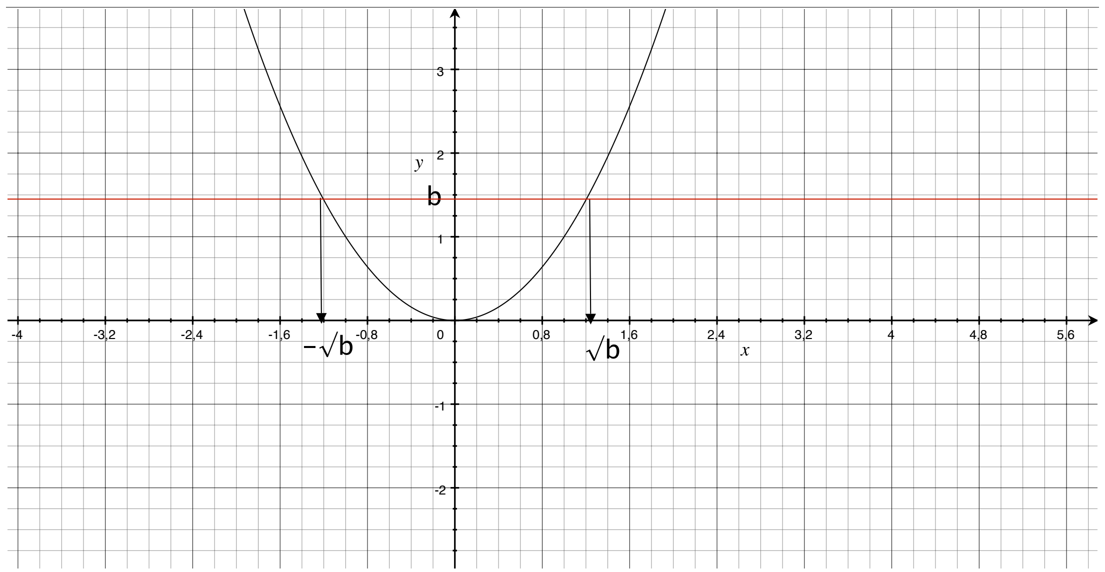
◁ ▷

Ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ ha come insieme immagine l'intervallo $[0, +\infty[$.

Osserviamo che l'equazione $x^2 = b$ ha soluzione se e solo se $b \in [0, +\infty[$.

Se $b < 0$ l'equazione $x^2 = b$ non ha soluzioni reali.

Se invece $b > 0$ l'equazione $x^2 = b$ ha due soluzioni $-\sqrt{b}$ e $\sqrt{b}$.



Qual è l'immagine di una funzione costante $f(x) = \alpha$?

È l'insieme costituito dal solo elemento α: $\{\alpha\}$.

◁ ▷

Esempio:

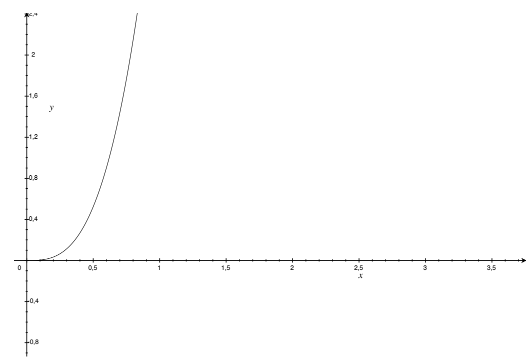
- **volume della sfera** $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$**;**

$f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$

Dominio: $]0, +\infty[$ **(intervallo dei numeri reali positivi).**

Codominio $\mathbb{R}$ **insieme dei numeri reali.**

Grafico:



Insieme immagine: $]0, +\infty[$

Si osservi che l'espressione $\frac{4}{3}\pi x^3$ **ha significato anche per** $x \leq 0$**. Tuttavia noi vogliamo un'espressione per calcolare il volume della sfera, quindi non ha significato considerare un raggio negativo. Si tenga presente che una funzione non è la stessa cosa dell'espressione analitica che la rappresenta.**

Esempio:

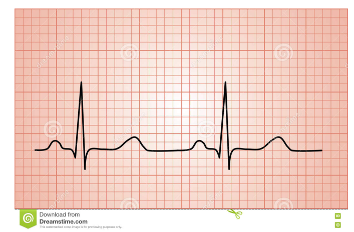
- **elettrocardiogramma** $f : [0, T] \to \mathbb{R}$**;**

non esiste una "formula" che descrive la funzione!

Dominio: $[0, T]$ **(intervallo limitato di tempo;** T **è un tempo fissato).**

Codominio $\mathbb{R}$ **insieme dei numeri reali.**

Grafico:



Insieme immagine: l'intervallo di estremi il valore minimo e il valore massimo raggiunti dalla pulsazione

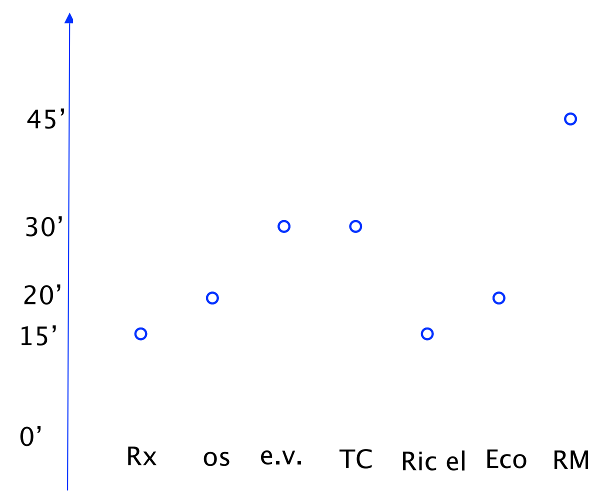
◁ ▷

Esempio:

• tempo richiesto per effettuare gli esami $f : \{\text{insieme di esami}\} \to \mathbb{R}$;
non esiste una "formula" che descrive la funzione!
Dominio: l'insieme degli esami che stiamo prendendo in considerazione
Codominio $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali. Insieme immagine: $\{15, 20, 30, 45\} \subset \mathbb{R}$.
Grafico:

Esempio:

• **tempo richiesto per effettuare gli esami** $f : \{\text{insieme di esami}\} \to \mathbb{R}$;
non esiste una "formula" che descrive la funzione!
Dominio: l'insieme degli esami che stiamo prendendo in considerazione
Codominio $\mathbb{R}$ **insieme dei numeri reali. Insieme immagine:** $\{15, 20, 30, 45\} \subset \mathbb{R}$.
Grafico:



◁ ▷

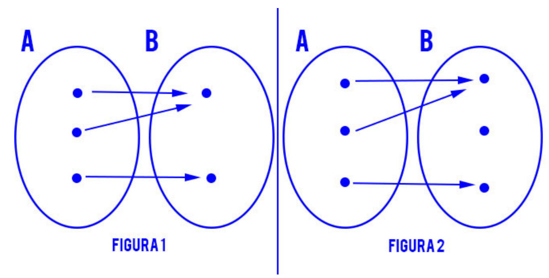
Proprietà fondamentali delle funzioni tra insiemi

◁ ▷

Proprietà fondamentali delle funzioni tra insiemi

- **Una funzione $f : A \to B$ si dice suriettiva se l'immagine coincide con il codominio $Im(f) = B$.**

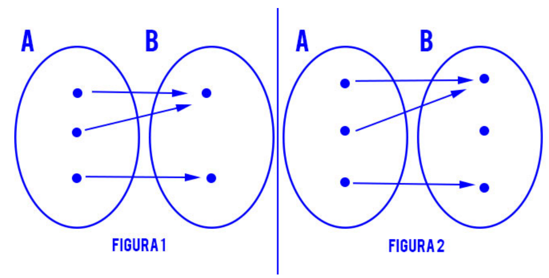
Questo significa che l'equazione $f(x) = b$ ha soluzione in A per ogni valore fissato $b \in B$



Proprietà fondamentali delle funzioni tra insiemi

• **Una funzione** $f : A \to B$ **si dice suriettiva se l'immagine coincide con il codominio** $Im(f) = B$**.**

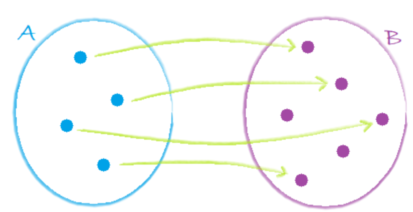
Questo significa che l'equazione $f(x) = b$ **ha soluzione in** A **per ogni valore fissato** $b \in B$



• **Una funzione** $f : A \to B$ **si dice iniettiva se per ogni** a_1, a_2 **appartenenti a** A **vale l'implicazione**

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \longrightarrow \quad a_1 = a_2$$

Questo significa che se l'equazione $f(x) = b$ **ha soluzione in** A**, allora questa è unica (non ci possono essere due soluzioni!)**



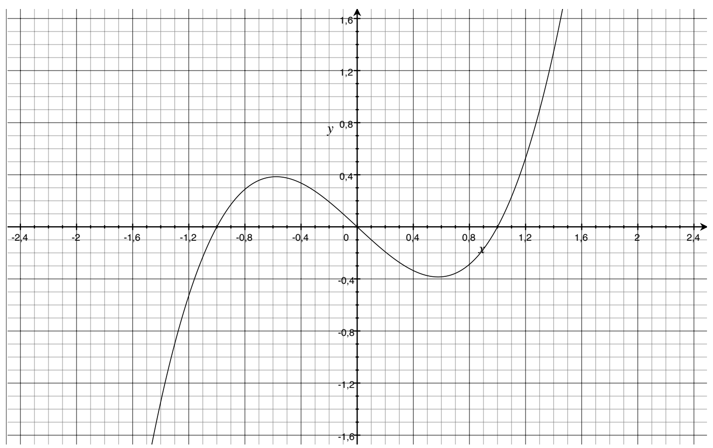
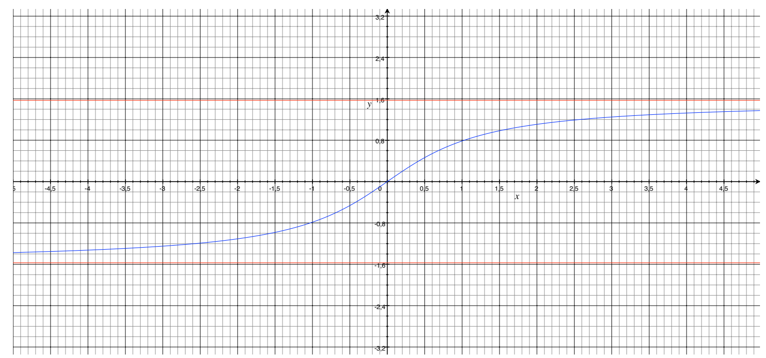
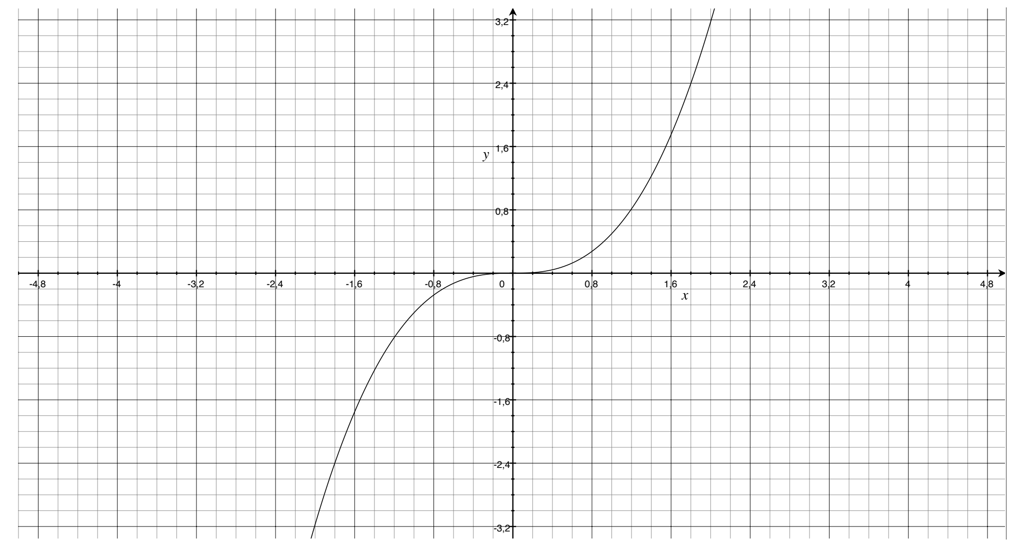
◁ ▷

- **Una funzione $f : A \to B$ si dice biiettiva se è iniettiva e suriettiva.**

Questo significa che l'equazione $f(x) = b$ ha sempre una e una sola soluzione in A per ogni valore fissato $b \in B$

• **Una funzione $f : A \to B$ si dice biiettiva se è iniettiva e suriettiva.**

Questo significa che l'equazione $f(x) = b$ ha sempre una e una sola soluzione in A per ogni valore fissato $b \in B$

L'esempio a sinistra mostra il grafico di una funzione suriettiva su $\mathbb{R}$ ma non iniettiva, quello al centro di una funzione iniettiva ma non suriettiva su $\mathbb{R}$, quello a destra di una funzione biiettiva.

◁ ▷

Esempi:

la funzione volume della sfera $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ **è iniettiva ma non suriettiva.**

Infatti, è iniettiva perché

$$\frac{4}{3}\pi x_1^3 = \frac{4}{3}\pi x_2^3 \longrightarrow x_1 = x_2;$$

Ma non è suriettiva, ad esempio

$-1 \in B$ **ma non esiste alcun valore** $x \in]0, +\infty[$ **tale che** $f(x) = -1$**.**

Esempi:

la funzione volume della sfera $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ **è iniettiva ma non suriettiva.**
Infatti, è iniettiva perché

$$\frac{4}{3}\pi x_1^3 = \frac{4}{3}\pi x_2^3 \longrightarrow x_1 = x_2;$$

Ma non è suriettiva, ad esempio
$-1 \in B$ **ma non esiste alcun valore** $x \in]0, +\infty[$ **tale che** $f(x) = -1$**.**

Si osservi che però che la funzione $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ **(ho modificato il codominio!) è suriettiva, infatti per ogni** $b \in]0, +\infty[$ **l'equazione** $f(x) = b$ **ha la soluzione** $\sqrt[3]{\frac{3b}{4\pi}} \in]0, +\infty[$**.**
Pertanto, essendo anche iniettiva, questa funzione è biiettiva.

◁ ▷

Esempi:

la funzione volume della sfera $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è iniettiva ma non suriettiva.
Infatti, è iniettiva perché

$$\frac{4}{3}\pi x_1^3 = \frac{4}{3}\pi x_2^3 \longrightarrow x_1 = x_2;$$

Ma non è suriettiva, ad esempio
$-1 \in B$ ma non esiste alcun valore $x \in]0,+\infty[$ tale che $f(x) = -1$.

Si osservi che però che la funzione $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ (ho modificato il codominio!) è suriettiva, infatti per ogni $b \in]0,+\infty[$ l'equazione $f(x) = b$ ha la soluzione $\sqrt[3]{\frac{3b}{4\pi}} \in]0,+\infty[$.
Pertanto, essendo anche iniettiva, questa funzione è biiettiva.

La funzione "elettrocardiogramma" non è né suriettiva, né iniettiva.

◁ ▷

Esempi:

la funzione volume della sfera $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è iniettiva ma non suriettiva.
Infatti, è iniettiva perché

$$\frac{4}{3}\pi x_1^3 = \frac{4}{3}\pi x_2^3 \longrightarrow x_1 = x_2;$$

Ma non è suriettiva, ad esempio
$-1 \in B$ ma non esiste alcun valore $x \in]0,+\infty[$ tale che $f(x) = -1$.

Si osservi che però che la funzione $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ (ho modificato il codominio!) è suriettiva, infatti per ogni $b \in]0,+\infty[$ l'equazione $f(x) = b$ ha la soluzione $\sqrt[3]{\frac{3b}{4\pi}} \in]0,+\infty[$. Pertanto, essendo anche iniettiva, questa funzione è biiettiva.

La funzione "elettrocardiogramma" non è né suriettiva, né iniettiva.

La funzione "tempo richiesto per effettuare gli esami" non è né suriettiva, né iniettiva.

◁ ▷

• **Sia** $f : A \to B$ **una funzione; si dice funzione inversa di** f **una funzione** $g : B \to A$ **così definita:**

$$g(y) = x \text{ se e solo se } f(x) = y$$

Una funzione si dice invertibile se è definita la sua funzione inversa.

◁ ▷

• **Sia $f : A \to B$ una funzione; si dice funzione inversa di f una funzione $g : B \to A$ così definita:**

$$g(y) = x \text{ se e solo se } f(x) = y$$

Una funzione si dice invertibile se è definita la sua funzione inversa.

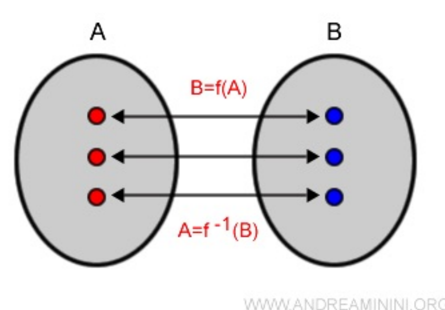
Si osservi che il dominio di f è il codominio di g e il codominio di f è il dominio di g.

◁ ▷

Non è sempre possibile definire una funzione inversa. Infatti una funzione è invertibile se e soltanto se è biettiva.

Dimostrazione. Supponiamo che la funzione f sia biiettiva. Vogliamo dimostrare che è invertibile, cioè esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g(b) = a$ se e solo se $f(a) = b$. Poiché la funzione f è biiettiva, per ogni $b \in B$ esiste sempre uno ed un solo elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Si può allora definire $g(b) = a$ dove a è l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = b$.

Viceversa, supponiamo che la funzione sia invertibile. Proviamo che è suriettiva: per ogni elemento $b \in B$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$, a è proprio l'elemento $g(b)$. Proviamo che è iniettiva: sia $b = f(x_1) = f(x_2)$; l'elemento $g(b)$ è definito come l'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$, quindi $a = x_1 = x_2$.



◁ ▷

Talvolta la funzione inversa della funzione f viene indicata con il simbolo f^{-1}. Attenzione a non confondere la funzione inversa con la funzione reciproca, che è una cosa completamente diversa!

Talvolta la funzione inversa della funzione f viene indicata con il simbolo f^{-1}. Attenzione a non confondere la funzione inversa con la funzione reciproca, che è una cosa completamente diversa!

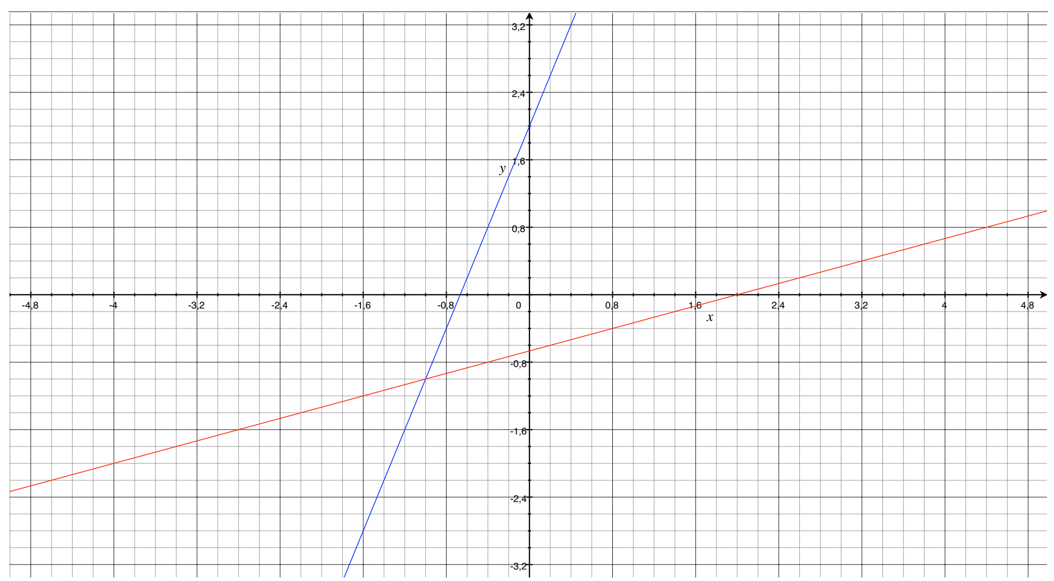
Esempi di funzioni inverse:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**:** $f(x) = 3x + 2$

$$y = 3x + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 3x = y - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{y-2}{3}$$

$f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$

Si noti che non cè nulla di sbagliato nello scrivere $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

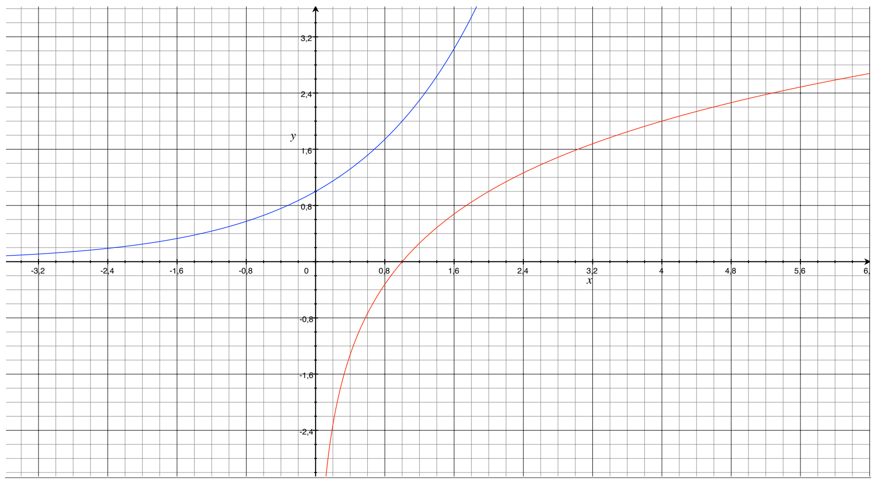


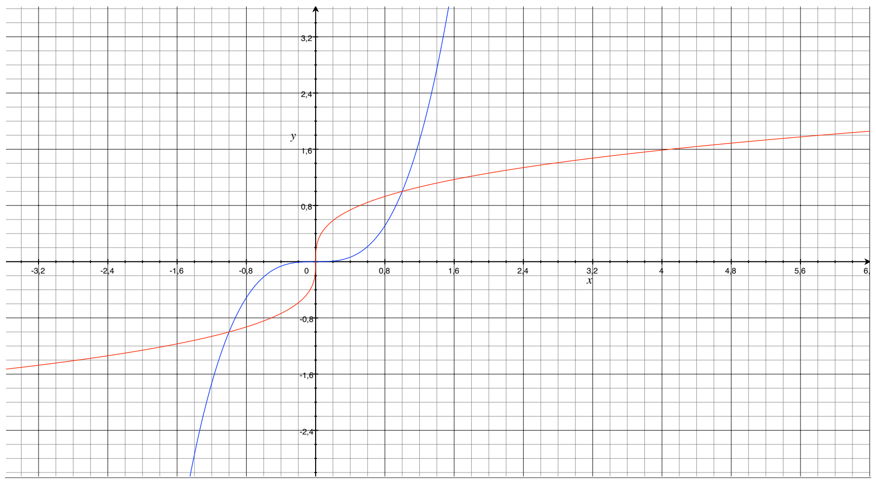
◁ ▷

$f(x) = 2^x$

$2^x = y \qquad \Longrightarrow \qquad x = \log_2(y)$

$f^{-1}(x) = \log_2(x)$





$f(x) = x^3$

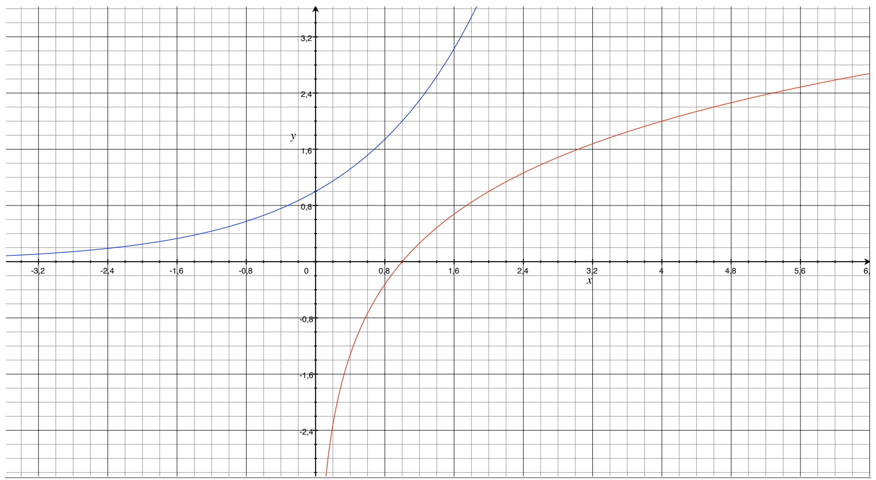
$x^3 = y \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{y}$

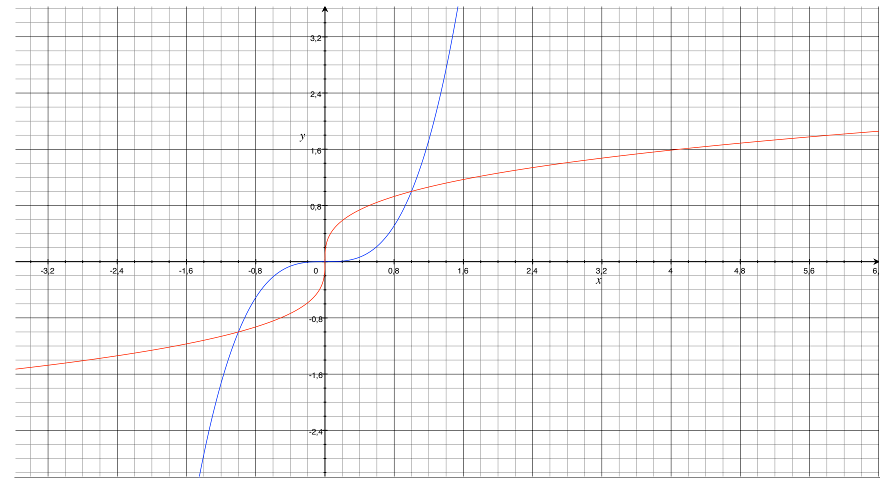
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = 2^x$

$2^x = y \qquad \Longrightarrow \qquad x = \log_2(y)$

$f^{-1}(x) = \log_2(x)$





$f(x) = x^3$

$x^3 = y \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{y}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Sia f una funzione invertibile reale di variabile reale. Si osserva che il grafico della funzione inversa di f è simmetrico al grafico della funzione f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

◁ ▷

Esempio: le permutazioni.

Sia A un insieme finito, con n elementi.

Una funzione biiettiva $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$ si dice una permutazione.
Una permutazione è quindi un ordinamento dell'insieme A.

Esempio: le permutazioni.

Sia A un insieme finito, con n elementi.

Una funzione biiettiva $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$ si dice una permutazione.
Una permutazione è quindi un ordinamento dell'insieme A.
Un insieme di due elementi ha soltanto due permutazioni: $A = \{a, b\}$.
ab, ba.
Un insieme con tre elementi ha 6 permutazioni: $A = \{a, b, c\}$.
abc, acb, bac, bca, cab, cba

Esempio: le permutazioni.

Sia A un insieme finito, con n elementi.

Una funzione biiettiva $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$ si dice una permutazione.
Una permutazione è quindi un ordinamento dell'insieme A.
Un insieme di due elementi ha soltanto due permutazioni: $A = \{a, b\}$.
ab, ba.
Un insieme con tre elementi ha 6 permutazioni: $A = \{a, b, c\}$.
abc, acb, bac, bca, cab, cba

Un insieme con quattro elementi ha 24 permutazioni: $A = \{a, b, c, d\}$
$abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$
$bacd$, $badc$, $bcad$, $bcda$, $bdac$, $bdca$
$cabd$, $cadb$, $cbad$, $cbda$, $cdab$, $cdba$
$dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$, $dcba$.

Esempio: le permutazioni.

Sia A un insieme finito, con n elementi.

Una funzione biiettiva $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$ si dice una permutazione.
Una permutazione è quindi un ordinamento dell'insieme A.
Un insieme di due elementi ha soltanto due permutazioni: $A = \{a, b\}$.
ab, ba.
Un insieme con tre elementi ha 6 permutazioni: $A = \{a, b, c\}$.
abc, acb, bac, bca, cab, cba

Un insieme con quattro elementi ha 24 permutazioni: $A = \{a, b, c, d\}$
$abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$
$bacd$, $badc$, $bcad$, $bcda$, $bdac$, $bdca$
$cabd$, $cadb$, $cbad$, $cbda$, $cdab$, $cdba$
$dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$, $dcba$.

Quante sono le permutazioni su un insieme di n elementi?

◁ ▷

Esempio: le permutazioni.

Sia A un insieme finito, con n elementi.

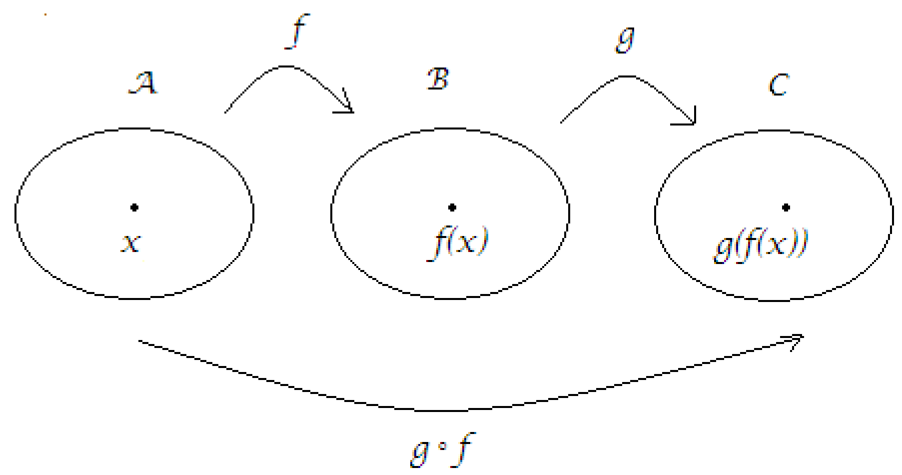
Una funzione biiettiva $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$ si dice una permutazione.
Una permutazione è quindi un ordinamento dell'insieme A.
Un insieme di due elementi ha soltanto due permutazioni: $A = \{a, b\}$.
ab, ba.
Un insieme con tre elementi ha 6 permutazioni: $A = \{a, b, c\}$.
abc, acb, bac, bca, cab, cba

Un insieme con quattro elementi ha 24 permutazioni: $A = \{a, b, c, d\}$
$abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$
$bacd$, $badc$, $bcad$, $bcda$, $bdac$, $bdca$
$cabd$, $cadb$, $cbad$, $cbda$, $cdab$, $cdba$
$dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$, $dcba$.

Quante sono le permutazioni su un insieme di n elementi?
Sono $n!$ (n fattoriale) dove $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$

Funzione composta

Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$. Allora si può definire la funzione h composta di f con g definita da $h(x) = g\big(f(x)\big)$ (scriveremo $h = g \circ f : A \to C$)



Esempio. $A =$ {**insieme di pazienti in attesa**}, $B =$ {**insieme degli esami da effettuare**}, $C = \mathbb{R}$.

$f : A \to B$ **assegna ad ogni paziente l'esame che deve effettuare.**

$g : B \to C$ **assegna ad ogni esame il tempo necessario per effettuarlo.**

$h : A \to C$, $h(a) = g\big(f(a)\big)$ **assegna ad ogni paziente il tempo che impiegherà per fare l'esame.**

Attenzione! **La composizione di funzioni non è commutativa, cioè in generale**

$$f \circ g \neq g \circ f!$$

Esempi:

Attenzione! **La composizione di funzioni non è commutativa, cioè in generale**

$$f \circ g \neq g \circ f!$$

Esempi:

$f(x) = \sin x; \qquad g(x) = x^3$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sin(x)\big) = \big(\sin x\big)^3;$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x^3\big) = \sin(x^3)$$

Attenzione! **La composizione di funzioni non è commutativa, cioè in generale**

$$f \circ g \neq g \circ f!$$

Esempi:

$f(x) = \sin x; \qquad g(x) = x^3$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\sin(x)\big) = \big(\sin x\big)^3;$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x^3\big) = \sin(x^3)$$

$f(x) = \frac{3}{x-1}; \qquad g(x) = \log(x+3)$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\Big(\frac{3}{x-1}\Big) = \log\Big(\frac{3}{x-1} + 3\Big) = \log\Big(\frac{3x}{x-1}\Big)$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\log(x+3)\big) = \frac{3}{\log(x+3) - 1}$$

◁ ▷

• **Funzione identica e funzioni inverse.**

Sia X un insieme qualsiasi non vuoto. Ricordiamo che la funzione $1_X : X \to X$ definita da $1_X(x) = x$ per ogni $x \in X$ si dice funzione identica dell'insieme X.

La funzione identica è invertibile e la sua inversa è la funzione identica stessa.

◁ ▷

• Funzione identica e funzioni inverse.

Sia X un insieme qualsiasi non vuoto. Ricordiamo che la funzione $1_X : X \to X$ definita da $1_X(x) = x$ per ogni $x \in X$ si dice funzione identica dell'insieme X.

La funzione identica è invertibile e la sua inversa è la funzione identica stessa.

Osserviamo che, se $f : A \to B$ è una funzione invertibile, con inversa $g : B \to A$, si ha $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$.

Infatti $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$ e $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in B$.

Funzioni reali di variabile reale

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Le funzioni spesso sono utilizzate come "modelli matematici"; descrivono fenomeni fisici, economici, sociali, ecc.
Alcune funzioni sono usate più spesso di altre. Quelle più importanti descrivono fenomeni di tipo

- **lineare**

$$y = mx + q$$

- **polinomiale**

$$y = \frac{1}{2}mt^2 + vt + y_0$$

- **esponenziale**

$$y = 2^x$$

- **periodico o oscillante**

$$y = \sum_{n=0}^{k} \big(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}\,(nx)\big)$$

Una funzione particolare: il valore assoluto

Definiamo la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

Una funzione particolare: il valore assoluto

Definiamo la funzione $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

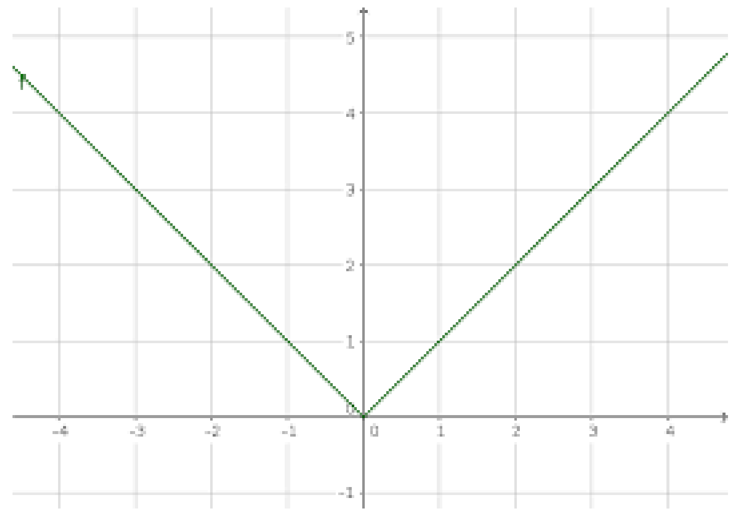
$$|x| = \begin{cases} -x & \textbf{se } x < 0; \\ x & \textbf{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Una funzione particolare: il valore assoluto

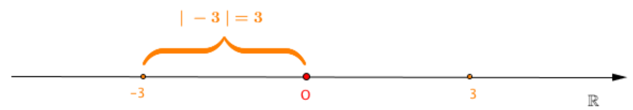
Definiamo la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

$$|x| = \begin{cases} -x & \textbf{se } x < 0; \\ x & \textbf{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Si osservi che l'insieme immagine della funzione valore assoluto è $[0, +\infty[$. La funzione pertanto non è suriettiva. Inoltre non è nemmeno iniettiva, infatti, l'equazione $|x| = b$ ammette due soluzioni per ogni $b > 0$ (una soluzione per $b = 0$ e nessuna soluzione per $b < 0$).



La funzione $|x|$ si può pensare come alla "distanza" del punto x dall'origine 0 sulla retta reale.

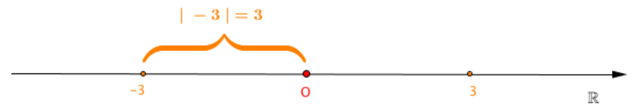


$|-3| = |3| = 3$, perché sia 3 che -3 distano 3 dall'origine O.

Si osservi che l'insieme $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ rappresenta l'insieme dei numeri reali che distano da x_0 meno di r. Quindi $B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$.

◁ ▷

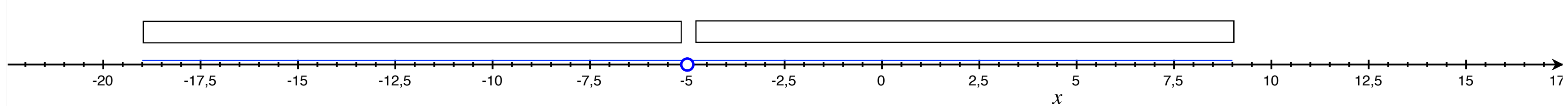
La funzione $|x|$ si può pensare come alla "distanza" del punto x dall'origine 0 sulla retta reale.



$|-3| = |3| = 3$, perché sia 3 che -3 distano 3 dall'origine O.

Si osservi che l'insieme $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ rappresenta l'insieme dei numeri reali che distano da x_0 meno di r. Quindi $B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$.

Ad esempio si ha $B(-5, 14) = \{x \in \mathbb{R} : |x - (-5)| < 14\} = \{x \in \mathbb{R} : |x + 5| < 14\} =$ $= \{x \in \mathbb{R} : -14 < x + 5 < 14\} = \{x \in \mathbb{R} : -19 < x < 9\} =] - 19, 9[$.

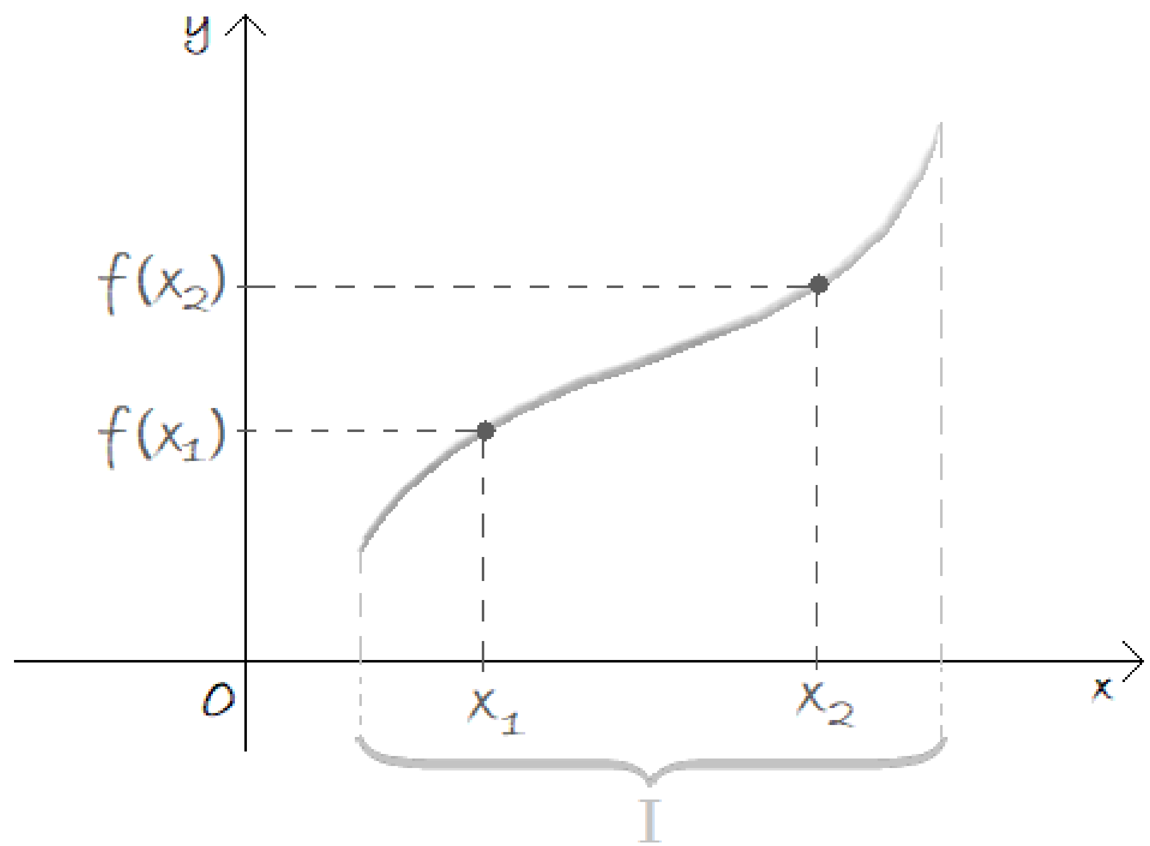


Alcune proprietà delle funzioni reali

• $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice crescente se per ogni** x_1, x_2 **appartenenti ad** E **vale l'implicazione**

$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

(Se vale $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$**, la funzione** f **si dice strettamente crescente)**

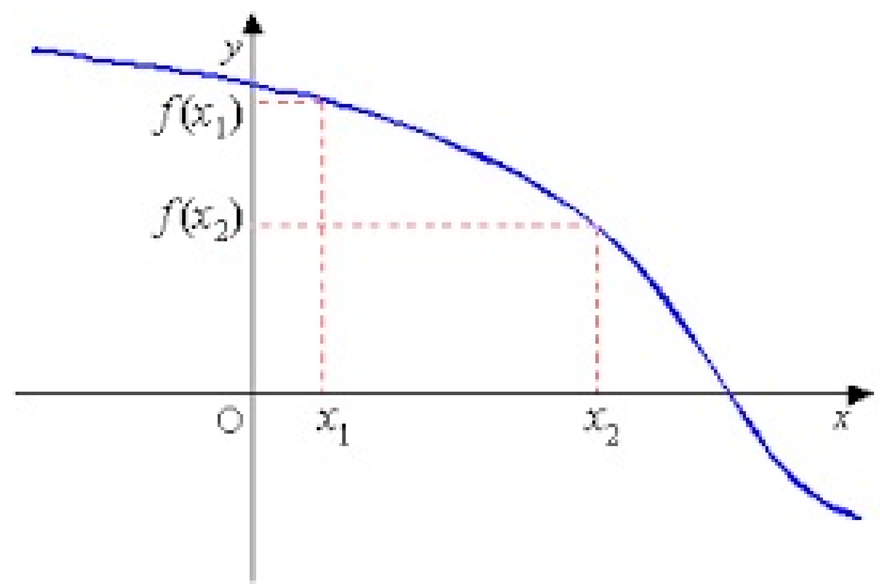


◁ ▷

• $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice decrescente se per ogni** x_1, x_2 **appartenenti ad** E **vale l'implicazione**

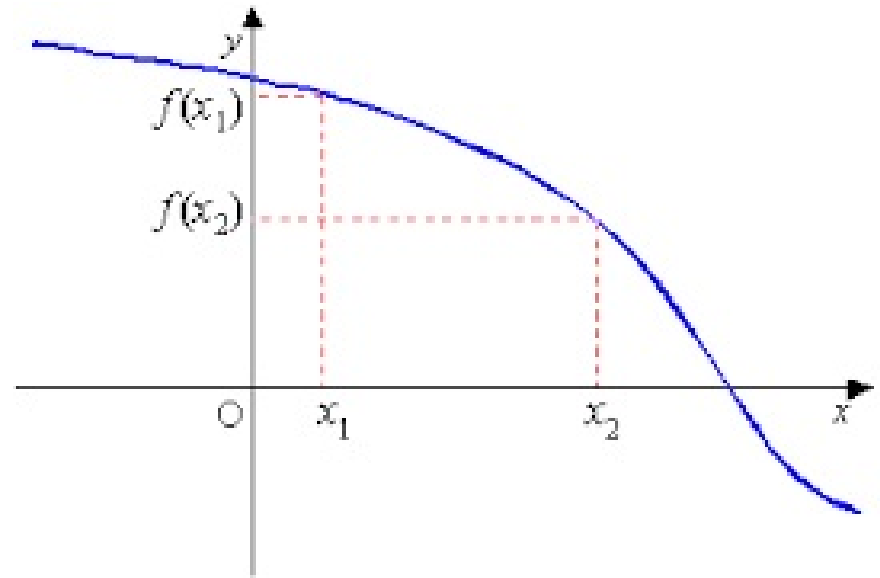
$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$

(Se vale $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$**, la funzione** f **si dice strettamente decrescente)**



◁ ▷

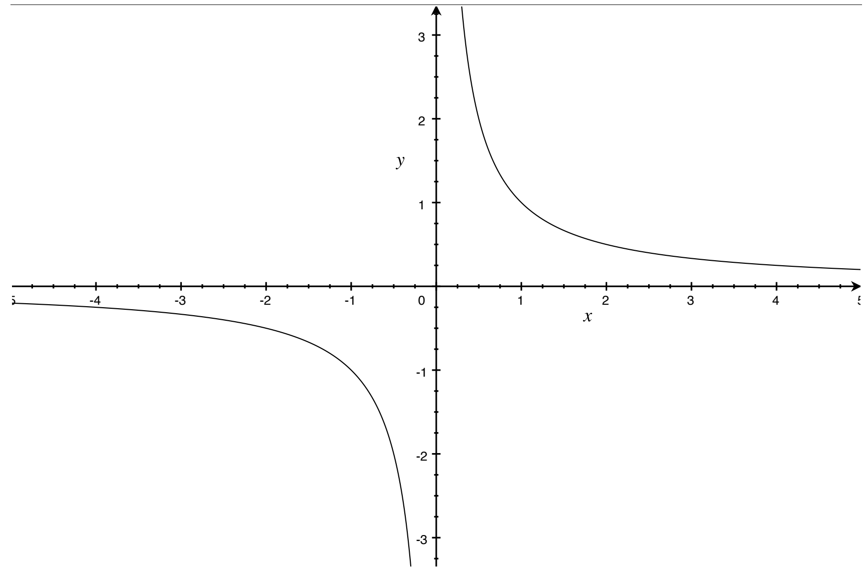
- **$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice decrescente se per ogni x_1, x_2 appartenenti ad E vale l'implicazione**
$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$
(Se vale $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$, la funzione f si dice strettamente decrescente)



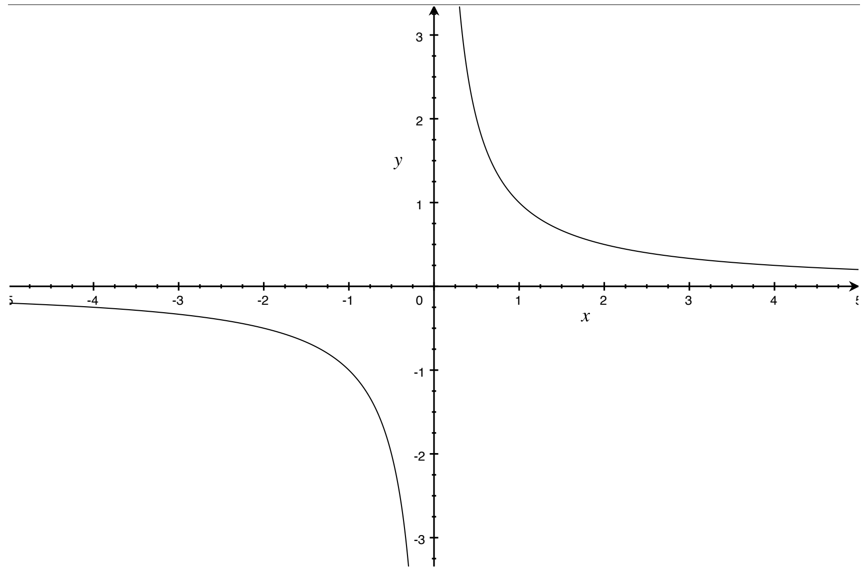
- **$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona se è crescente oppure decrescente.**

◁ ▷

Esempio. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è monotona?



Esempio. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è monotona?



Non lo è. Infatti non è né crescente ($f(1) > f(2)$), nè decrescente ($f(-1) < f(1)$).

Invece sono decrescenti le funzioni $f_1 :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{x}$, e $f_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$.

◁ ▷

- **Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo allora che**

◁ ▷

• **Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo allora che**

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è pari se**

• Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo allora che

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è pari se**
per ogni $x \in E$ **si ha** $f(-x) = f(x)$**;**

◁ ▷

- **Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo allora che**

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è pari se**
per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = f(x)$;

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è dispari se**

◁ ▷

• Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo che

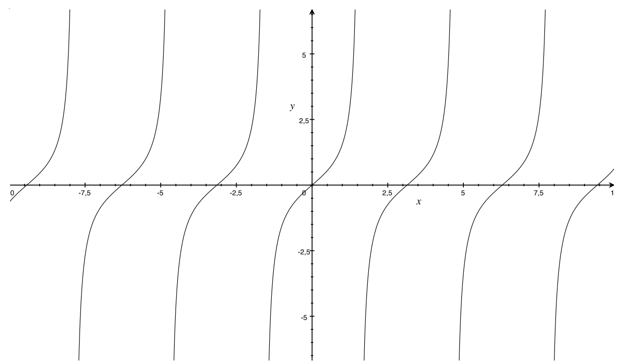
$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari se
per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = f(x)$;

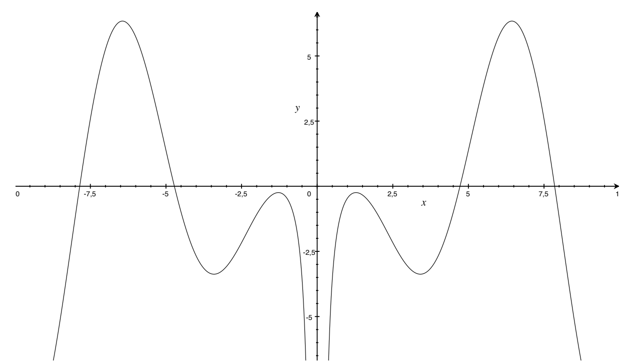
$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari se
per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = -f(x)$.

• **Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo allora che**

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è pari se**
per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = f(x)$;

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è dispari se**
per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = -f(x)$.

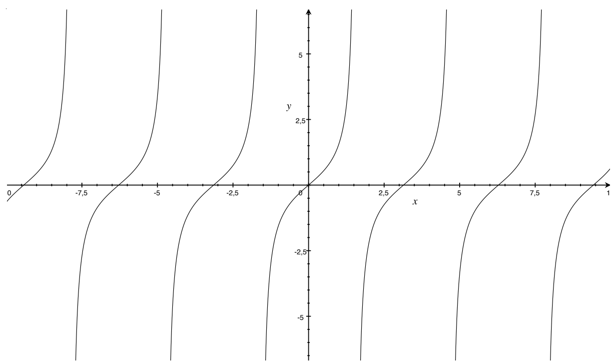


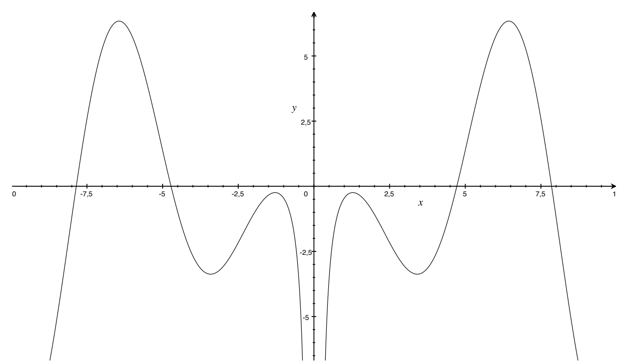


• **Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo allora che**

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è pari se**
per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = f(x)$;

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è dispari se**
per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = -f(x)$.





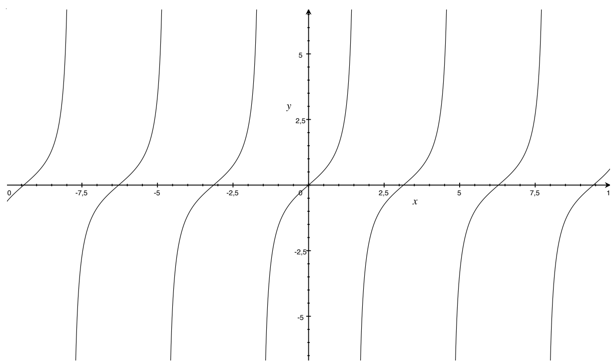
Si osservi che se $0 \in E$ e la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è dispari, si ha necessariamente
$f(0) =$

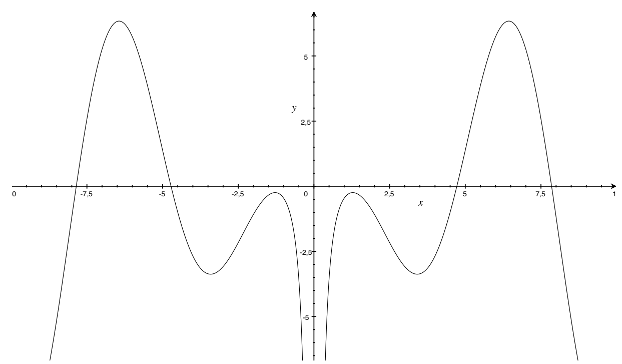
◁ ▷

• **Sia** $E \subset \mathbb{R}$ **un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se** $x \in E$ **allora anche** $-x \in E$**. Diremo allora che**

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è pari se**
per ogni $x \in E$ **si ha** $f(-x) = f(x)$**;**

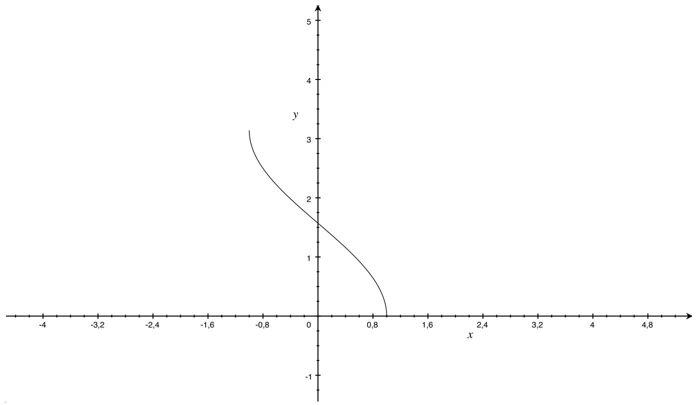
$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **è dispari se**
per ogni $x \in E$ **si ha** $f(-x) = -f(x)$**.**

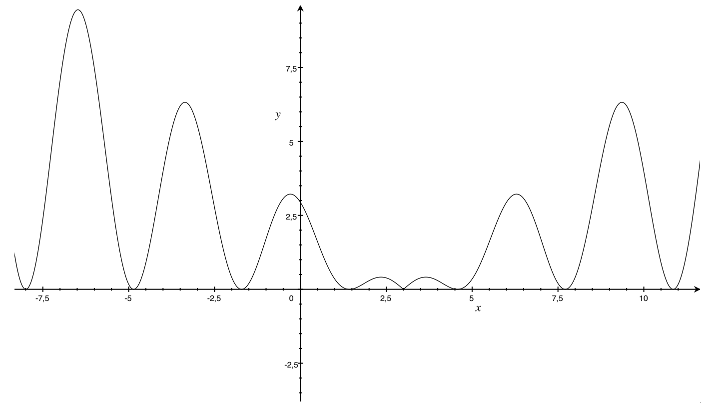




Si osservi che se $0 \in E$ **e la funzione** $f : E \to \mathbb{R}$ **è dispari, si ha necessariamente**
$f(0) =$
$f(0) = 0$**.**

Sono possibili altre simmetrie, ad esempio





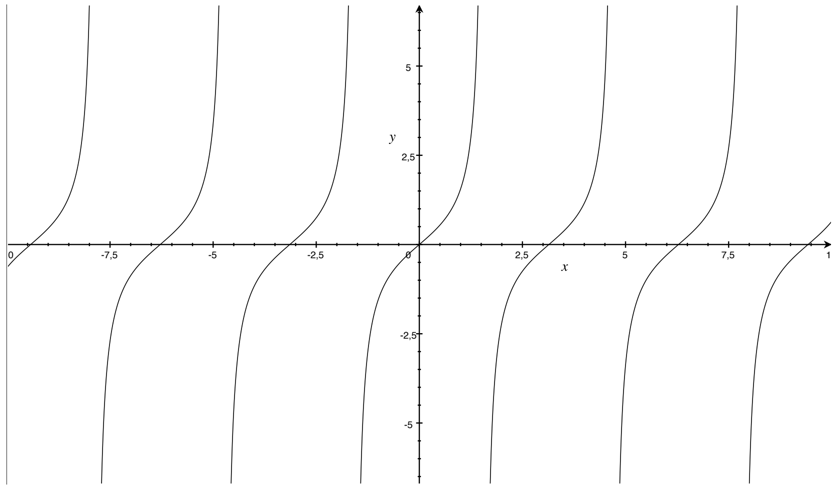
Simmetria rispetto il punto $(0, \frac{\pi}{2})$ e simmetria rispetto all'asse $x = 3$.

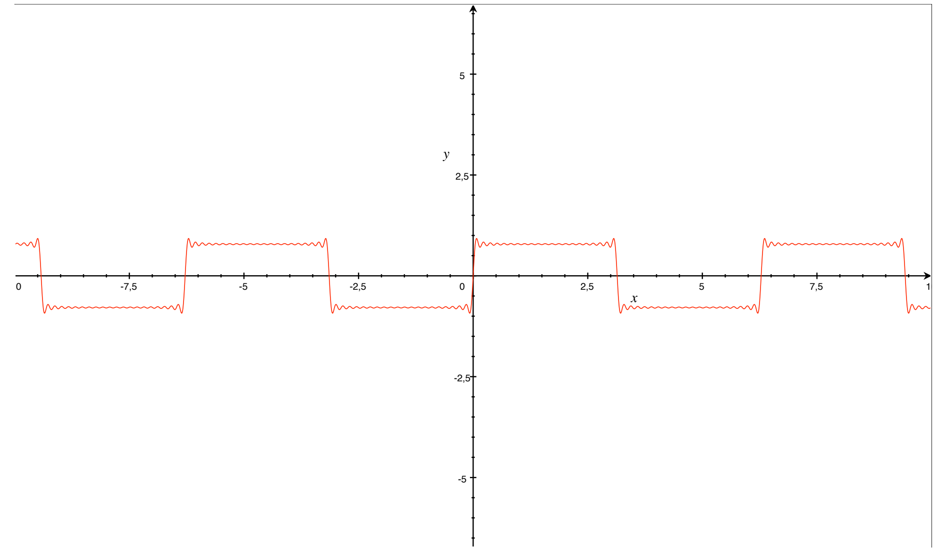
◁ ▷

- **Sia** $T \in \mathbb{R}$**,** $T > 0$**.** $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice periodica di periodo** T **se**

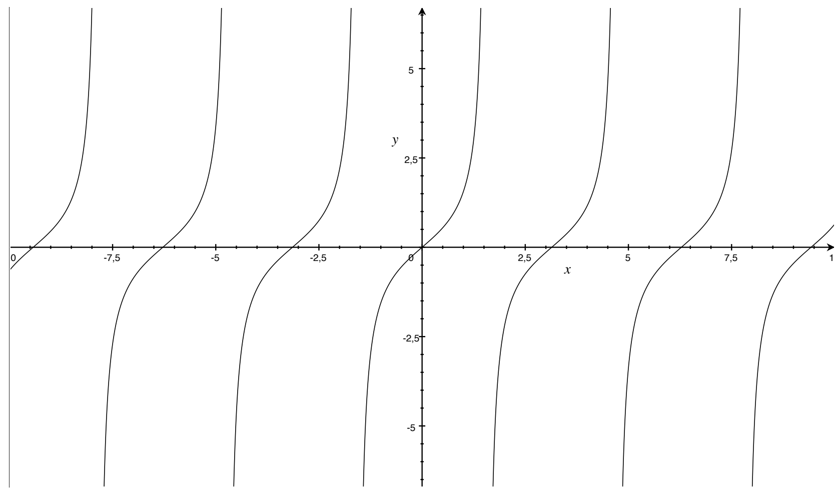
◁ ▷

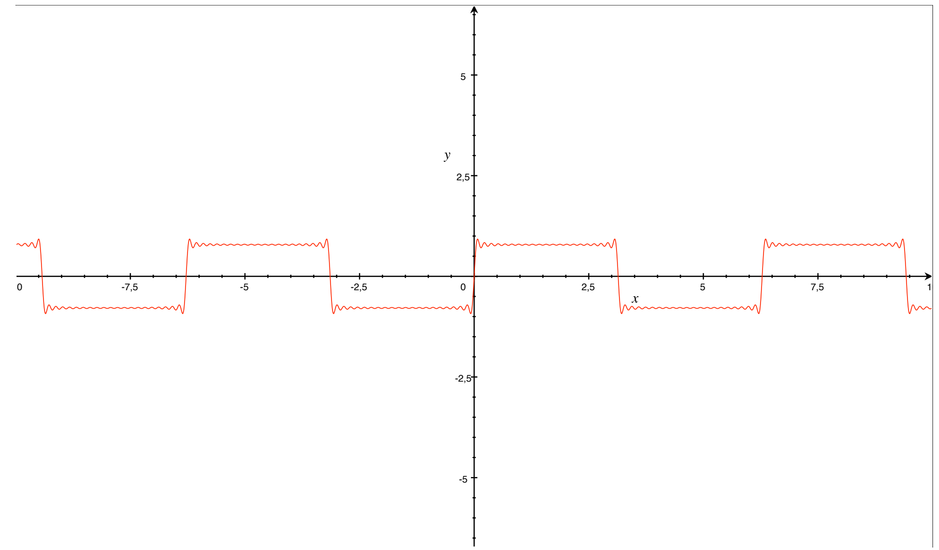
• **Sia** $T \in \mathbb{R}$**,** $T > 0$**.** $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice periodica di periodo** T **se per ogni** $x \in E$ **si ha** $x - T \in E$**,** $x + T \in E$**,** $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$**.**





• **Sia** $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice periodica di periodo** T **se per ogni** $x \in E$ **si ha** $x - T \in E$, $x + T \in E$, $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.





Se $T > 0$ **è periodo di** f, **per ogni naturale** $n \in \mathbb{N}^+$ **anche** nT **è periodo di** f.
Infatti

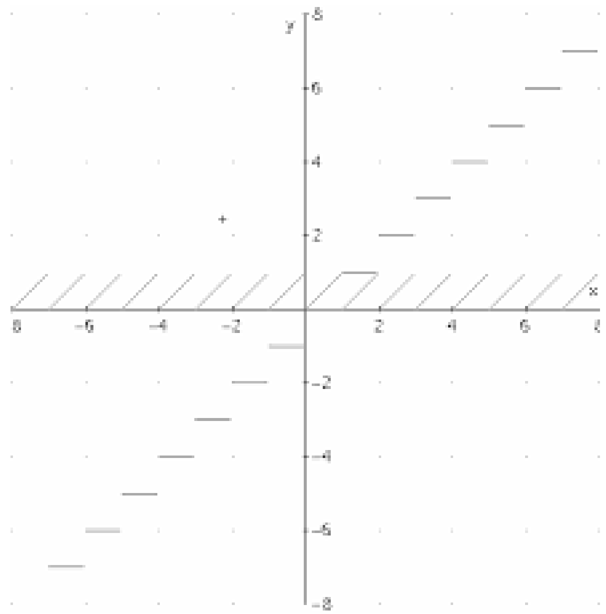
$$f\big(x + (nT)\big) = f\big((x + (n-1)T + T\big) = f\big(x + (n-1)T\big) = f\big((x + (n-2)T + T\big) = \cdots = f(x)$$

Perciò i periodi di una funzione periodica sono infiniti. Per questo motivo, talvolta, quando si parla di "periodo di una funzione" si intende il periodo minimo della funzione.

◁ ▷

Esempio: la funzione parte decimale di un numero reale.

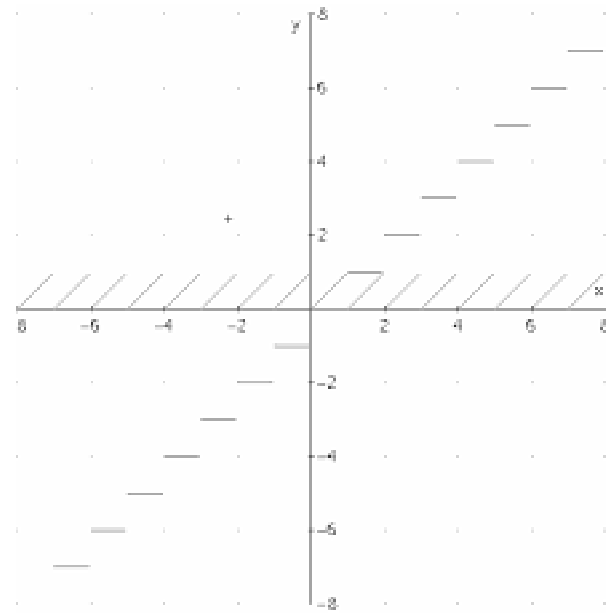
Sia $x \in \mathbb{R}$**. Si definisce**
parte intera di x **il numero** $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : x \geq n\}$**,**
parte decimale (mantissa) di x **il numero** $(x) = x - [x]$**.**



Se scriviamo il numero x **in forma decimale:** $x = n + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$**,** $n \in \mathbb{Z}$**, si ha**
$[x] = n$ **;** $(x) = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \in [0, 1[$**.**

Esempio: la funzione parte decimale di un numero reale.

Sia $x \in \mathbb{R}$**. Si definisce**
parte intera di x **il numero** $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : x \geq n\}$**,**
parte decimale (mantissa) di x **il numero** $(x) = x - [x]$**.**



Se scriviamo il numero x **in forma decimale:** $x = n + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$**,** $n \in \mathbb{Z}$**, si ha**
$[x] = n$ **;** $(x) = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \in [0, 1[$**.**
La funzione parte intera è crescente (non strettamente); la funzione parte decimale è periodica di periodo 1**.**

Si osservi che $[x] = x$ se e solo se $x \in \mathbb{Z}$.

◁ ▷

Si osservi che $[x] = x$ **se e solo se** $x \in \mathbb{Z}$**.**

Esempio $[9/4] =$

Si osservi che $[x] = x$ **se e solo se** $x \in \mathbb{Z}$**.**

Esempio $[9/4] =$

$\dfrac{8+1}{4} = 2 + 1/4$**.**

$[9/4] = 2$**;**

$(9/4) = 9/4 - 2 = 1/4 = 0,25$**.**

◁ ▷

Si osservi che $[x] = x$ **se e solo se** $x \in \mathbb{Z}$**.**

Esempio $[9/4] =$

$\dfrac{8+1}{4} = 2 + 1/4$**.**

$[9/4] = 2$**;**

$(9/4) = 9/4 - 2 = 1/4 = 0,25$**.**

Esempio $[-27/5] =$

Si osservi che $[x] = x$ **se e solo se** $x \in \mathbb{Z}$**.**

Esempio $[9/4] =$

$\dfrac{8+1}{4} = 2 + 1/4$**.**

$[9/4] = 2$**;**

$(9/4) = 9/4 - 2 = 1/4 = 0,25$**.**

Esempio $[-27/5] =$

$-27/5 = -\dfrac{30-3}{5} = -6 + 3/5$**.**

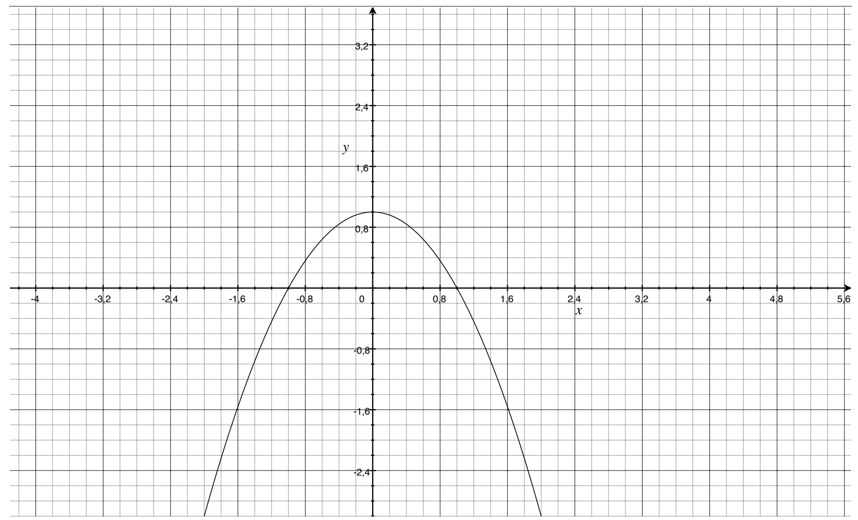
$[-27/5] = -6$**;**

$(-27/5) = 3/5 = 0,6$**.**

◁ ▷

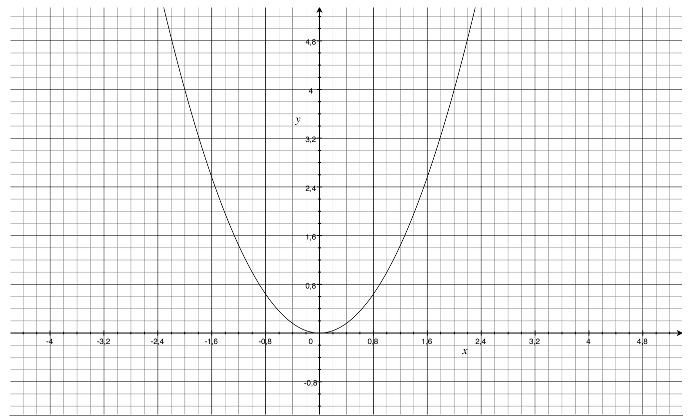
- $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice superiormente limitata se**

• $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice superiormente limitata se esiste una costante** K **tale che** $f(x) \leq K$ **per ogni** $x \in E$**; in questo caso, la più piccola di queste limitazioni superiori si dice l'estremo superiore di** f **e si denota con** $\sup f$**.**



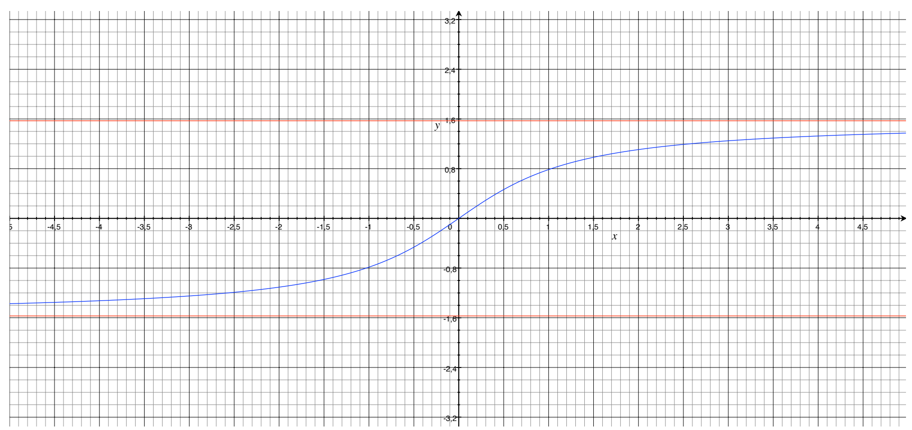
Se f **non è superiormente limitata si dice che** $\sup f = +\infty$**.**

• f **si dice inferiormente limitata se esiste una costante** K **tale che** $f(x) \geq K$ **per ogni** $x \in E$**; in questo caso, la più grande di queste limitazioni inferiori si dice l'estremo inferiore di** f **e si denota con** $\inf f$**.**



Se f **non è inferiormente limitata si dice che** $\inf f = -\infty$**.**

• f **si dice limitata se è sia inferiormente limitata che superiormente limitata, cioè se esiste una costante** K **tale che** $|f(x)| \leq K$ **per ogni** $x \in E$**.**



◁ ▷

Ad esempio la funzione $f(x) = x^2 - 1$ è inferiormente limitata perché ad esempio si può prendere $K = -10$ e si osserva che $f(x) \geq -10$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; si ha inoltre $\inf f = -1$.

Ad esempio la funzione $f(x) = x^2 - 1$ **è inferiormente limitata perché ad esempio si può prendere** $K = -10$ **e si osserva che** $f(x) \geq -10$ **per ogni** $x \in \mathbb{R}$**; si ha inoltre** $\inf f = -1$**.**

Invece f **è superiormente illimitata (** $\sup f = +\infty$**); infatti qualunque sia** $K \in \mathbb{R}$**, si può trovare** $x \in \mathbb{R}$ **tale che** $x^2 - 1 > K$ **(basta prendere ad esempio** $x = |K| + 1$**, si ha** $(|K| + 1)^2 - 1 = K^2 + 2|K| + 1 - 1 \geq K$**).**

Ad esempio la funzione $f(x) = x^2 - 1$ è inferiormente limitata perché ad esempio si può prendere $K = -10$ e si osserva che $f(x) \geq -10$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; si ha inoltre $\inf f = -1$.

Invece f è superiormente illimitata ($\sup f = +\infty$); infatti qualunque sia $K \in \mathbb{R}$, si può trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 - 1 > K$ (basta prendere ad esempio $x = |K| + 1$, si ha $(|K| + 1)^2 - 1 = K^2 + 2|K| + 1 - 1 \geq K$).

Ad esempio la funzione $f(x) = 1 - x^2$ è superiormente limitata con $\sup f = 1$ ed è inferiormente illimitata ($\inf f = -\infty$).

◁ ▷

Ad esempio la funzione $f(x) = x^2 - 1$ **è inferiormente limitata perché ad esempio si può prendere** $K = -10$ **e si osserva che** $f(x) \geq -10$ **per ogni** $x \in \mathbb{R}$**; si ha inoltre** $\inf f = -1$**.**

Invece f **è superiormente illimitata (** $\sup f = +\infty$**); infatti qualunque sia** $K \in \mathbb{R}$**, si può trovare** $x \in \mathbb{R}$ **tale che** $x^2 - 1 > K$ **(basta prendere ad esempio** $x = |K| + 1$**, si ha** $(|K| + 1)^2 - 1 = K^2 + 2|K| + 1 - 1 \geq K$**).**

Ad esempio la funzione $f(x) = 1 - x^2$ **è superiormente limitata con** $\sup f = 1$ **ed è inferiormente illimitata (**$\inf f = -\infty$**).**

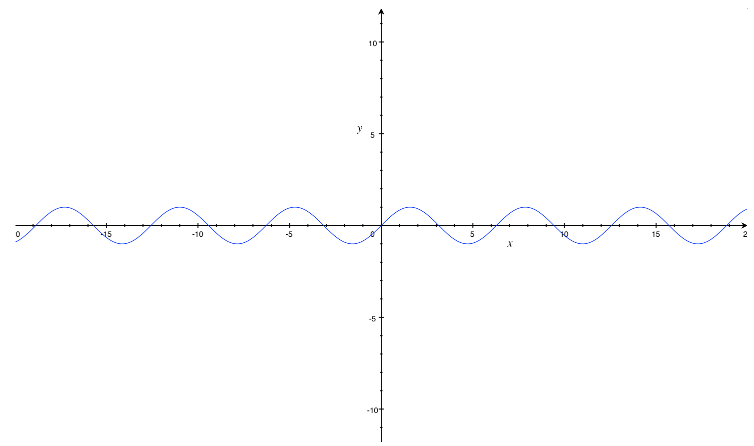
Esempi di funzioni limitate sono le funzioni $\operatorname{sen} x$**,** $\operatorname{arctg}(x)$**, tutte le funzioni costanti.**

• Massimi e minimi di una funzione.

Se esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in E$, $f(x_0)$ si dice il massimo di f in E. Il punto x_0 si dice un punto di massimo.

Si noti che il massimo, se esiste, è sempre unico, mentre possono esistere infiniti punti di massimo.

Ad esempio la funzione $\operatorname{sen} x$ ha massimo 1 e tutti i punti $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di massimo.



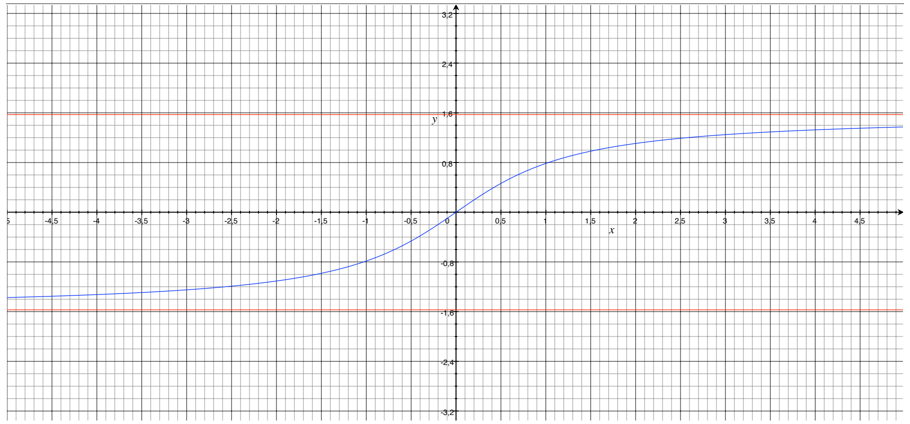
◁ ▷

Si osservi che se esiste il massimo di f, la funzione f è superiormente limitata e si ha $\sup f = \max f$.

Si osservi che se esiste il massimo di f, la funzione f è superiormente limitata e si ha $\sup f = \max f$.

Però può accadere che, pur essendo f superiormente limitata, non esiste il massimo di f.

Ad esempio si ha
$\sup \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$ **ma la funzione non ha massimo perché** $\operatorname{arctg}(x) < \frac{\pi}{2}$ **per ogni** $x \in \mathbb{R}$**.**



◁ ▷

Se esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in E$, $f(x_0)$ si dice il minimo di f in E. Il punto x_0 si dice un punto di minimo.

Si noti che il minimo, se esiste, è sempre unico, mentre possono esistere infiniti punti di minimo.

Ad esempio la funzione $\sin x$ ha minimo -1 e tutti i punti $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo.

◁ ▷

Se esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in E$, $f(x_0)$ si dice il minimo di f in E. Il punto x_0 si dice un punto di minimo.

Si noti che il minimo, se esiste, è sempre unico, mentre possono esistere infiniti punti di minimo.

Ad esempio la funzione $\sin x$ ha minimo -1 e tutti i punti $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo.

Anche in questo caso può accadere che, pur essendo f inferiormente limitata, non esista il minimo di f.

Ad esempio si ha
$\inf \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$ **ma la funzione non ha minimo perché** $\operatorname{arctg}(x) > -\frac{\pi}{2}$ **per ogni $x \in \mathbb{R}$.**

Operazioni tra funzioni

Funzioni reali di variabile reale si possono sommare e moltiplicare tra loro. La definizione è puntuale, cioè, se $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

per ogni $x \in E$.

Operazioni tra funzioni

Funzioni reali di variabile reale si possono sommare e moltiplicare tra loro. La definizione è puntuale, cioè, se $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

per ogni $x \in E$.

Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$ si può definire la funzione reciproca di f: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ per ogni $x \in E$.

Operazioni tra funzioni

Funzioni reali di variabile reale si possono sommare e moltiplicare tra loro. La definizione è puntuale, cioè, se $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

per ogni $x \in E$.

Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$ si può definire la funzione reciproca di f: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ per ogni $x \in E$.

Attenzione! Non confondere la funzione reciproca con la funzione inversa! Per questo motivo è consigliabile NON utilizzare il simbolo $f^{-1}(x)$ per indicare la funzione reciproca; infatti il simbolo f^{-1} di solito indica la funzione inversa.

◁ ▷

Operazioni tra funzioni

Funzioni reali di variabile reale si possono sommare e moltiplicare tra loro. La definizione è puntuale, cioè, se $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

per ogni $x \in E$.

Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$ si può definire la funzione reciproca di f: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ per ogni $x \in E$.

Attenzione! Non confondere la funzione reciproca con la funzione inversa! Per questo motivo è consigliabile NON utilizzare il simbolo $f^{-1}(x)$ per indicare la funzione reciproca; infatti il simbolo f^{-1} di solito indica la funzione inversa.

Esempio: la funzione reciproca della funzione $f(x) = x$ è la funzione $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x}$. Mentre la funzione inversa di f è $f^{-1}(x) = x$.

Qualche parola sulla funzione composta tra una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una funzione lineare.

Qualche parola sulla funzione composta tra una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una funzione lineare.

In molti casi è possibile individuare il comportamento di una funzione conoscendo le proprietà di una funzione più semplice e studiando successivamente varie composizioni.

◁ ▷

Qualche parola sulla funzione composta tra una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una funzione lineare.

In molti casi è possibile individuare il comportamento di una funzione conoscendo le proprietà di una funzione più semplice e studiando successivamente varie composizioni.

Esempio importante: la densità di probabilità gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ **varianza,** μ **valore atteso.**

◁ ▷

Qualche parola sulla funzione composta tra una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una funzione lineare.

In molti casi è possibile individuare il comportamento di una funzione conoscendo le proprietà di una funzione più semplice e studiando successivamente varie composizioni.

Esempio importante: la densità di probabilità gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ **varianza,** μ **valore atteso.**

Partiamo dalla funzione $g(x) = e^{-x^2}$ **il cui grafico dovrebbe essere noto.**

◁ ▷

Qualche parola sulla funzione composta tra una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una funzione lineare.

In molti casi è possibile individuare il comportamento di una funzione conoscendo le proprietà di una funzione più semplice e studiando successivamente varie composizioni.

Esempio importante: la densità di probabilità gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\sigma > 0$ **varianza,** μ **valore atteso.**

Partiamo dalla funzione $g(x) = e^{-x^2}$ **il cui grafico dovrebbe essere noto.**

Consideriamo poi successivamente le funzioni $g_1(x) = g\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

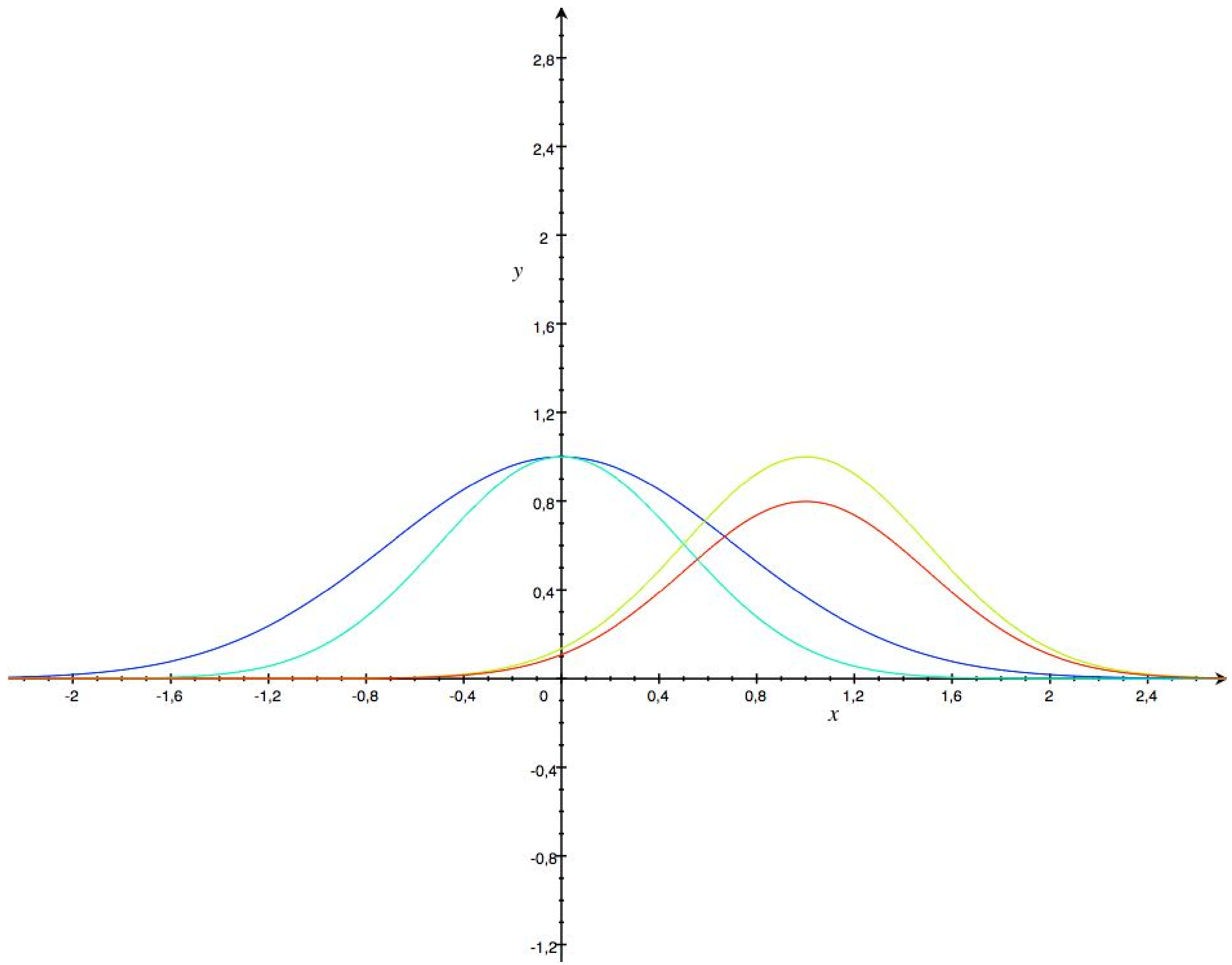
$g_2(x) = g_1(x-\mu) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$**;** $\qquad g_3(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot g_2(x) = f(x)$**.**

◁ ▷

$\sigma = \frac{1}{2}$; $\mu = 1$.

$g(x) = e^{-x^2}$ **(grafico blu);** $\quad g_1(x) = g\left(\sqrt{2} \cdot x\right)$ **(grafico celestino);**

$g_2(x) = g_1(x-1)$; **(grafico giallo)** $\quad g_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot g_2(x) = f(x)$ **(grafico rosso).**



Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** $a \in \mathbb{R}$**,** $a > 0$**.**

- **Traslazioni.**

$f_1(x) = f(x-a)$**;** f_1 **è definita sull'insieme** $\{x - a : x \in E\}$**.**
Il grafico di f_1 **corrisponde ad una traslazione a destra del grafico di** f**.**

$f_2(x) = f(x+a)$**;** f_2 **è definita sull'insieme** $\{x + a : x \in E\}$**.**
Il grafico di f_2 **corrisponde ad una traslazione a sinistra del grafico di** f**.**

$f_3(x) = f(x) + a$**;** f_3 **è definita sull'insieme** E**.**
Il grafico di f_3 **corrisponde ad una traslazione in alto del grafico di** f**.**

$f_4(x) = f(x) - a$**,** f_4 **è definita sull'insieme** E**. Il grafico di** f_4 **corrisponde ad una traslazione in basso del grafico di** f**.**

◁ ▷

- **Riflessioni.**

$f_5(x) = -f(x)$**;**
f_5 **è definita sull'insieme** E**.**
Il grafico di f_5 **è simmetrico rispetto all'asse** x **(delle ascisse) del grafico di** f**.**

$f_6(x) = f(-x)$**;** f_6 **è definita sull'insieme** $\{x : -x \in E\}$**.**
Il grafico di f_6 **è simmetrico rispetto all'asse** y **(delle ordinate) del grafico di** f**.**

◁ ▷

- **Dilatazioni e contrazioni.**

$f_7(x) = f(ax)$; f_7 **è definita sull'insieme** $\{\frac{x}{a} : x \in E\}$.
Il grafico di f_7 **corrisponde a una dilatazione (se** $0 < a < 1$**) o a una contrazione (se** $a > 1$**) nella direzione dell'asse** x **(delle ascisse) del grafico di** f.

$f_8(x) = af(x)$; f_8 **è definita sull'insieme** E.
Il grafico di f_8 **corrisponde a una contrazione (se** $0 < a < 1$**) o a una dilatazione (se** $a > 1$**) nella direzione dell'asse** y **(delle ordinate) del grafico di** f.

- **Composizioni con il valore assoluto.**

$f_9(x) = |f(x)|$**;** f_9 **è definita sull'insieme** E**.**
Il grafico di f_9 **è uguale a quello di** f **dove i valori di** f **sono positivi, viene rovesciato rispetto all'asse** x **(delle ascisse) dove i valori di** f **sono negativi.**

$f_{10}(x) = f(|x|)$**;** f_{10} **è definita sull'insieme** $\{x : |x| \in E\}$**.**
Il grafico di f_{10} **è uguale a quello di** f **dove** $x \geq 0$**, dove** $x < 0$ **si può ottenere rovesciando rispetto all'asse** y **(delle ordinate) il grafico della parte dove** $x \geq 0$**.**

- **Composizioni con il valore assoluto.**

$f_9(x) = |f(x)|$**;** f_9 **è definita sull'insieme** E**.**
Il grafico di f_9 **è uguale a quello di** f **dove i valori di** f **sono positivi, viene rovesciato rispetto all'asse** x **(delle ascisse) dove i valori di** f **sono negativi.**

$f_{10}(x) = f(|x|)$**;** f_{10} **è definita sull'insieme** $\{x : |x| \in E\}$**.**
Il grafico di f_{10} **è uguale a quello di** f **dove** $x \geq 0$**, dove** $x < 0$ **si può ottenere rovesciando rispetto all'asse** y **(delle ordinate) il grafico della parte dove** $x \geq 0$**.**

- **Funzioni periodiche.**

Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **una funzione periodica di periodo** $T > 0$**. Sia** $a \in \mathbb{R}$**,** $a > 0$**. Allora la funzione** $g(x) = f(ax)$ **è periodica di periodo** $\frac{T}{a}$**.**

Infatti, posto $E_g = \{\frac{u}{a} : u \in E\}$**, si ha** $g : E_g \to \mathbb{R}$**. Sia** $x \in E_g$**, esiste allora** $u \in E$ **tale che** $x = \frac{u}{a}$**; per ipotesi** $u \pm T \in E$ **e quindi si ha** $x \pm \frac{T}{a} = \frac{u}{a} \pm \frac{T}{a} = \frac{u \pm T}{a} \in E_g$**. Inoltre**

$$g\big(x \pm \tfrac{T}{a}\big) = f\Big(a\big(x \pm \tfrac{T}{a}\big)\Big) = f\big(ax \pm T\big) = f(ax) = g(x).$$

◁ ▷

Funzioni elementari

Funzioni elementari

Funzioni “lineari”

Funzioni elementari

Funzioni “lineari”

(ATTENZIONE: In matematica (in particolare in algebra lineare) il termine “funzione lineare” ha un significato un po’ diverso, noi qui consideriamo lineare una funzione che ha come grafico una retta)

Funzioni elementari

Funzioni “lineari”

(ATTENZIONE: In matematica (in particolare in algebra lineare) il termine “funzione lineare” ha un significato un po’ diverso, noi qui consideriamo lineare una funzione che ha come grafico una retta)

- **funzioni lineari:** $f(x) = mx + q$

m **è il coefficiente angolare della retta.**

Funzioni elementari

Funzioni “lineari”

(ATTENZIONE: In matematica (in particolare in algebra lineare) il termine “funzione lineare” ha un significato un po’ diverso, noi qui consideriamo lineare una funzione che ha come grafico una retta)

- **funzioni lineari:** $f(x) = mx + q$

m **è il coefficiente angolare della retta.**

Consideriamo il caso particolare in cui $x = n \in \mathbb{N}$ **e poniamo**

$$a_n = f(n) = m \cdot n + q.$$

Funzioni elementari

Funzioni “lineari”

(ATTENZIONE: In matematica (in particolare in algebra lineare) il termine “funzione lineare” ha un significato un po’ diverso, noi qui consideriamo lineare una funzione che ha come grafico una retta)

- **funzioni lineari:** $f(x) = mx + q$

m **è il coefficiente angolare della retta.**

Consideriamo il caso particolare in cui $x = n \in \mathbb{N}$ **e poniamo**

$$a_n = f(n) = m \cdot n + q.$$

Osserviamo che per ogni n **si ha**

$$a_{n+1} - a_n = m \cdot (n+1) + q - \big(m \cdot n + q\big) = m.$$

Cosa ci ricorda?

Funzioni elementari

Funzioni "lineari"

(ATTENZIONE: In matematica (in particolare in algebra lineare) il termine "funzione lineare" ha un significato un po' diverso, noi qui consideriamo lineare una funzione che ha come grafico una retta)

- **funzioni lineari:** $f(x) = mx + q$

m **è il coefficiente angolare della retta.**

Consideriamo il caso particolare in cui $x = n \in \mathbb{N}$ **e poniamo**

$$a_n = f(n) = m \cdot n + q.$$

Osserviamo che per ogni n **si ha**

$$a_{n+1} - a_n = m \cdot (n+1) + q - \big(m \cdot n + q\big) = m.$$

Cosa ci ricorda?
La successione $\big(a_n\big)_n$ **è una progressione aritmetica di ragione** m**.**

Funzioni elementari

Funzioni “lineari”

(ATTENZIONE: In matematica (in particolare in algebra lineare) il termine “funzione lineare” ha un significato un po’ diverso, noi qui consideriamo lineare una funzione che ha come grafico una retta)

- **funzioni lineari:** $f(x) = mx + q$

m **è il coefficiente angolare della retta.**

Consideriamo il caso particolare in cui $x = n \in \mathbb{N}$ **e poniamo**

$$a_n = f(n) = m \cdot n + q.$$

Osserviamo che per ogni n **si ha**

$$a_{n+1} - a_n = m \cdot (n+1) + q - \big(m \cdot n + q\big) = m.$$

Cosa ci ricorda?
La successione $\big(a_n\big)_n$ **è una progressione aritmetica di ragione** m**.**

Quindi la progressione aritmetica descrive una crescita (o decrescita) “lineare”.

◁ ▷

$f(x) = mx + q$

Il grafico è una retta nel piano.

$\triangleleft$ $\triangleright$

$f(x) = mx + q$

Il grafico è una retta nel piano.

Problema: scrivere l'equazione della retta passante per i due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

◁ ▷

$f(x) = mx + q$

Il grafico è una retta nel piano.

Problema: scrivere l'equazione della retta passante per i due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + q; \\ y_2 = mx_2 + q \end{cases} \quad \Rightarrow y_1 - y_2 = m\Big(x_1 - x_2\Big)$$

quindi $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ **e**

$q = y_1 - m\, x_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\, x_1 = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_1 + x_1 y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$

$$f(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Osservazione: qualunque siano i due punti della retta si ha sempre $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

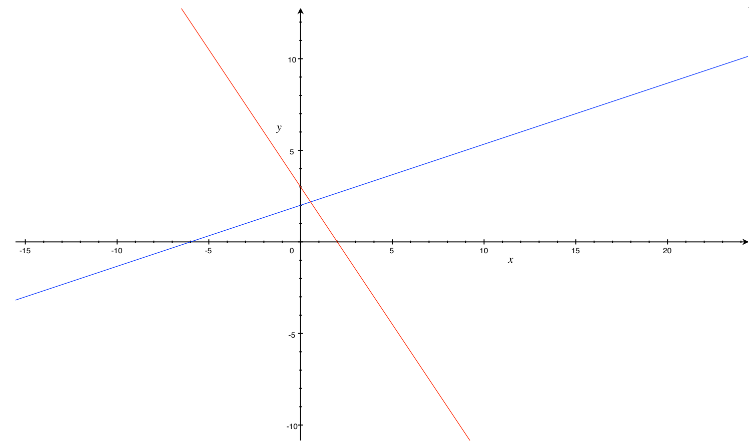
Osservazione: qualunque siano i due punti della retta si ha sempre $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Questo numero rappresenta la pendenza della retta.

Osservazione: qualunque siano i due punti della retta si ha sempre $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Questo numero rappresenta la pendenza della retta.

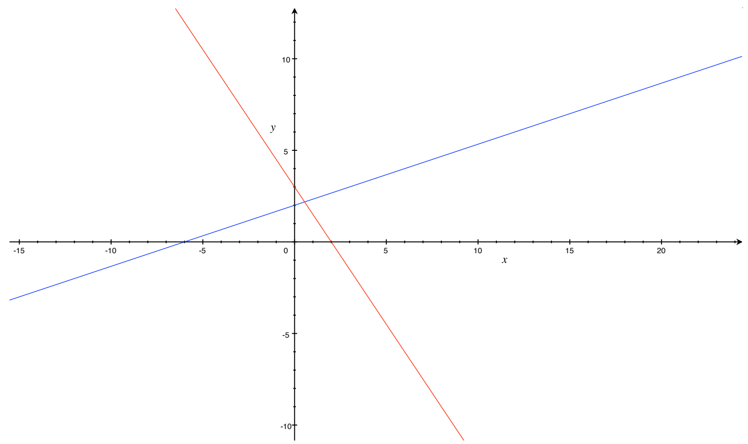
In particolare la funzione è crescente se e solo se $m > 0$ ed è decrescente se e solo se $m < 0$.



Osservazione: qualunque siano i due punti della retta si ha sempre $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Questo numero rappresenta la pendenza della retta.

In particolare la funzione è crescente se e solo se $m > 0$ **ed è decrescente se e solo se** $m < 0$**.**



Se $m = 0$ **la funzione è costante:** $f(x) = q$**.**

$q = f(0)$ **è l'intercetta della retta sull'asse delle ordinate.**

◁ ▷

Il grafico di una funzione lineare $f(x) = mx + q$ è l'insieme

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = mx + q\right\}$$

L'espressione $y = mx + q$ si dice equazione della retta (in forma esplicita).
In generale, si dice equazione della retta in forma cartesiana l'espressione

$$ax + by + c = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, a, b non entrambi nulli.
La retta è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$.

◁ ▷

Il grafico di una funzione lineare $f(x) = mx + q$ è l'insieme

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = mx + q\Big\}$$

L'espressione $y = mx + q$ si dice equazione della retta (in forma esplicita).
In generale, si dice equazione della retta in forma cartesiana l'espressione

$$ax + by + c = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, a, b non entrambi nulli.
La retta è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$.

Si osservi che, se $b \neq 0$, si può scrivere

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

e quindi $y = mx + q$ con $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$.

◁ ▷

Il grafico di una funzione lineare $f(x) = mx + q$ è l'insieme

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = mx + q\Big\}$$

L'espressione $y = mx + q$ si dice equazione della retta (in forma esplicita).
In generale, si dice equazione della retta in forma cartesiana l'espressione

$$ax + by + c = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, a, b non entrambi nulli.
La retta è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$.

Si osservi che, se $b \neq 0$, si può scrivere

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

e quindi $y = mx + q$ con $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$.

Se $b = 0$, la retta ha equazione $ax + c = 0$, cioè $x = -\frac{c}{a}$, e quindi la retta è "verticale", parallela all'asse delle ordinate. Una tale retta non soddisfa la condizione per essere il grafico di una funzione.

◁ ▷

Funzioni potenza.

• **Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:**
$x^1 = x$**;** $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$**.**

◁ ▷

Funzioni potenza.

- **Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:**

$x^1 = x$; $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$.

- **Proprietà algebriche delle potenze:**

◁ ▷

Funzioni potenza.

• **Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:**
$x^1 = x$**;** $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$**.**

• **Proprietà algebriche delle potenze:**
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ **e per ogni** $n, m \in \mathbb{N}^+$**,**

$x^{n+m} =$

Funzioni potenza.

• **Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:**
$x^1 = x$**;** $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$**.**

• **Proprietà algebriche delle potenze:**
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ **e per ogni** $n, m \in \mathbb{N}^+$**,**

$x^{n+m} =$
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

◁ ▷

Funzioni potenza.

• Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:
$x^1 = x$**;** $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$**.**

• Proprietà algebriche delle potenze:
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ **e per ogni** $n, m \in \mathbb{N}^+$**,**

$x^{n+m} =$
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

$(x^n)^m =$

◁ ▷

Funzioni potenza.

• **Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:**
$x^1 = x$**;** $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$**.**

• **Proprietà algebriche delle potenze:**
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ **e per ogni** $n, m \in \mathbb{N}^+$**,**

$x^{n+m} =$
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

$(x^n)^m =$
$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Funzioni potenza.

• **Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:**
$x^1 = x$**;** $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$**.**

• **Proprietà algebriche delle potenze:**
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ **e per ogni** $n, m \in \mathbb{N}^+$**,**

$x^{n+m} =$
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

$(x^n)^m =$
$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$(xy)^n =$

◁ ▷

Funzioni potenza.

• **Definizione di potenza di base reale e esponente naturale:**
$x^1 = x$**;** $x^n = x \cdot x^{n-1}$ **per** $n > 1$**.**

• **Proprietà algebriche delle potenze:**
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ **e per ogni** $n, m \in \mathbb{N}^+$**,**

$x^{n+m} =$
$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

$(x^n)^m =$
$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$(xy)^n =$
$(xy)^n = x^n \cdot y^n$

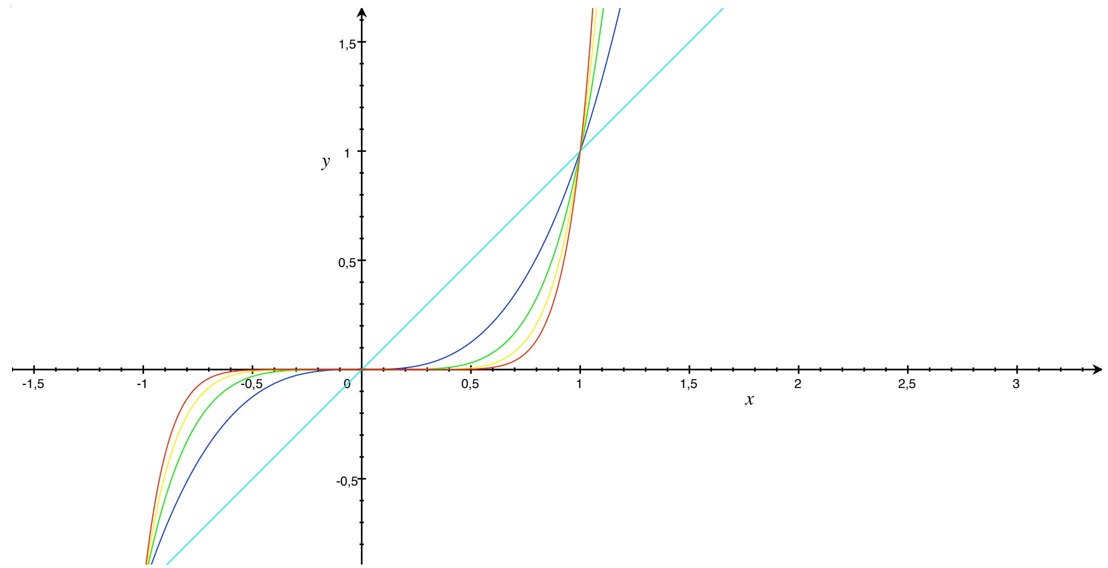
◁ ▷

- **Proprietà analitiche delle potenze e radici:**

◁ ▷

- **Proprietà analitiche delle potenze e radici:**

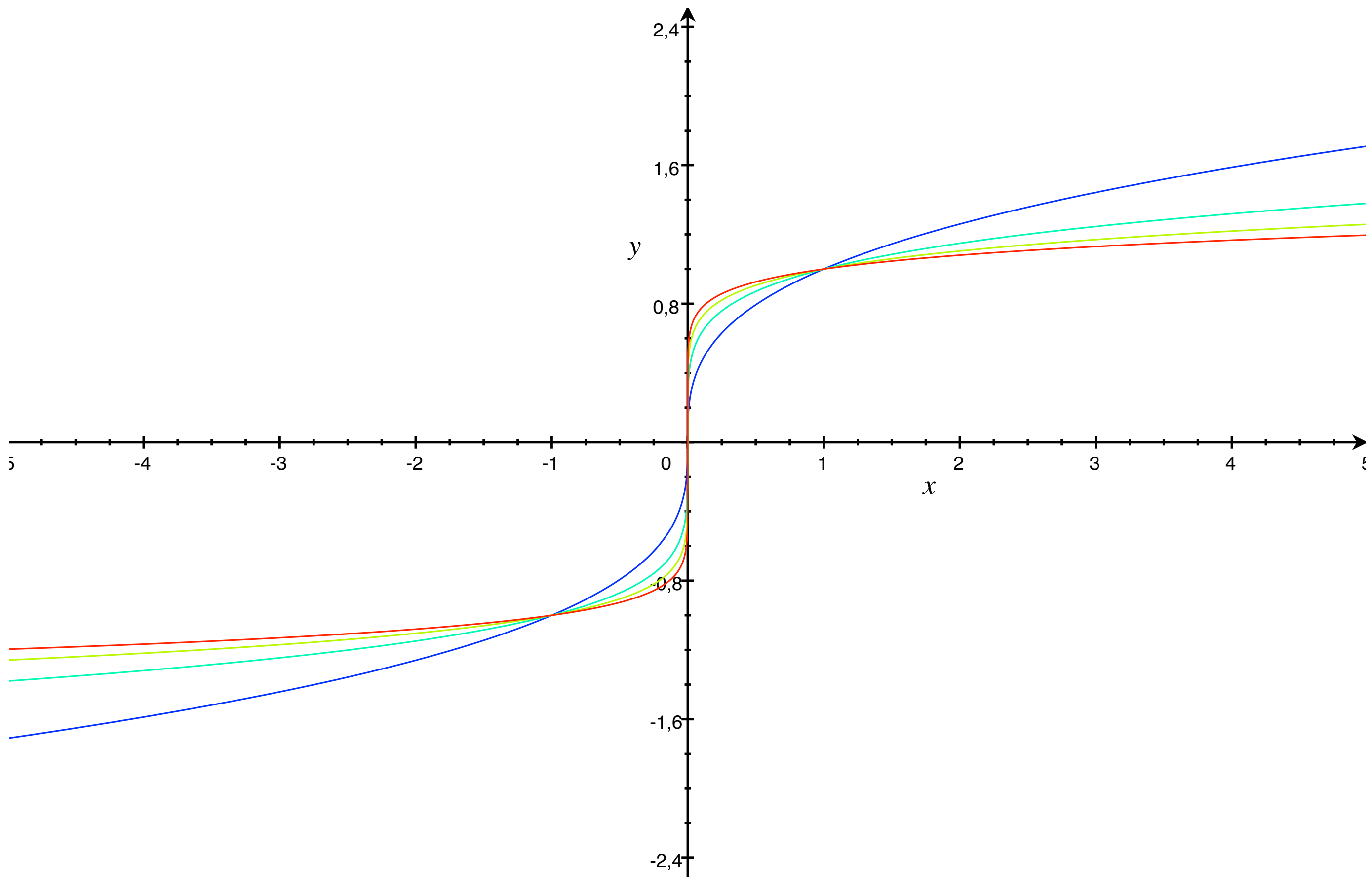
Se n è dispari la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente, dispari, biiettiva.



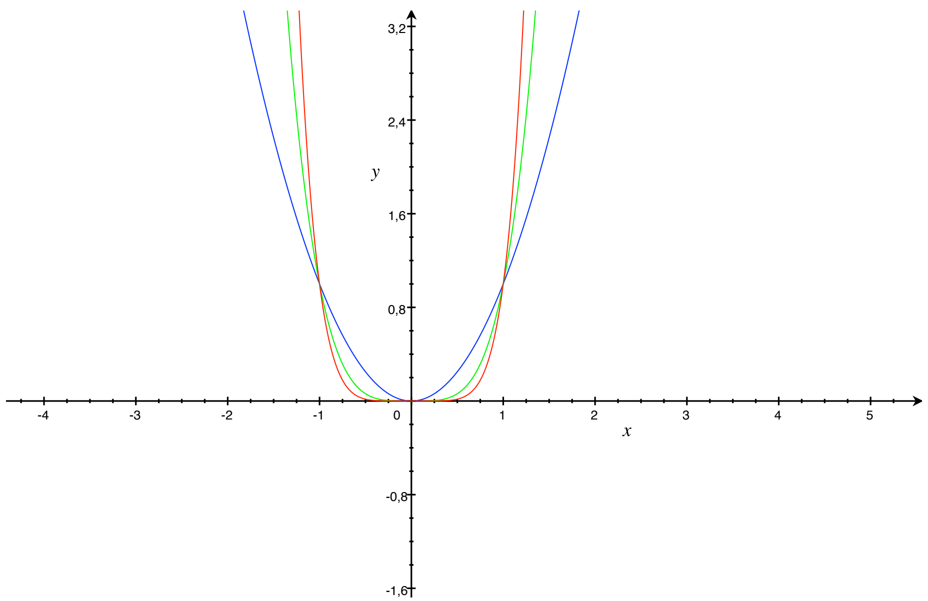
La funzione pertanto è invertibile; la sua funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice la radice $n-$esima:

$$\sqrt[n]{y} = x \text{ se e solo se } x^n = y.$$

Grafici di $\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \sqrt[9]{x}$



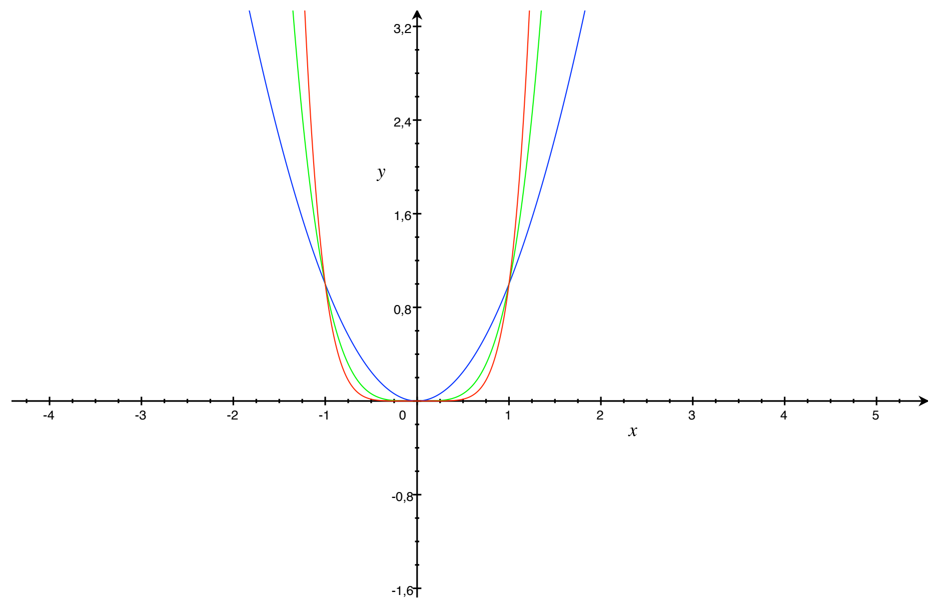
Se n è pari la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è pari, non è monotona, non è suriettiva, non è iniettiva.



La funzione pertanto non è invertibile.

◁ ▷

Se n è pari la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è pari, non è monotona, non è suriettiva, non è iniettiva.

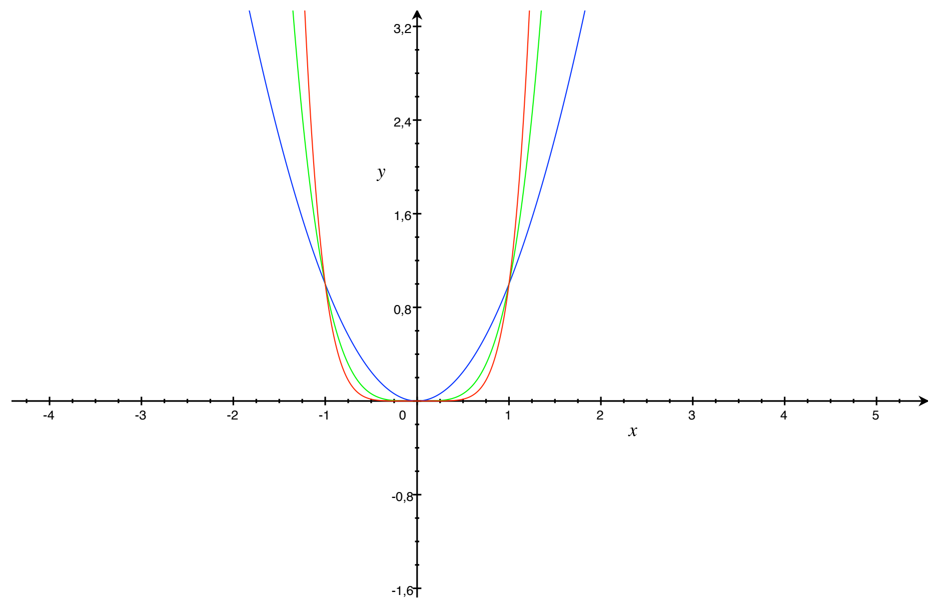


La funzione pertanto non è invertibile.

Tuttavia, per ogni $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, esiste uno ed un solo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tale che $x^n = y$.

◁ ▷

Se n è pari la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è pari, non è monotona, non è suriettiva, non è iniettiva.



La funzione pertanto non è invertibile.

Tuttavia, per ogni $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, esiste uno ed un solo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tale che $x^n = y$.

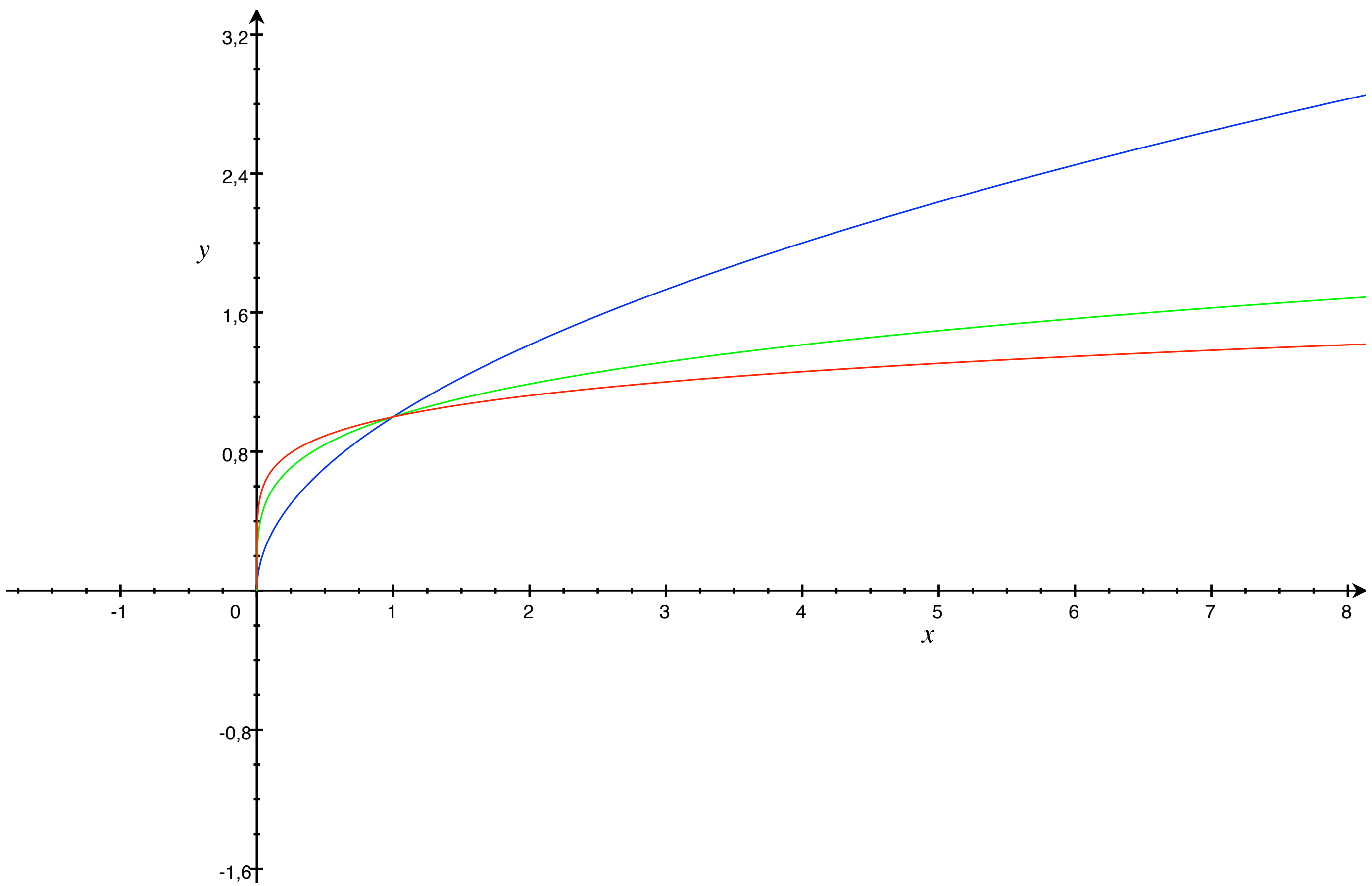
Tale numero x si dirà la radice $n-$esima di y.

Se $y \geq 0$ diremo radice $n-$esima di y l'unico numero maggiore o uguale a zero x tale che $x^n = y$.

Se $y \geq 0$ diremo radice $n-$esima di y l'unico numero maggiore o uguale a zero x tale che $x^n = y$.

La radice $n-$esima è la funzione inversa della funzione $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definita da $f(x) = x^n$.

n pari: $y \geq 0$, $\sqrt[n]{y} = x$ **se e solo se** $x \geq 0$, $x^n = y$.



Attenzione! $\sqrt{x}$ **è sempre un numero positivo (o nullo).**

Quindi è errato scrivere ad esempio $\sqrt{4} = \pm 2$**.**

Invece è corretto scrivere che le soluzioni dell'equazione $x^2 = 4$ **sono** $\pm\sqrt{4} = \pm 2$**.**

◁ ▷

Attenzione! $\sqrt{x}$ **è sempre un numero positivo (o nullo).**

Quindi è errato scrivere ad esempio $\sqrt{4} = \pm 2$**.**

Invece è corretto scrivere che le soluzioni dell'equazione $x^2 = 4$ **sono** $\pm\sqrt{4} = \pm 2$**.**

- **Potenze di esponente intero.**

◁ ▷

Attenzione! $\sqrt{x}$ è sempre un numero positivo (o nullo).

Quindi è errato scrivere ad esempio $\sqrt{4} = \pm 2$.

Invece è corretto scrivere che le soluzioni dell'equazione $x^2 = 4$ sono $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.

- **Potenze di esponente intero.**

Sia $x \neq 0$. Si pone per definizione $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Attenzione! $\sqrt{x}$ **è sempre un numero positivo (o nullo).**

Quindi è errato scrivere ad esempio $\sqrt{4} = \pm 2$**.**

Invece è corretto scrivere che le soluzioni dell'equazione $x^2 = 4$ **sono** $\pm\sqrt{4} = \pm 2$**.**

- **Potenze di esponente intero.**

Sia $x \neq 0$**. Si pone per definizione** $x^{-1} = \frac{1}{x}$**.**

Sia $x \neq 0$ **e** $n \in \mathbb{N}^+$**. Si pone per definizione**

$$x^{-n} = \left(x^n\right)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^n = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

◁ ▷

- **Potenze di esponente razionale.**

◁ ▷

- **Potenze di esponente razionale.**

Sia $x \neq 0$**. Si pone per definizione** $x^0 = 1$**.**

Attenzione! Non è definita la potenza 0^0**.**

◁ ▷

- **Potenze di esponente razionale.**

Sia $x \neq 0$**. Si pone per definizione** $x^0 = 1$**.**

Attenzione! Non è definita la potenza 0^0**.**

Sia $x > 0$ **e** $n \in \mathbb{N}^+$**. Definiamo**

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

◁ ▷

• Potenze di esponente razionale.

Sia $x \neq 0$. Si pone per definizione $x^0 = 1$.

Attenzione! Non è definita la potenza 0^0.

Sia $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$. Definiamo

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Si osservi che $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(x^n\right)^{\frac{1}{n}} = x$.

- **Potenze di esponente razionale.**

Sia $x \neq 0$**. Si pone per definizione** $x^0 = 1$**.**

Attenzione! Non è definita la potenza 0^0**.**

Sia $x > 0$ **e** $n \in \mathbb{N}^+$**. Definiamo**

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Si osservi che $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(x^n\right)^{\frac{1}{n}} = x$.

Sia $x > 0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$**, si pone allora**

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

◁ ▷

• **Potenze di esponente razionale.**

Sia $x \neq 0$**. Si pone per definizione** $x^0 = 1$**.**

Attenzione! Non è definita la potenza 0^0**.**

Sia $x > 0$ **e** $n \in \mathbb{N}^+$**. Definiamo**

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Si osservi che $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(x^n\right)^{\frac{1}{n}} = x$.

Sia $x > 0$**,** $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$**, si pone allora**

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Sia $x > 0$**,** $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$**, si pone allora**

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Abbiamo pertanto definito, per ogni numero razionale $\alpha = \frac{m}{n}$, la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, potenza di esponente α, definita da

$$f(x) = x^{\alpha} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Abbiamo pertanto definito, per ogni numero razionale $\alpha = \frac{m}{n}$, la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, potenza di esponente α, definita da

$$f(x) = x^{\alpha} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Si noti che α potrebbe essere rappresentato da una frazione equivalente, del tipo $\alpha = \frac{km}{kn}$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
La definizione però ha significato perché

$$x^{\frac{km}{kn}} = \left(x^{\frac{1}{kn}}\right)^{km} = \left[\left(\left[x^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{k}}\right)^{k}\right]^{m} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = x^{\frac{m}{n}}.$$

◁ ▷

Anche per le potenze di esponente razionale valgono le proprietà algebriche sopra descritte per le potenze di esponente naturale.

Per ogni $x, y \in]0, +\infty[$ **e per ogni** $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$**,**

◁ ▷

Anche per le potenze di esponente razionale valgono le proprietà algebriche sopra descritte per le potenze di esponente naturale.

Per ogni $x, y \in]0, +\infty[$ **e per ogni** $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$**,**

$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$

◁ ▷

Anche per le potenze di esponente razionale valgono le proprietà algebriche sopra descritte per le potenze di esponente naturale.

Per ogni $x, y \in]0, +\infty[$ **e per ogni** $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$**,**

$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$

$(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta}$

Anche per le potenze di esponente razionale valgono le proprietà algebriche sopra descritte per le potenze di esponente naturale.

Per ogni $x, y \in]0, +\infty[$ **e per ogni** $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$**,**

$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$$

$$(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta}$$

$$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$$

Anche per le potenze di esponente razionale valgono le proprietà algebriche sopra descritte per le potenze di esponente naturale.

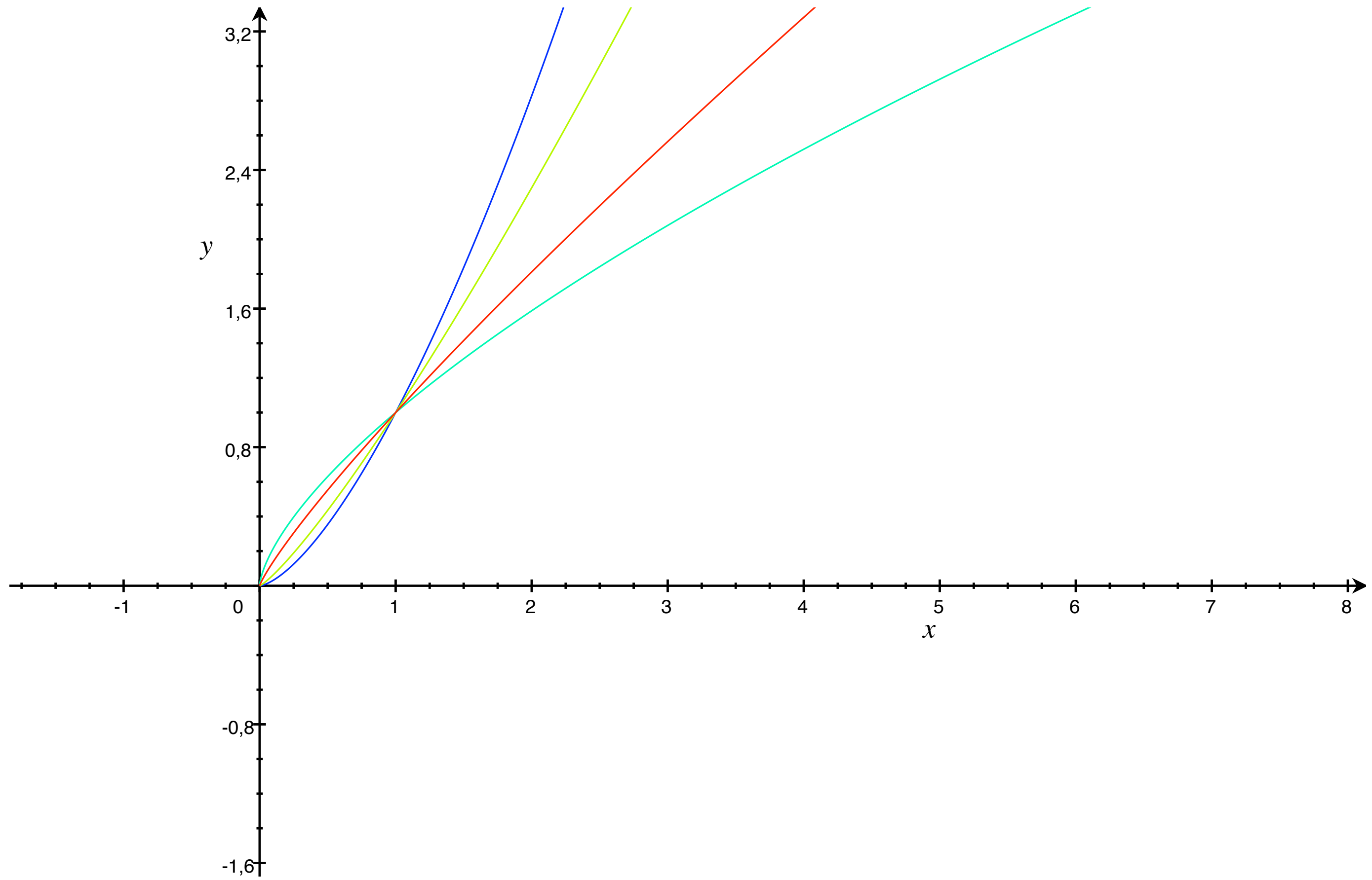
Per ogni $x, y \in]0, +\infty[$ **e per ogni** $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$**,**

$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$

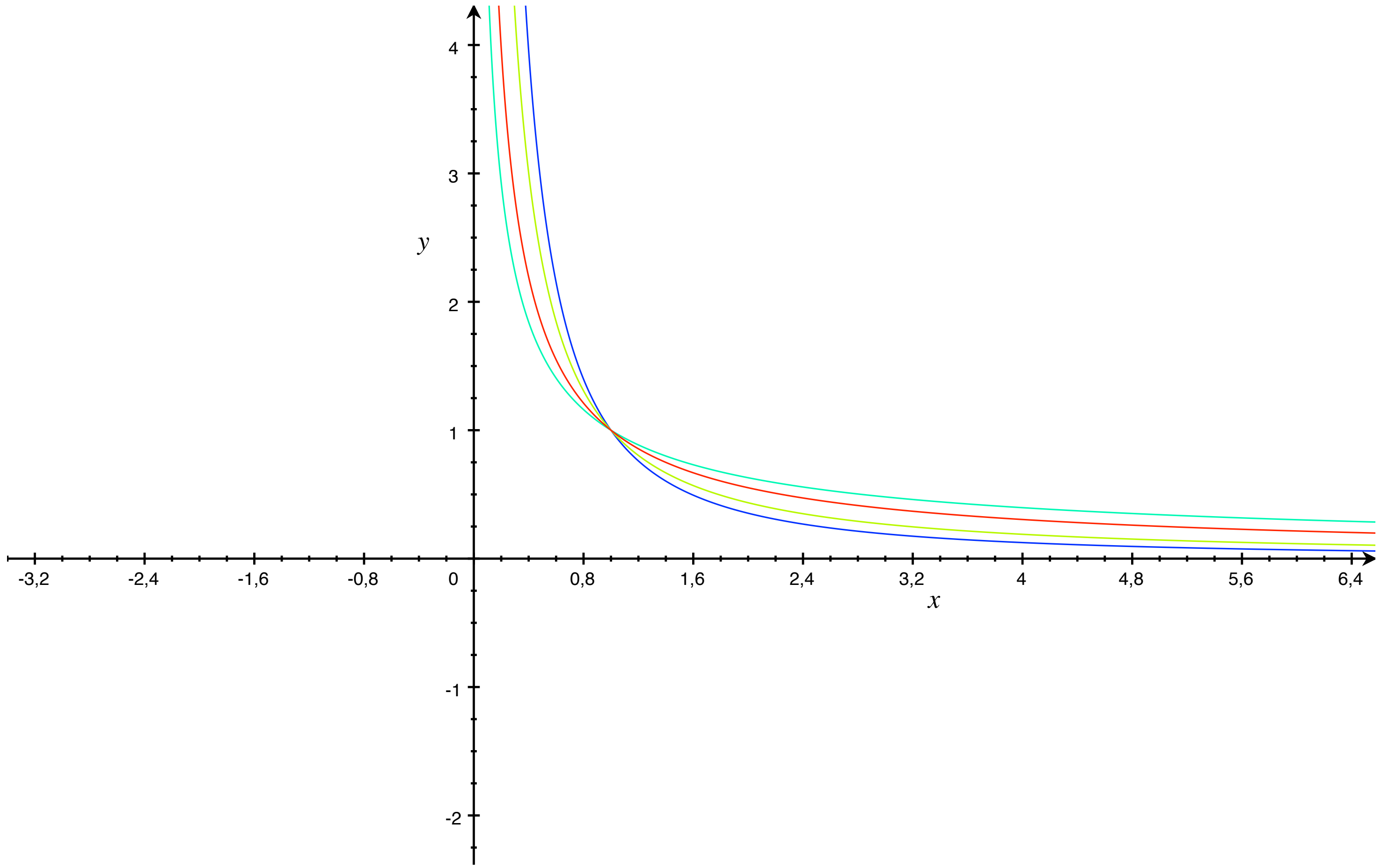
$(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta}$

$(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$

Attenzione! Le potenze di esponente razionale sono generalmente definite soltanto per $x > 0$**, anche se in alcuni casi avrebbe un significato anche considerare una base negativa o nulla. Per questo motivo, ad esempio, le funzioni** $x^{\frac{1}{3}}$ **e** $\sqrt[3]{x}$ **devono essere considerate diverse, in quanto la prima è definita su** $]0, +\infty[$**, mentre la seconda è definita su** $\mathbb{R}$**.**



I grafici sopra sono relativi alle funzioni x^α con $\alpha \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}\right\}$.
Sapete associare i colori ai valori di α?
Azzurro:
Giallino:
Rosso:
Verde - celestino:



I grafici sopra sono relativi alle funzioni x^α con $\alpha \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{6}{7}\}$.
Sapete associare i colori ai valori di α?
Azzurro:
Giallino:
Rosso:
Verde - celestino:

◁ ▷

Funzioni razionali.

Una funzione razionale intera è una funzione polinomiale, del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; \qquad a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2 \ldots n), \quad a_n \neq 0$$

n **è il grado della funzione.**

◁ ▷

Funzioni razionali.

Una funzione razionale intera è una funzione polinomiale, del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; \qquad a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2...n), \quad a_n \neq 0$$

n **è il grado della funzione.**

Per convenzione, si considera polinomio anche la funzione costante $p(x) = 0$. **Si osservi che per il polinomio nullo non è definito il grado.**

◁ ▷

Funzioni razionali.

Una funzione razionale intera è una funzione polinomiale, del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; \qquad a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2 \ldots n), \quad a_n \neq 0$$

n **è il grado della funzione.**

Per convenzione, si considera polinomio anche la funzione costante $p(x) = 0$**. Si osservi che per il polinomio nullo non è definito il grado.**

Una funzione razionale è una funzione del tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$**, con** p, q **funzioni razionali intere.**

Funzioni razionali.

Una funzione razionale intera è una funzione polinomiale, del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; \qquad a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2...n), \quad a_n \neq 0$$

n **è il grado della funzione.**

Per convenzione, si considera polinomio anche la funzione costante $p(x) = 0$**. Si osservi che per il polinomio nullo non è definito il grado.**

Una funzione razionale è una funzione del tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$**, con** p, q **funzioni razionali intere.**

Il dominio della funzione f **è l'insieme di tutti i numeri reali ad esclusione degli zeri del polinomio** q**:** $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$**.**

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$

◁ ▷

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$
Terzo giorno: $I(3) = 15 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 45$

◁ ▷

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$
Terzo giorno: $I(3) = 15 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 45$
Quarto giorno: $I(4) = 45 + 45 \cdot 2 = 45 \cdot 3 = 5 \cdot 3^3$

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$
Terzo giorno: $I(3) = 15 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 45$
Quarto giorno: $I(4) = 45 + 45 \cdot 2 = 45 \cdot 3 = 5 \cdot 3^3$
$\cdots\cdots\cdots$

◁ ▷

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$
Terzo giorno: $I(3) = 15 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 45$
Quarto giorno: $I(4) = 45 + 45 \cdot 2 = 45 \cdot 3 = 5 \cdot 3^3$
$\cdots\cdots\cdots$
Decimo giorno: $I(10) = 5 \cdot 3^9 = 98415$**.**

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n)$ = **numero infetti al giorno** n.
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$
Terzo giorno: $I(3) = 15 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 45$
Quarto giorno: $I(4) = 45 + 45 \cdot 2 = 45 \cdot 3 = 5 \cdot 3^3$
....
Decimo giorno: $I(10) = 5 \cdot 3^9 = 98415$.

Osserviamo che per ogni n **si ha** $\dfrac{I(n+1)}{I(n)} = 3$.

Cosa ci ricorda?

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$
Terzo giorno: $I(3) = 15 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 45$
Quarto giorno: $I(4) = 45 + 45 \cdot 2 = 45 \cdot 3 = 5 \cdot 3^3$
$\dots\dots\dots$
Decimo giorno: $I(10) = 5 \cdot 3^9 = 98415$**.**

Osserviamo che per ogni n **si ha** $\dfrac{I(n+1)}{I(n)} = 3$**.**

Cosa ci ricorda?
La successione $\big(I(n)\big)_n$ **è una progressione geometrica di ragione** 3 **e** $I(n) = 5 \cdot 3^{n-1}$**.**

◁ ▷

Fenomeni di crescita e decadimento: funzioni esponenziali e logaritmiche.

Un'epidemia è in atto. Ogni giorno una persona contagiata infetta due persone. Se al primo giorno abbiamo 5 infetti, quante persone saranno infette dopo 10 giorni?

$I(n) =$ **numero infetti al giorno** n**.**
Primo giorno: $I(1) = 5$
Secondo giorno: $I(2) = 5 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 = 15$
Terzo giorno: $I(3) = 15 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 45$
Quarto giorno: $I(4) = 45 + 45 \cdot 2 = 45 \cdot 3 = 5 \cdot 3^3$
....
Decimo giorno: $I(10) = 5 \cdot 3^9 = 98415$**.**

Osserviamo che per ogni n **si ha** $\dfrac{I(n+1)}{I(n)} = 3$**.**

Cosa ci ricorda?
La successione $\big(I(n)\big)_n$ **è una progressione geometrica di ragione** 3 **e** $I(n) = 5 \cdot 3^{n-1}$**.**

Ora però vogliamo conoscere l'andamento della crescita ad ogni istante, dovremo calcolare 3^t **per ogni** $t \in \mathbb{R}$**. Si ottiene così la funzione esponenziale** a^t **di base** $a = 3$**.**

Il tempo di dimezzamento dello stronzio-90 è di 25 anni. La massa iniziale è di 24 mg. A quanto ammonta la sua massa al tempo t?

◁ ▷

Il tempo di dimezzamento dello stronzio-90 è di 25 anni. La massa iniziale è di 24 mg. A quanto ammonta la sua massa al tempo t?

$$m(0) = 24; \qquad m(25) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12; \qquad m(50) = \frac{1}{2} \cdot m(25) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m(0) = 6$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot m(50) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot m(0) = 3; \qquad m(k \cdot 25) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot m(0)$$

Possiamo calcolare $m(t)$?

◁ ▷

Il tempo di dimezzamento dello stronzio-90 è di 25 anni. La massa iniziale è di 24 mg. A quanto ammonta la sua massa al tempo t?

$$m(0) = 24; \qquad m(25) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12; \qquad m(50) = \frac{1}{2} \cdot m(25) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m(0) = 6$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot m(50) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot m(0) = 3; \qquad m(k \cdot 25) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot m(0)$$

Possiamo calcolare $m(t)$?

Osserviamo che si ha $\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^{k \cdot 25} = \left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{k \cdot 25}$**, quindi** $m(k \cdot 25) = \left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{k \cdot 25} \cdot m(0)$.

Si ottiene così la funzione $m(t) = \left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^t \cdot m(0)$.

◁ ▷

Il tempo di dimezzamento dello stronzio-90 è di 25 anni. La massa iniziale è di 24 mg. A quanto ammonta la sua massa al tempo t?

$$m(0)=24; \qquad m(25)=\frac{1}{2}\cdot 24=12; \qquad m(50)=\frac{1}{2}\cdot m(25)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot m(0)=6$$

$$m(75)=\frac{1}{2}\cdot m(50)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot m(0)=3; \qquad m(k\cdot 25)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot m(0)$$

Possiamo calcolare $m(t)$?

Osserviamo che si ha $\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^{k\cdot 25}=\left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{k\cdot 25}$, quindi $m(k\cdot 25)=\left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{k\cdot 25}\cdot m(0)$.

Si ottiene così la funzione $m(t)=\left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{t}\cdot m(0)$.

Anche in questo caso abbiamo a che fare con un fenomeno di tipo esponenziale del tipo a^t.

Ora però la base è $a=2^{-\frac{1}{25}}<1$, si ha quindi una decrescita esponenziale.

◁ ▷

Il tempo di dimezzamento dello stronzio-90 è di 25 anni. La massa iniziale è di 24 mg. A quanto ammonta la sua massa al tempo t?

$$m(0) = 24; \qquad m(25) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12; \qquad m(50) = \frac{1}{2} \cdot m(25) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m(0) = 6$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot m(50) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot m(0) = 3; \qquad m(k \cdot 25) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot m(0)$$

Possiamo calcolare $m(t)$?

Osserviamo che si ha $\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{25}}}\right)^{k\cdot 25} = \left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{k\cdot 25}$, quindi $m(k \cdot 25) = \left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{k\cdot 25} \cdot m(0)$.

Si ottiene così la funzione $m(t) = \left(2^{-\frac{1}{25}}\right)^{t} \cdot m(0)$.

Anche in questo caso abbiamo a che fare con un fenomeno di tipo esponenziale del tipo a^t.

Ora però la base è $a = 2^{-\frac{1}{25}} < 1$, si ha quindi una decrescita esponenziale.

◁ ▷

- **Funzioni esponenziali.**

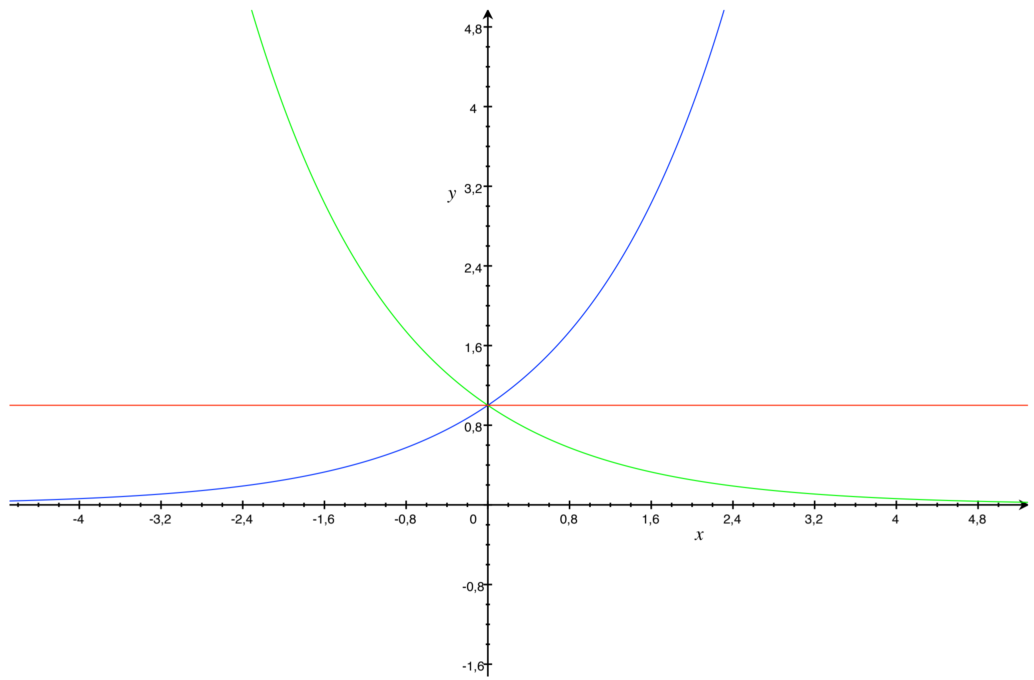
Sia $a > 0$, si può definire la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, estendendo in modo opportuno la nozione di potenza anche agli esponenti reali non razionali.

◁ ▷

- **Funzioni esponenziali.**

Sia $a > 0$, si può definire la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, estendendo in modo opportuno la nozione di potenza anche agli esponenti reali non razionali.

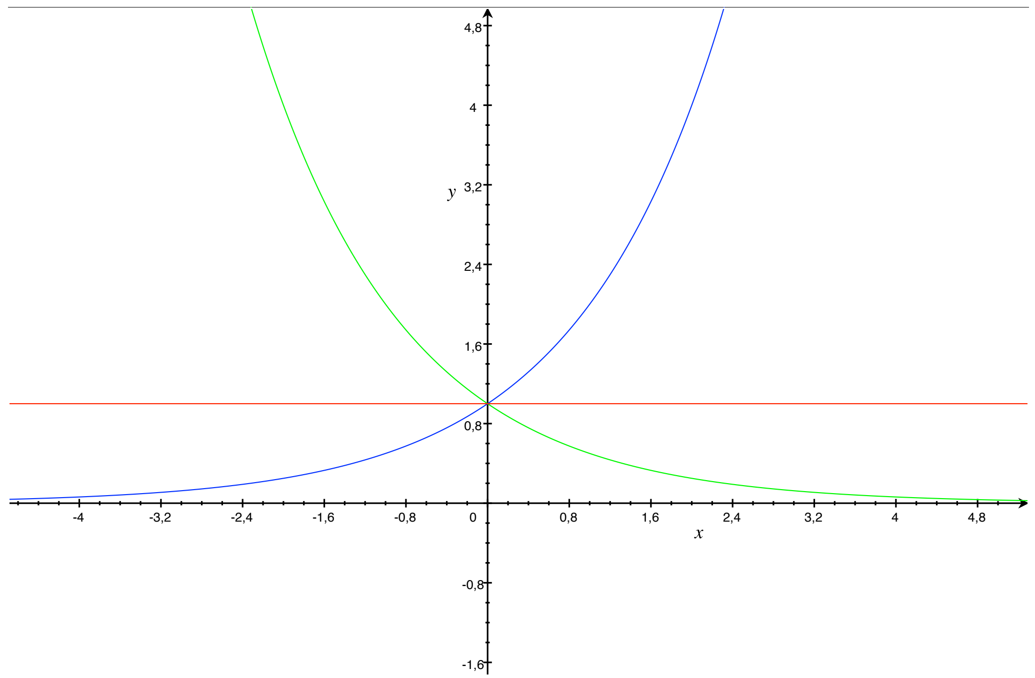
Per ogni $a > 0$ la funzione esponenziale a^x assume sempre valori strettamente positivi. Inoltre è strettamente crescente se $a > 1$, è costante se $a = 1$, è strettamente decrescente se $0 < a < 1$. Si osservi che $a^0 = 1$ per ogni $a > 0$.



L'insieme immagine dell'esponenziale è $Im(f) =]0, +\infty[$, per ogni $a > 0$, tranne nel caso banale in cui $a = 1$ (in questo caso $Im(f) = \{1\}$).

◁ ▷

Si osservi che $\left(a^{-1}\right)^x = a^{-x}$. Quindi, il grafico della funzione esponenziale a^x è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate y del grafico della funzione esponenziale $\left(a^{-1}\right)^x$.

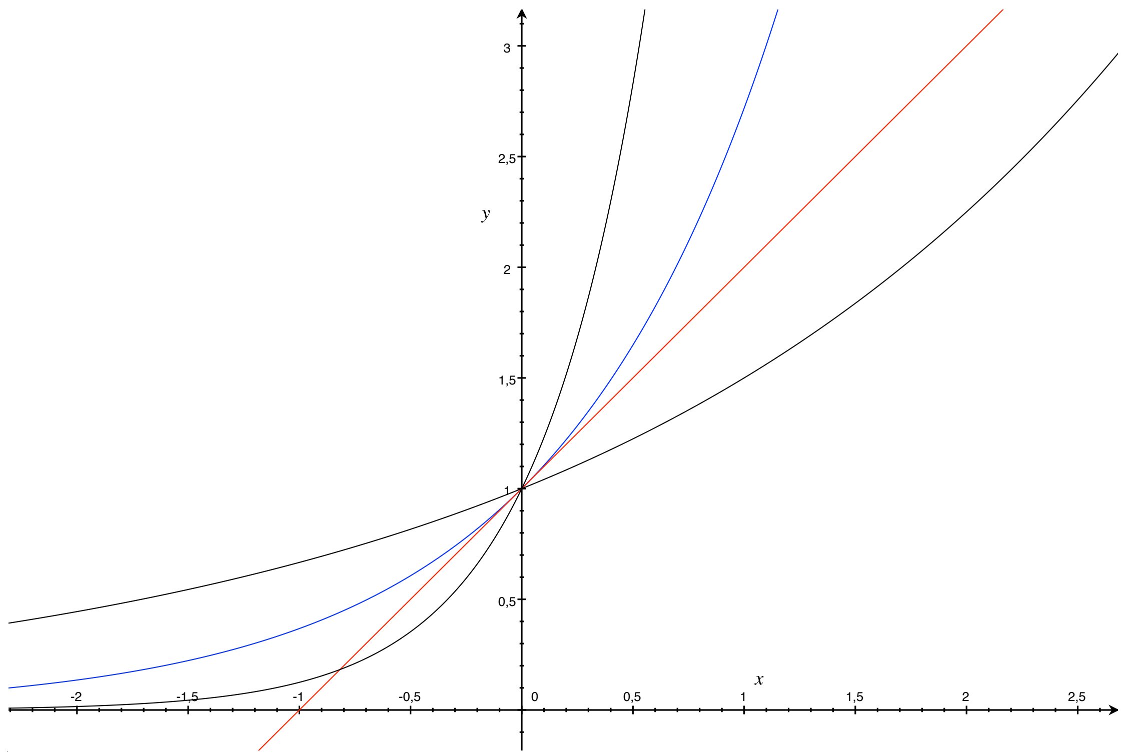


Esiste un numero irrazionale, detto numero di Nepero e indicato con la lettera e ($2 < e < 3$) particolarmente importante per le funzioni esponenziali.

◁ ▷

Esiste un numero irrazionale, detto numero di Nepero e indicato con la lettera e $(2 < e < 3)$ particolarmente importante per le funzioni esponenziali.

Nel caso $a = e$ la retta tangente il grafico della funzione esponenziale $f(x) = e^x$ nel punto $(0, 1)$ ha coefficiente angolare $m = 1$ (la sua equazione è $y = 1 + x$).



• Confronti asintotici.

Supponiamo $a > 0$. Interpretiamo l'asse x come asse del tempo. Osserviamo che il valore della funzione $f(x) = a^x$ nel "tempo" $x + 1$, è proporzionale al valore della funzione al tempo x:

$$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x).$$

Questa proprietà è caratteristica dell'esponenziale. Si parla di crescita esponenziale se la crescita è proporzionale al valore della funzione stessa.

◁ ▷

• **Confronti asintotici.**

Supponiamo $a > 0$. Interpretiamo l'asse x come asse del tempo. Osserviamo che il valore della funzione $f(x) = a^x$ nel "tempo" $x + 1$, è proporzionale al valore della funzione al tempo x:

$$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x).$$

Questa proprietà è caratteristica dell'esponenziale. Si parla di crescita esponenziale se la crescita è proporzionale al valore della funzione stessa.

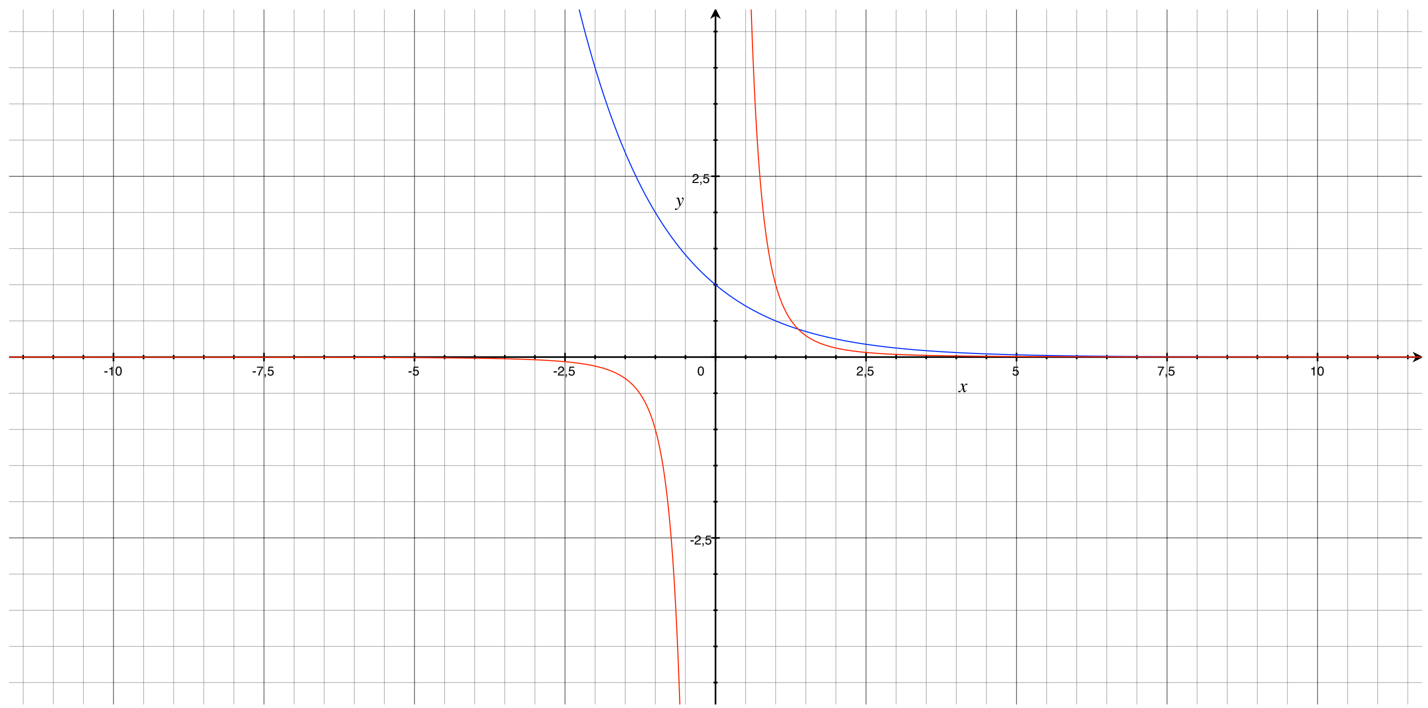
Una funzione potenza $g(x) = x^\alpha$ può crescere velocemente ma la crescita non è proporzionale al valore della funzione.

Se confrontiamo una funzione esponenziale a^x, $a > 1$, con una potenza qualsiasi x^α, per valori sufficientemente grandi di x la funzione esponenziale sarà sempre più grande della funzione potenza.
Si usa dire che per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale è un infinito di ordine soprareale, cioè superiore a α, per qualsiasi numero reale α.

◁ ▷

Supponiamo $0 < a < 1$. In modo simile il decadimento esponenziale è proporzionale al valore della funzione.

Se confrontiamo una funzione esponenziale a^x, $0 < a < 1$, con una potenza qualsiasi $\frac{1}{x^\alpha}$, per valori sufficientemente grandi di x la funzione esponenziale sarà sempre più vicina a zero della funzione potenza. Si usa dire che per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale è un infinitesimo di ordine soprareale, cioè più "forte" di α, per qualsiasi numero reale α.

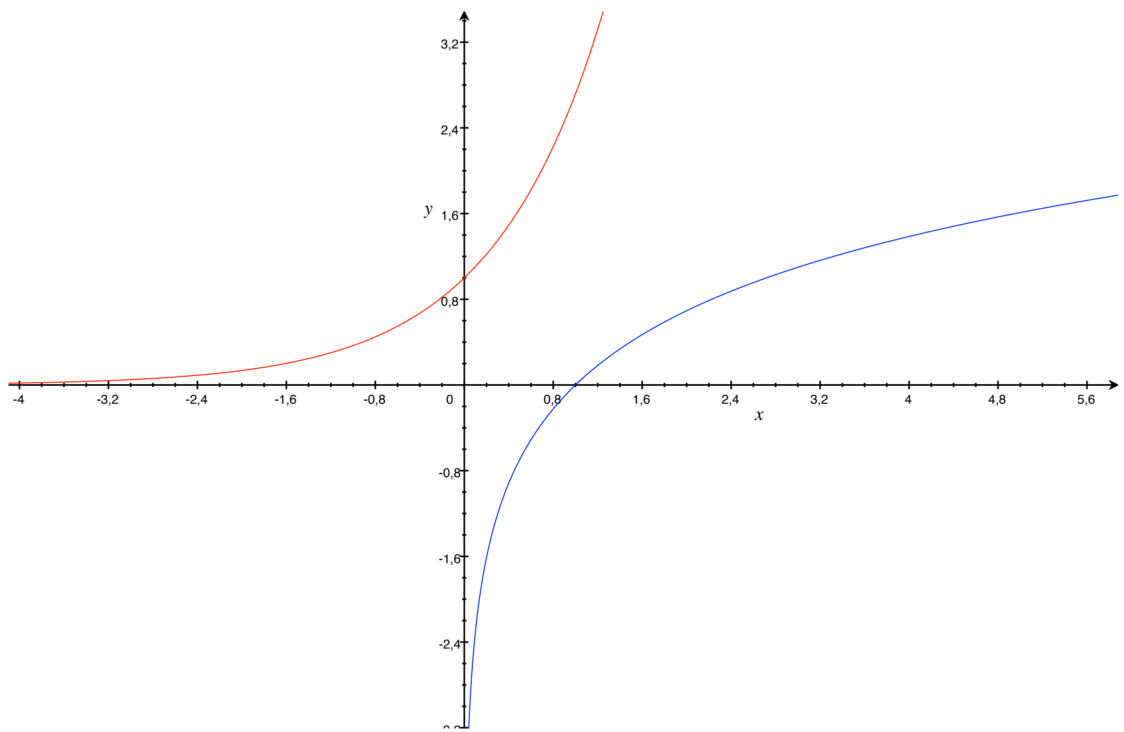


◁ ▷

- **Funzioni logaritmiche.**

Sia $a > 0$, $a \neq 1$. **La funzione** $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ **definita da** $f(x) = a^x$ **è biiettiva e quindi invertibile. La funzione inversa** $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ **si dice logaritmo in base** a**. Si avrà dunque, per ogni** $y \in \mathbb{R}, y > 0$,

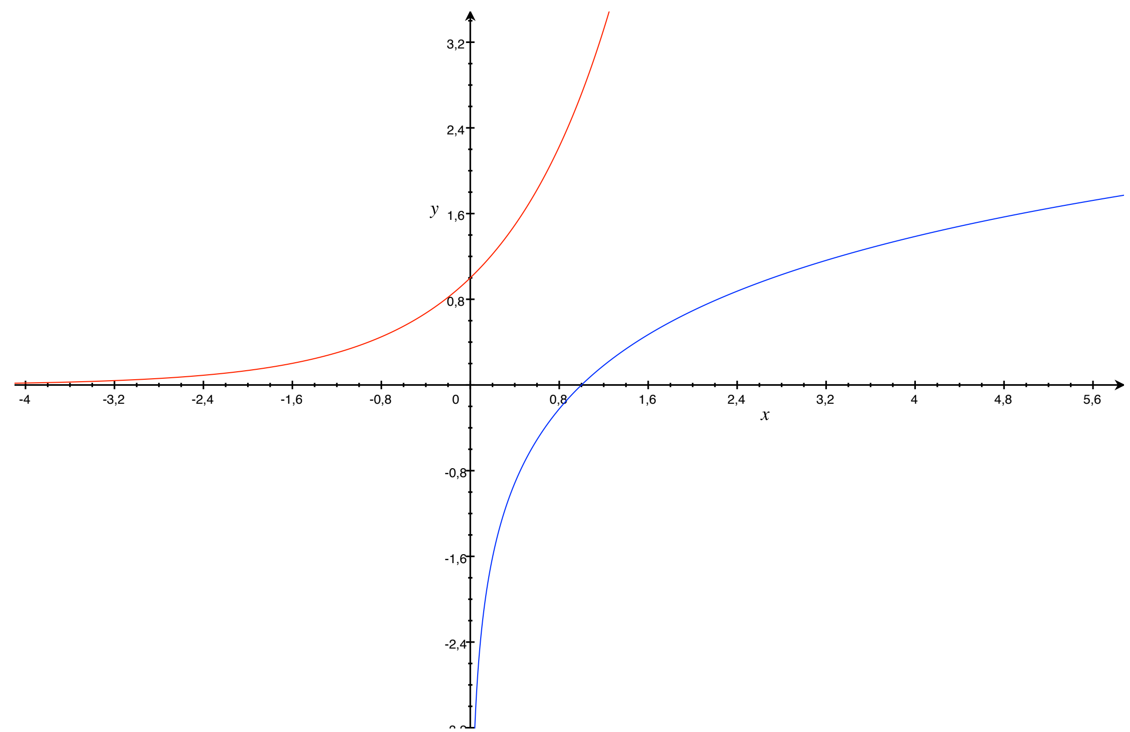
$$\log_a y = x \text{ se e solo se } a^x = y$$



- **Funzioni logaritmiche.**

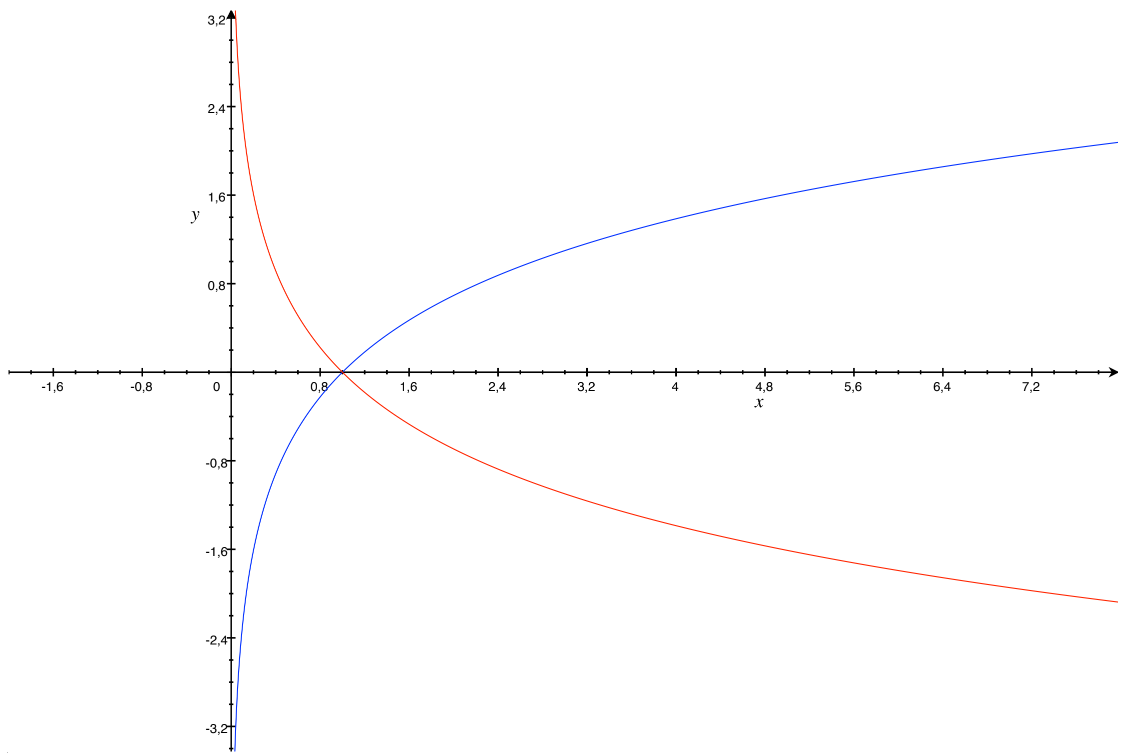
Sia $a > 0$, $a \neq 1$. **La funzione** $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ **definita da** $f(x) = a^x$ **è biiettiva e quindi invertibile. La funzione inversa** $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ **si dice logaritmo in base** a. **Si avrà dunque, per ogni** $y \in \mathbb{R}, y > 0$,

$$\log_a y = x \textbf{ se e solo se } a^x = y$$



Attenzione! La funzione logaritmo è definita solo per numeri positivi ma ha valori che possono essere negativi, nulli o positivi. Si osservi che $\log_a 1 = 0$ **per qualsiasi** $a > 0, a \neq 1$.

Se $a > 1$ la funzione logaritmo è strettamente crescente, se $0 < a < 1$ la funzione logaritmo è strettamente decrescente.



Esempi:

$\log_3(81) = ?$

Esempi:

$\log_3(81) = ?$

$\log_3(81) = 4$

Infatti $3^4 = 81$

◁ ▷

Esempi:

$\log_3(81) = ?$

$\log_3(81) = 4$

Infatti $3^4 = 81$

$\log_{1/2}(128) = ?$

Esempi:

$\log_3(81) = ?$

$\log_3(81) = 4$

Infatti $3^4 = 81$

$\log_{1/2}(128) = ?$

$\log_{1/2}(128) = -7$

Infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 2^7 = 128$

◁ ▷

Esempi:

$\log_3(81) =?$

$\log_3(81) = 4$

Infatti $3^4 = 81$

$\log_{1/2}(128) =?$

$\log_{1/2}(128) = -7$

Infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 2^7 = 128$

Dei numeri $\log_3(73)$ **e** $\log_2(18)$ **qual è il più grande?**

◁ ▷

Esempi:

$\log_3(81) =?$

$\log_3(81) = 4$

Infatti $3^4 = 81$

$\log_{1/2}(128) =?$

$\log_{1/2}(128) = -7$

Infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 2^7 = 128$

Dei numeri $\log_3(73)$ **e** $\log_2(18)$ **qual è il più grande?**

$\log_2(18) > \log_3(37)$

Infatti $4 = \log_2(16) < \log_2(18)$ **mentre** $4 = \log_3(81) > \log_3(73)$

◁ ▷

- **Proprietà algebriche dei logaritmi: per ogni** $a, b > 0$**,** $a, b \neq 1$**,** $x, y > 0$**,** $\alpha \in \mathbb{R}$**,**

$\log_a(x \cdot y) =$

◁ ▷

- **Proprietà algebriche dei logaritmi: per ogni** $a, b > 0$**,** $a, b \neq 1$**,** $x, y > 0$**,** $\alpha \in \mathbb{R}$**,**

$\log_a(x \cdot y) =$
$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x^\alpha) =$

◁ ▷

- **Proprietà algebriche dei logaritmi: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,**

$\log_a(x \cdot y) =$
$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x^\alpha) =$
$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$

Come esprimo $\log_b(x)$ usando i logaritmi in base a?

◁ ▷

- **Proprietà algebriche dei logaritmi: per ogni** $a, b > 0$**,** $a, b \neq 1$**,** $x, y > 0$**,** $\alpha \in \mathbb{R}$**,**

$\log_a(x \cdot y) =$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x^\alpha) =$

$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$

Come esprimo $\log_b(x)$ **usando i logaritmi in base** a**?**

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

◁ ▷

Dimostrazione: si sfruttano le proprietà delle potenze e l'iniettività della funzione esponenziale:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$$

$$\Longrightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

◁ ▷

Dimostrazione: si sfruttano le proprietà delle potenze e l'iniettività della funzione esponenziale:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$
$$\Longrightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$

$$a^{\log_a(x^\alpha)} = x^\alpha = \left(a^{\log_a(x)}\right)^\alpha = a^{\alpha \cdot \log_a(x)} \Longrightarrow \log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a(x)$$

◁ ▷

Dimostrazione: si sfruttano le proprietà delle potenze e l'iniettività della funzione esponenziale:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$
$$\Longrightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$

$$a^{\log_a(x^\alpha)} = x^\alpha = \left(a^{\log_a(x)}\right)^\alpha = a^{\alpha \cdot \log_a(x)} \Longrightarrow \log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a(x)$$

$\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

$$a^{\log_a(b) \cdot \log_b(x)} = \left(a^{\log_a(b)}\right)^{\log_b(x)} = b^{\log_b(x)} = x = a^{\log_a(x)}$$
$$\Longrightarrow \log_a(b) \cdot \log_b(x) = \log_a(x) \Longrightarrow \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Le proprietà algebriche dei logaritmi sono quelle che hanno motivato la loro invenzione. Tra la fine del 1500 e l'inizio del 1600 John Napier inventa un sistema per effettuare moltiplicazioni usando le addizioni: i logaritmi. Poco dopo John Briggs costruisce le prime tavole dei logaritmi decimali.

Tavola logaritmica (mantisse con 4 cifre)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

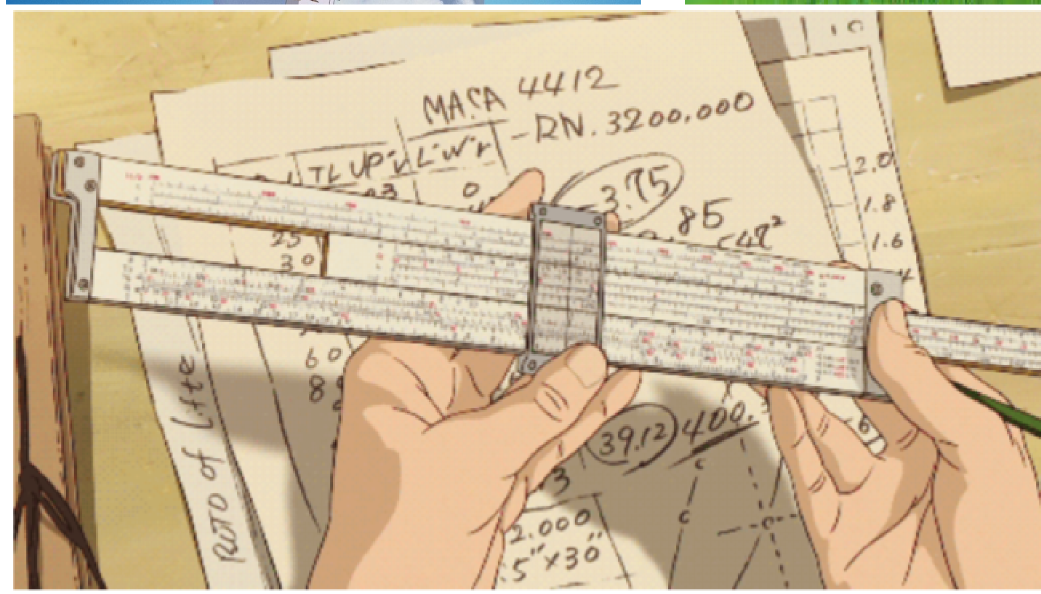
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

◁ ▷

Qualche anno più tardi Edmund Gunter e William Oughtred realizzano la scala logaritmica e costruiscono il primo regolo calcolatore.

Qualche anno più tardi Edmund Gunter e William Oughtred realizzano la scala logaritmica e costruiscono il primo regolo calcolatore.

Qualche anno più tardi Edmund Gunter e William Oughtred realizzano la scala logaritmica e costruiscono il primo regolo calcolatore.



Un regolo calcolatore con un funzionamento simile verrà portato sulla luna tre secoli dopo.

◁ ▷

- **Logaritmo naturale e logaritmo decimale.**

◁ ▷

- **Logaritmo naturale e logaritmo decimale.**

Si dice logaritmo naturale il logaritmo in base e: $\ln x = \log_e x$, logaritmo decimale il logaritmo in base 10: $\operatorname{Log} x = \log_{10} x$.

◁ ▷

- **Logaritmo naturale e logaritmo decimale.**

Si dice logaritmo naturale il logaritmo in base e: $\ln x = \log_e x$**, logaritmo decimale il logaritmo in base 10:** $\operatorname{Log} x = \log_{10} x$**.**

Attenzione! Il simbolo $\log x$ (senza indicazione della base) viene utilizzato da alcuni autori per il logaritmo naturale, da altri autori per il logaritmo decimale; altre volte è utilizzato per considerazioni in cui la base non è rilevante. Quando incontrate tale simbolo è importante capire qual è la base considerata in quel contesto.

◁ ▷

• **Logaritmo naturale e logaritmo decimale.**

Si dice logaritmo naturale il logaritmo in base e**:** $\ln x = \log_e x$**, logaritmo decimale il logaritmo in base** 10**:** $\operatorname{Log} x = \log_{10} x$**.**

Attenzione! Il simbolo $\log x$ **(senza indicazione della base) viene utilizzato da alcuni autori per il logaritmo naturale, da altri autori per il logaritmo decimale; altre volte è utilizzato per considerazioni in cui la base non è rilevante. Quando incontrate tale simbolo è importante capire qual è la base considerata in quel contesto.**

Il logaritmo naturale è particolarmente importante in analisi matematica. Si osservi che la tangente al grafico della funzione logaritmo nel punto $(1, 0)$ **è la retta**

◁ ▷

• **Logaritmo naturale e logaritmo decimale.**

Si dice logaritmo naturale il logaritmo in base e**:** $\ln x = \log_e x$**, logaritmo decimale il logaritmo in base** 10**:** $\operatorname{Log} x = \log_{10} x$**.**

Attenzione! Il simbolo $\log x$ **(senza indicazione della base) viene utilizzato da alcuni autori per il logaritmo naturale, da altri autori per il logaritmo decimale; altre volte è utilizzato per considerazioni in cui la base non è rilevante. Quando incontrate tale simbolo è importante capire qual è la base considerata in quel contesto.**

Il logaritmo naturale è particolarmente importante in analisi matematica. Si osservi che la tangente al grafico della funzione logaritmo nel punto $(1, 0)$ **è la retta**
$y = x - 1$**.**

Il logaritmo decimale fornisce l'ordine di grandezza di una quantità:

$$\mathrm{Log}\left(10^n\right) = n.$$

Supponiamo di conoscere il logaritmo decimale di un numero x: $\mathrm{Log}\,(x) \simeq 3,123456$**. Sappiamo allora che**

$$3 < \mathrm{Log}\,(x) < 4 \Longrightarrow 10^3 < x < 10^4$$

Questo significa che il numero x ha 4 cifre poiché $1000 < x < 10000$**.**

Il logaritmo decimale fornisce l'ordine di grandezza di una quantità:

$$\mathrm{Log}\,(10^n) = n.$$

Supponiamo di conoscere il logaritmo decimale di un numero x**:** $\mathrm{Log}\,(x) \simeq 3,123456$**. Sappiamo allora che**

$$3 < \mathrm{Log}\,(x) < 4 \Longrightarrow 10^3 < x < 10^4$$

Questo significa che il numero x **ha 4 cifre poiché** $1000 < x < 10000$**.**

Quante cifre decimali ha un numero x **tale che** $\mathrm{Log}\,(x) \simeq 19,2569$**?**

◁ ▷

Il logaritmo decimale fornisce l'ordine di grandezza di una quantità:

$$\operatorname{Log}(10^n) = n.$$

Supponiamo di conoscere il logaritmo decimale di un numero x: $\operatorname{Log}(x) \simeq 3,123456$. Sappiamo allora che

$$3 < \operatorname{Log}(x) < 4 \Longrightarrow 10^3 < x < 10^4$$

Questo significa che il numero x ha 4 cifre poiché $1000 < x < 10000$.

Quante cifre decimali ha un numero x tale che $\operatorname{Log}(x) \simeq 19,2569$?
20

◁ ▷

Il logaritmo decimale fornisce l'ordine di grandezza di una quantità:

$$\mathrm{Log}\,(10^n) = n.$$

Supponiamo di conoscere il logaritmo decimale di un numero x: $\mathrm{Log}\,(x) \simeq 3,123456$**. Sappiamo allora che**

$$3 < \mathrm{Log}\,(x) < 4 \Longrightarrow 10^3 < x < 10^4$$

Questo significa che il numero x ha 4 cifre poiché $1000 < x < 10000$**.**

Quante cifre decimali ha un numero x tale che $\mathrm{Log}\,(x) \simeq 19,2569$**?**
20

Il logaritmo in base 10 **si utilizza quindi spesso per quantità che hanno un range di variazione molto grande e per le quali non interessa il valore preciso ma è sufficiente una stima dell'ordine di grandezza.**

Alcune applicazioni importanti dei logaritmi.

Alcune applicazioni importanti dei logaritmi.

- **Il pH:**

$$pH = -\mathrm{Log}\left(\gamma \frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}}\right)$$

La concentrazione è neutra se $pH = 7$; è il caso dell'acqua pura a 25 gradi; in questo caso si ha

$$7 = -\mathrm{Log}\left(\gamma \frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}}\right) \Longrightarrow 10^{-7} = \left(\gamma \frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}}\right)$$

La concentrazione si dice acida se $pH < 7$, cioè se la quantità nell'argomento è maggiore di $10^{-7} = 0,0000001$, una concentrazione molto acida con $\gamma [H_3O^+] = C^0_{H^+}$ ha $pH = 0$.

◁ ▷

Alcune applicazioni importanti dei logaritmi.

- **Il pH:**

$$pH = -\mathrm{Log}\,\Big(\gamma\frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}}\Big)$$

La concentrazione è neutra se $pH = 7$; è il caso dell'acqua pura a 25 gradi; in questo caso si ha

$$7 = -\mathrm{Log}\,\Big(\gamma\frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}}\Big) \Longrightarrow 10^{-7} = \Big(\gamma\frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}}\Big)$$

La concentrazione si dice acida se $pH < 7$, cioè se la quantità nell'argomento è maggiore di $10^{-7} = 0,0000001$, una concentrazione molto acida con $\gamma[H_3O^+] = C^0_{H^+}$ ha $pH = 0$.

La concentrazione si dice basica se $pH > 7$, cioè se la quantità nell'argomento è minore di $10^{-7} = 0,0000001$.

Concentration of Hydrogen ions compared to distilled water	pH	Examples of solutions and their respective pH
1/10,000,000	14	Liquid drain cleaner, Caustic soda
1/1,000,000	13	bleaches, oven cleaner
1/100,000	12	Soapy water
1/10,000	11	Household Ammonia (11.9)
1/1,000	10	Milk of magnesium (10.5)
1/100	9	Toothpaste (9.9)
1/10	8	Baking soda (8.4), Seawater, Eggs
0	7	"Pure" water (7)
10	6	Urine (6) Milk (6.6)
100	5	Acid rain (5.6) Black coffee (5)
1,000	4	Tomato juice (4.1)
10,000	3	Grapefruit & Orange juice, Soft drink
100,000	2	Lemon juice (2.3) Vinegar (2.9)
1,000,000	1	Hydrochloric acid secreted from the stomach lining (1)
10,000,000	0	Battery Acid

◁ ▷

- **La sensazione sonora:**

$$S = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{p^2}{p_0^2}\right) = 20\,\mathrm{Log}\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

I **è l'intensità di energia sonora,** I_0 **la soglia di udibilità,** p, p_0 **sono pressioni.**

◁ ▷

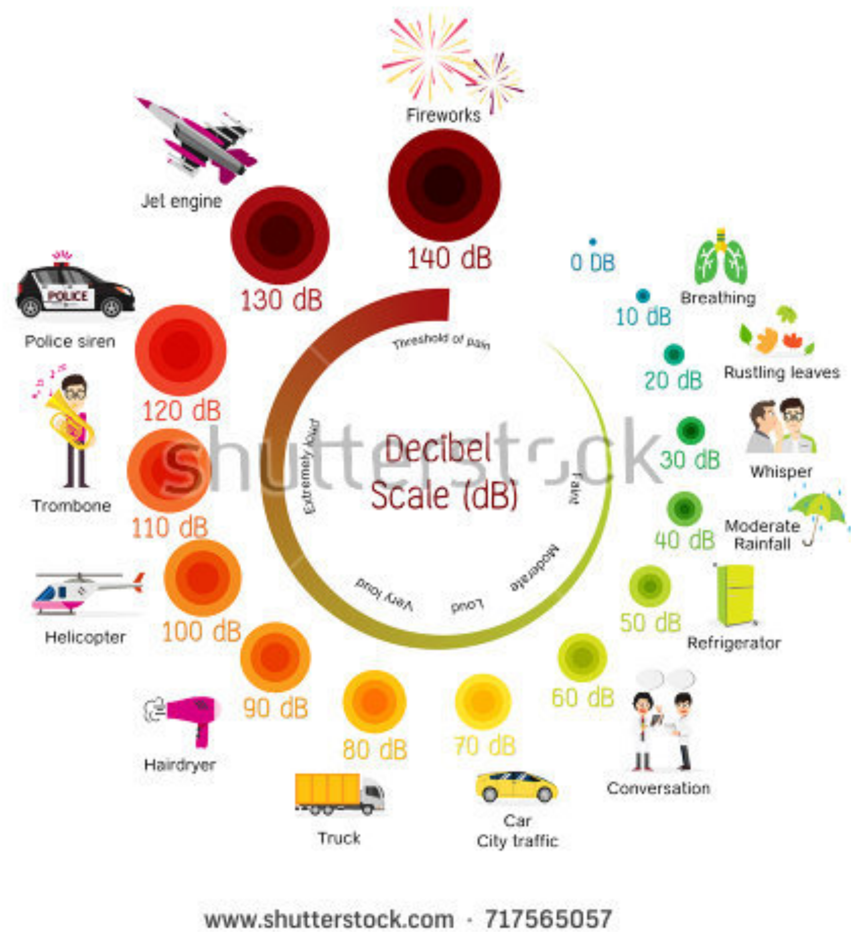
- **La sensazione sonora:**

$$S = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{p^2}{p_0^2}\right) = 20\,\mathrm{Log}\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

I **è l'intensità di energia sonora,** I_0 **la soglia di udibilità,** p, p_0 **sono pressioni.**

La sensazione sonora si misura in decibel (cioè 10 volte il logaritmo del rapporto della quantità misurata rispetto alla quantità di riferimento).

Si osservi che $S(I_0) = 0$**.**



Fireworks
Jet engine
140 dB
130 dB
0 DB
10 dB
Breathing
20 dB
Rustling leaves
Police siren
120 dB
Threshold of pain
Decibel
Scale (dB)
Extremely loud
Faint
Very loud
Loud
Moderate
30 dB
Whisper
Trombone
110 dB
40 dB
Moderate
Rainfall
Helicopter
100 dB
50 dB
Refrigerator
90 dB
80 dB
70 dB
60 dB
Hairdryer
Conversation
Truck
Car
City traffic
www.shutterstock.com · 717565057

◁ ▷

- **La magnitudo dei terremoti:**

Misura l'energia rilasciata, che è proporzionale all'oscillazione dell'ago del sismografo elevata alla $3/2$**.**

Magnitudo 1: $(10^1)^{\frac{3}{2}} \simeq 30$

Magnitudo 2: $(10^2)^{\frac{3}{2}} = 1000$

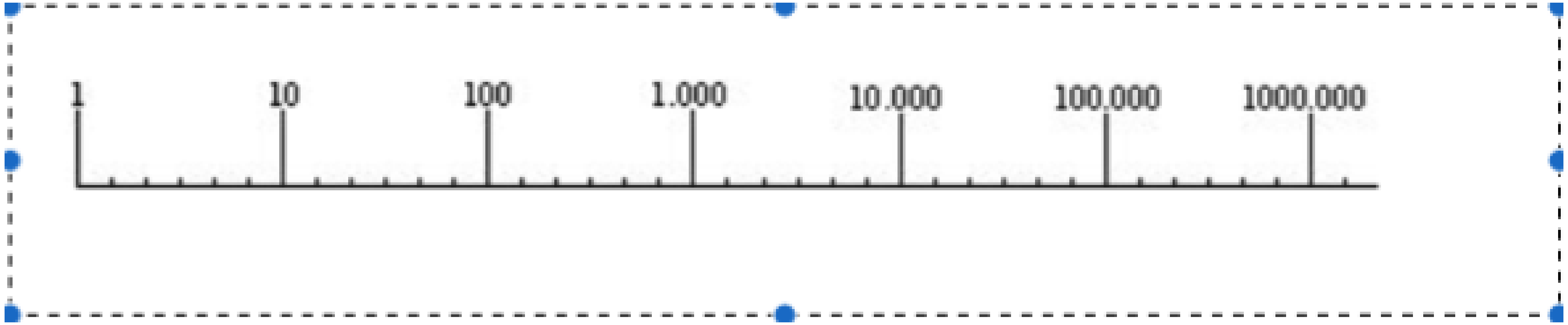
Magnitudo 3: $(10^3)^{\frac{3}{2}} \simeq 30000$

Magnitudo 4: $(10^4)^{\frac{3}{2}} \simeq 1000000$

SCALA RICHTER		
Magnitudo	TNT equivalente	Frequenza
0	1,0 chilogrammo	circa 8.000 al giorno
1	31,6 chilogrammi	
1,5	178,0 chilogrammi	
2	1,0 tonnellata	circa 1.000 al giorno
2,5	5,6 tonnellate	
3	31,6 tonnellate	circa 130 al giorno
3,5	178,0 tonnellate	
4	1.000,0 tonnellate	circa 15 al giorno
4,5	5.600,0 tonnellate	
5	31.600,0 tonnellate	2-3 al giorno
5,5	178.000,0 tonnellate	
6	1,0 milione di tonnellate	120 all'anno
6,5	5,6 milioni di tonnellate	
7	31,6 milioni di tonnellate	18 all'anno
7,5	178,0 milioni di tonnellate	
8	1,0 miliardo di tonnellate	1 all'anno
8,5	5,6 miliardi di tonnellate	
9	31,6 miliardi di tonnellate	1 ogni 20 anni
10	1.000,0 miliardi di tonnellate	Mai registrata

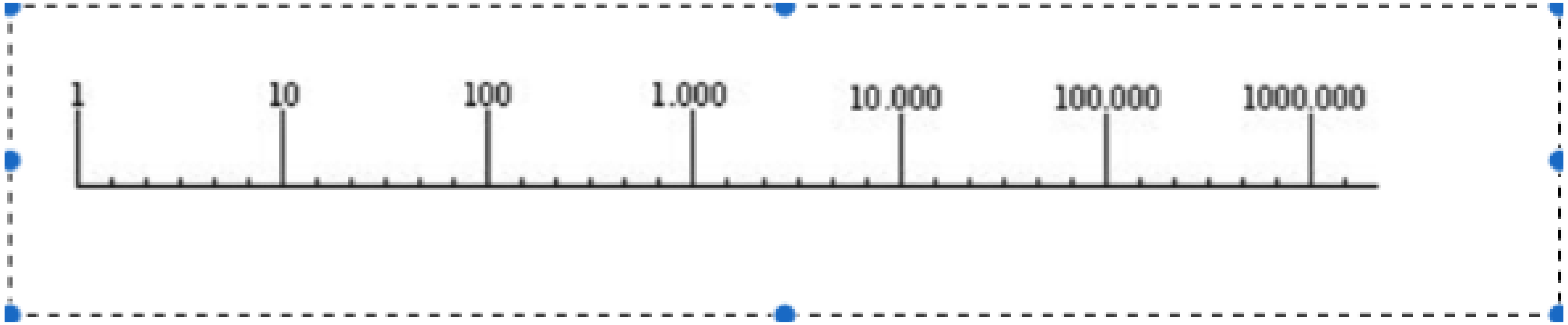
◁ ▷

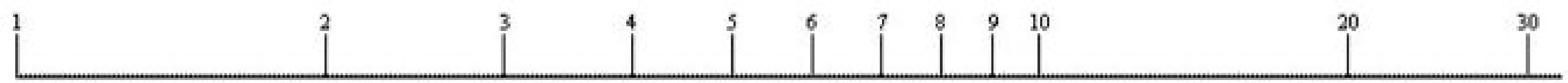
Scale logaritmiche e semilogaritmiche.



◁ ▷

Scale logaritmiche e semilogaritmiche.





Risultati votazioni:

Italia nel cuore: 574

Rinascimento MIR: 772

Partito comunista: 106182

PD: 6134727

Lega: 5691921

Movimento 5 stelle: 10727567

Risultati votazioni:

Italia nel cuore: 574

Rinascimento MIR: 772

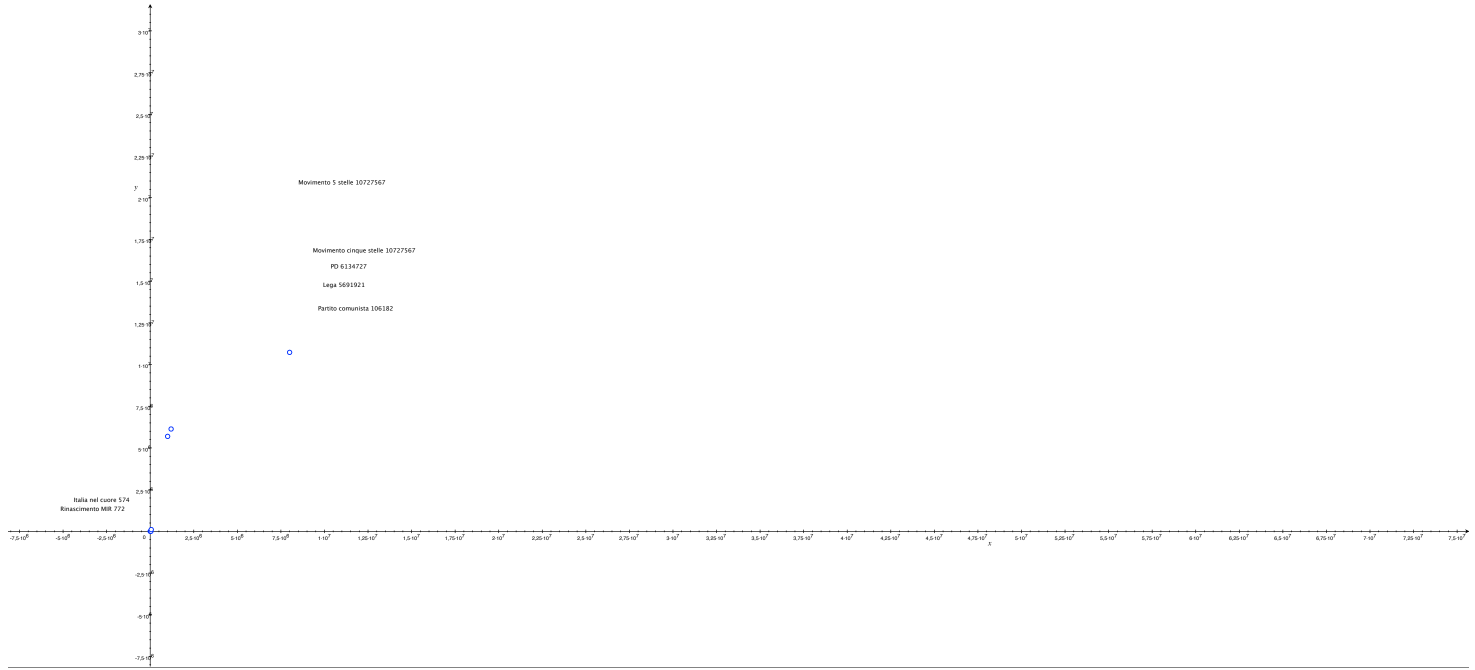
Partito comunista: 106182

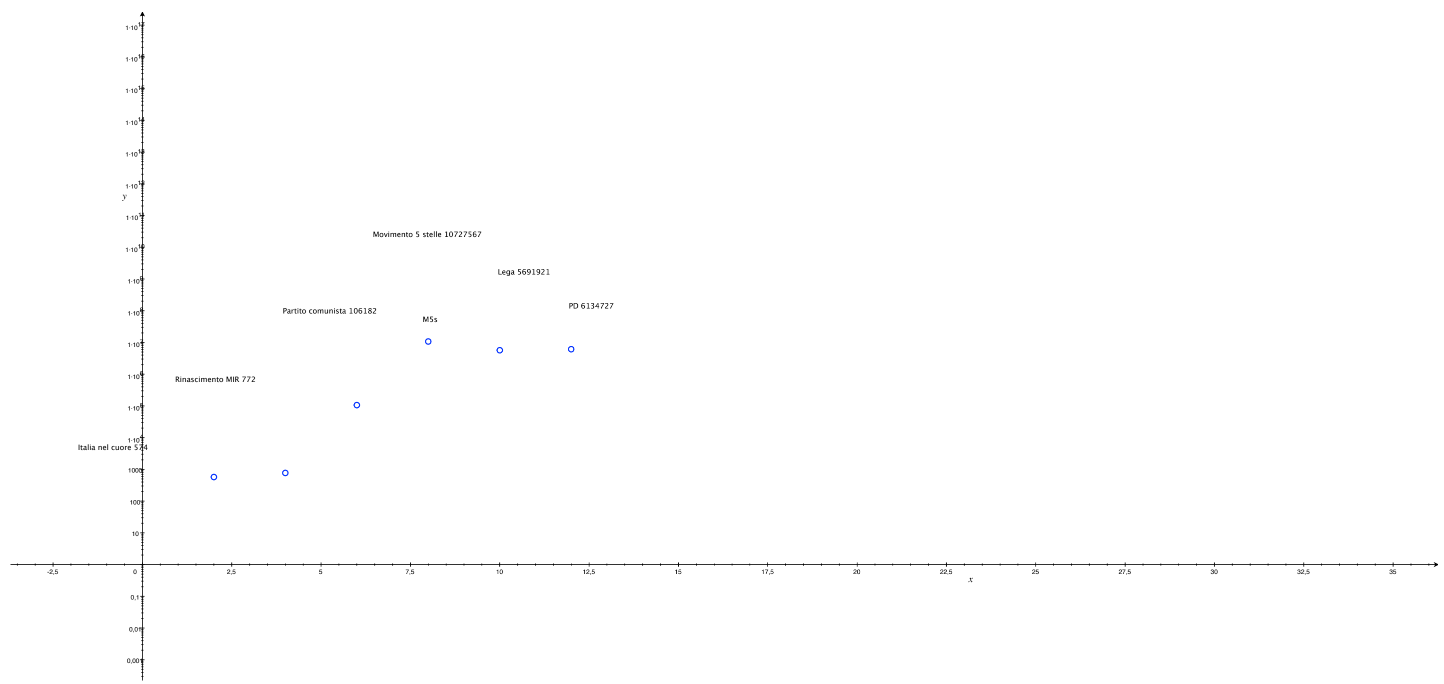
PD: 6134727

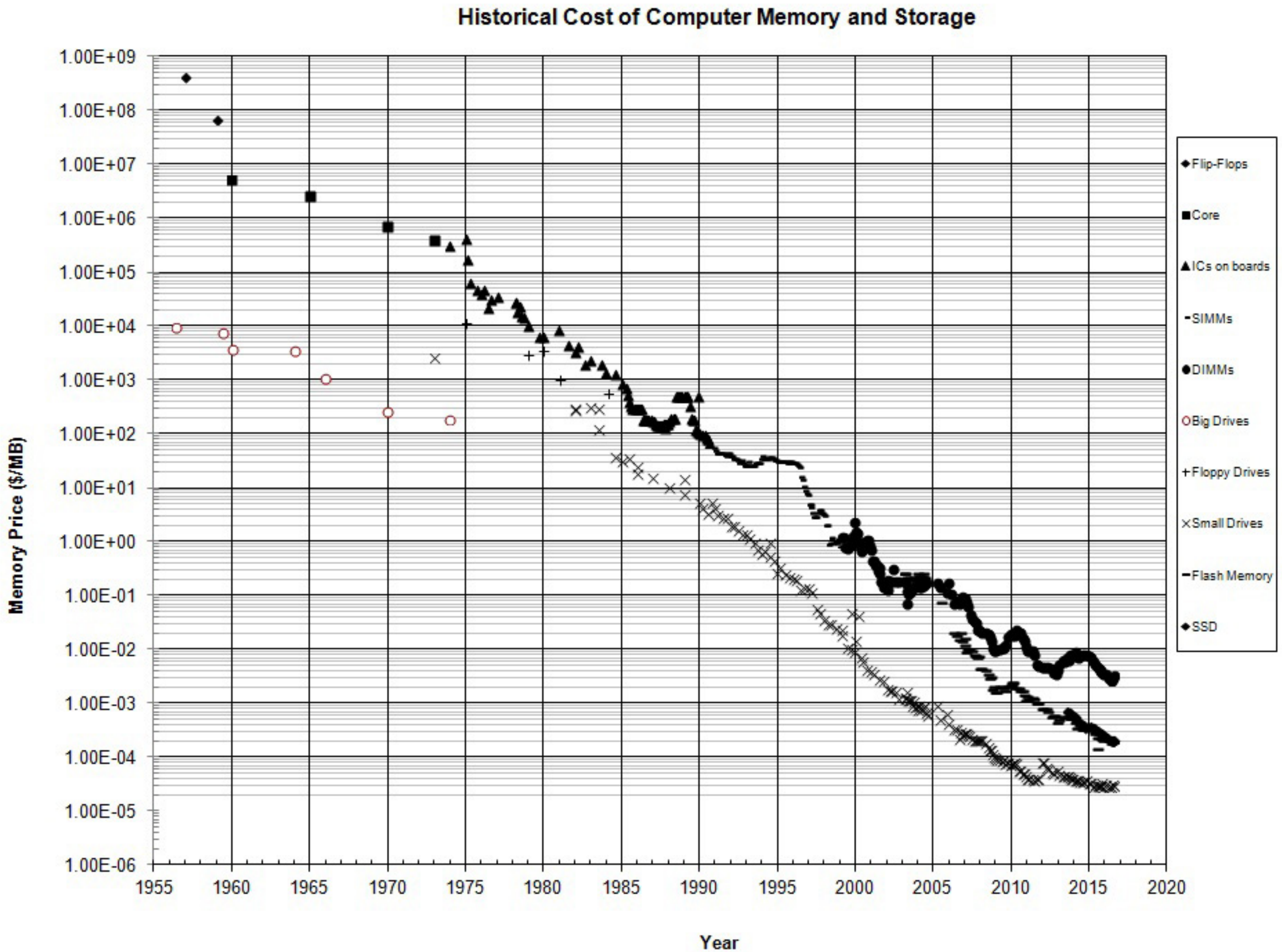
Lega: 5691921

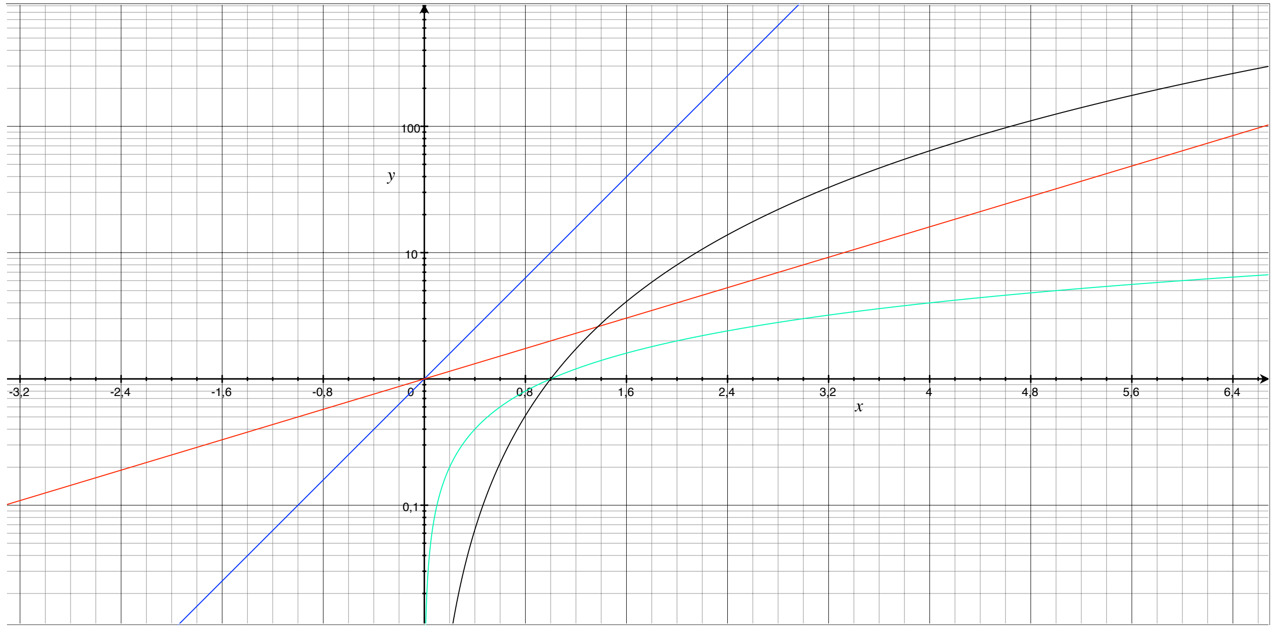
Movimento 5 stelle: 10727567

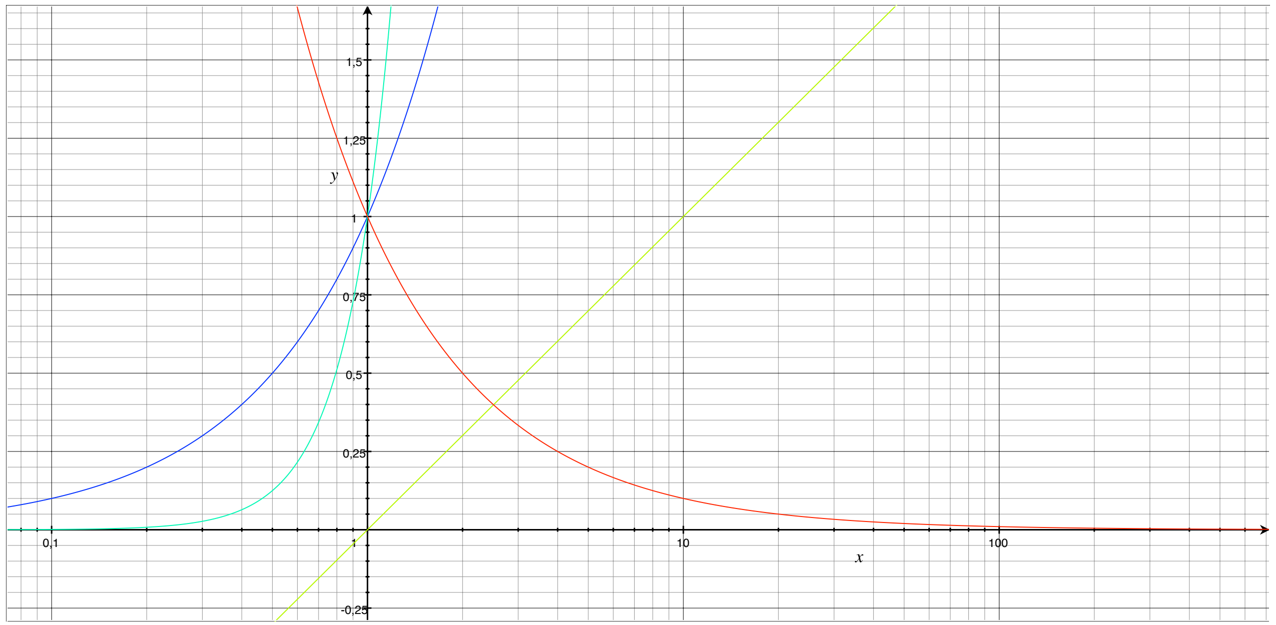
Come faccio a rappresentarli su un grafico?


Movimento 5 stelle 10727567
Movimento cinque stelle 10727567
PD 6134727
Lega 5691921
Partito comunista 106182
Italia nel cuore 574
Rinascimento MIR 772


Movimento 5 stelle 10727567
Lega 5691921
PD 6134727
Partito comunista 106182
M5s
Rinascimento MIR 772
Italia nel cuore 574

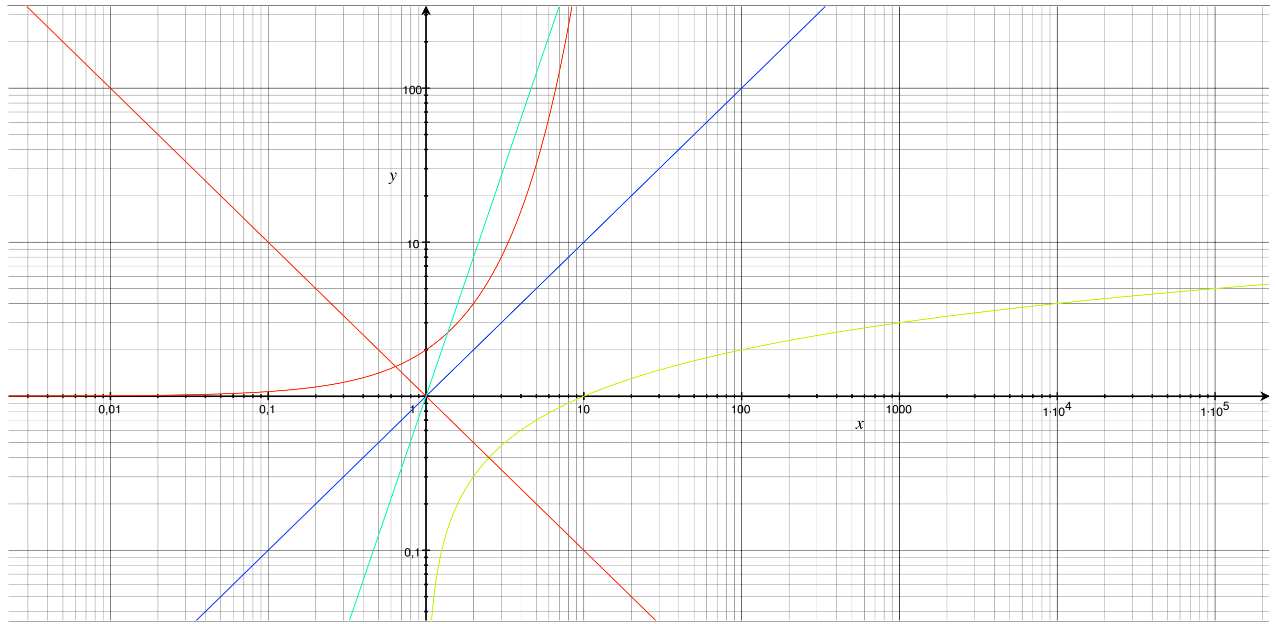

Historical Cost of Computer Memory and Storage
Memory Price ($/MB)
1.00E+09
1.00E+08
1.00E+07
1.00E+06
1.00E+05
1.00E+04
1.00E+03
1.00E+02
1.00E+01
1.00E+00
1.00E-01
1.00E-02
1.00E-03
1.00E-04
1.00E-05
1.00E-06
1955
1960
1965
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
2005
2010
2015
2020
Year
Flip-Flops
Core
ICs on boards
SIMMs
DIMMs
Big Drives
Floppy Drives
Small Drives
Flash Memory
SSD





In una scala lineare - logaritmica una retta rappresenta una funzione esponenziale. La funzione $f(x) = x$ sarà rappresentata come un logaritmo.

In una scala logaritmica - lineare una retta rappresenta una funzione logaritmica. La funzione $f(x) = x$ sarà rappresentata come un esponenziale.

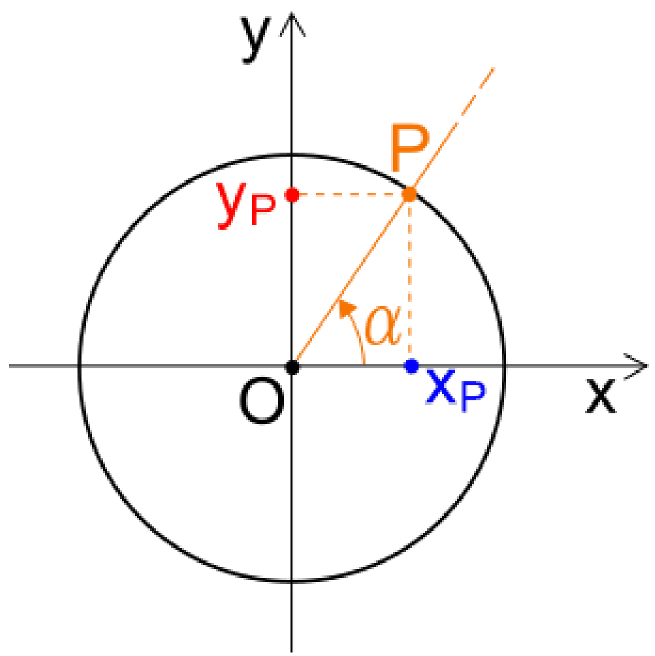


Se in un diagramma doppiamente logaritmico x, y è rappresentato un grafico del tipo $y = g(x)$, nel corrispondente diagramma cartesiano otteniamo la relazione $f(t) = 10^{g(\mathrm{Log}\,(t))}$. Se si vuole rappresentare su un diagramma logaritmico una funzione $f(t)$, si disegnerà il grafico corrispondente $y = \mathrm{Log}\,(f(10^x))$.

Fenomeni oscillatori. Le funzioni trigonometriche.

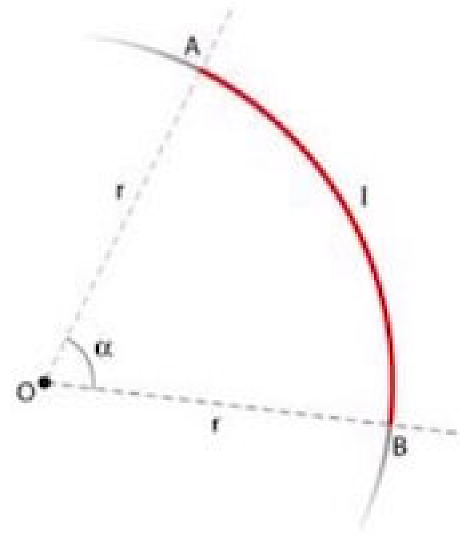
• **seno e coseno di un angolo:**

$x = \cos(\alpha)$ **e** $y = \mathrm{sen}\,(\alpha)$ **sono le coordinate (parametriche) del punto** (x, y) **appartenente al cerchio unitario di quazione** $x^2 + y^2 = 1$**, dove** α **è l'angolo compreso tra l'asse delle** x **e il segmento congiungente l'origine** $(0, 0)$ **con il punto** (x, y)**.**



• **misura in radianti**

la misura di un radiante è l'ampiezza di un angolo che sottende un arco di cerchio di lunghezza pari al raggio del cerchio; questo non dipende dal raggio del cerchio.



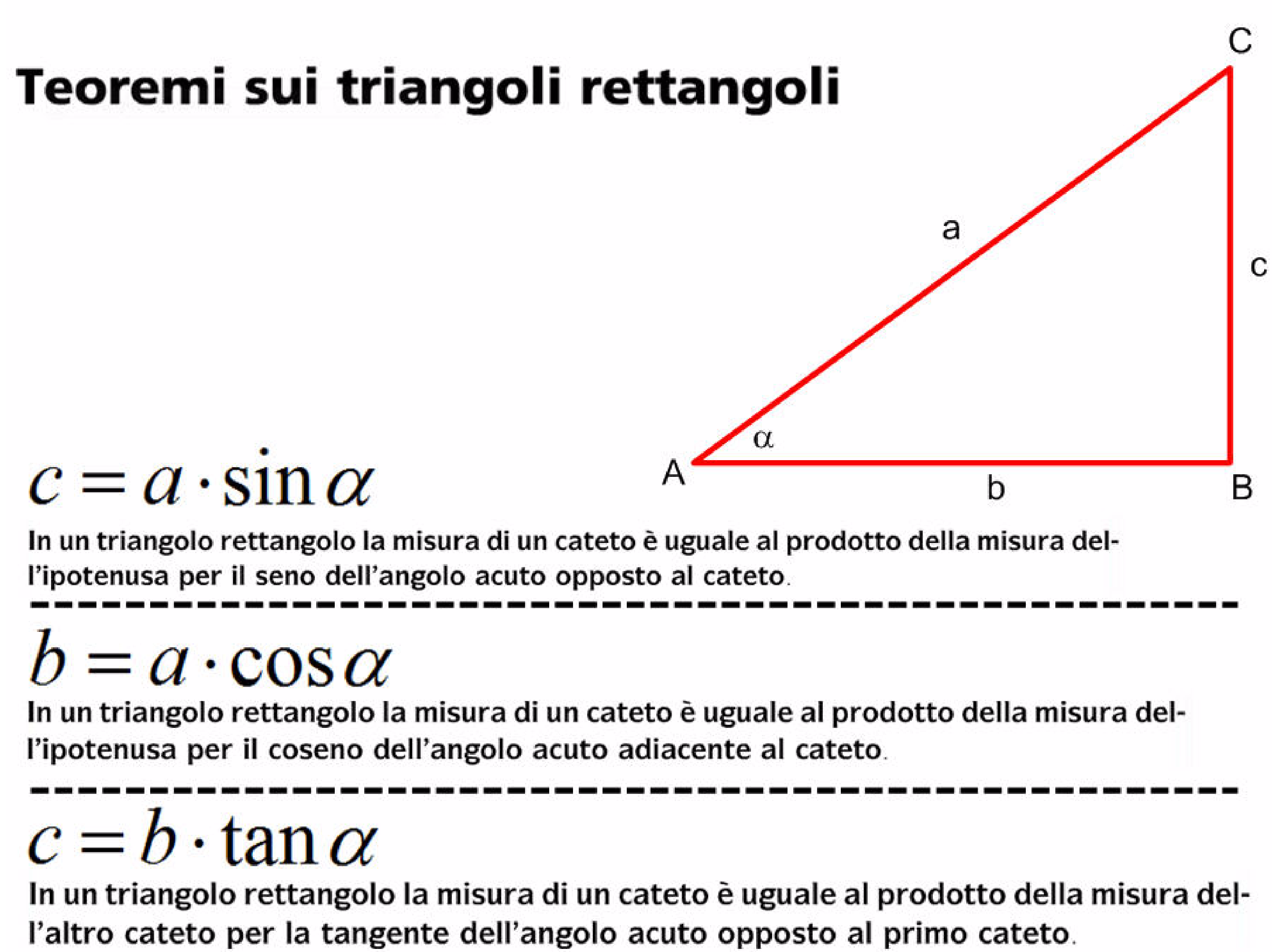
Pertanto la corrispondenza tra gradi sessagesimali e radianti è:

2π **radianti** $= 360°$**: la misura di un angolo in radianti è ottenuta moltiplicando la misura in gradi per** $\frac{\pi}{180}$**, mentre la misura di un angolo in gradi è ottenuta moltiplicando la misura in radianti per** $\frac{180}{\pi}$**.**

Esempio: Angolo di $45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ **rad**

Esempio: Angolo di $\frac{2\pi}{3}$ **rad** $= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 60°$

In un triangolo rettangolo di ipotenusa a e cateti b, c, si avrà $a \cdot \cos(\alpha) = b$ e $a \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = c$, se α è l'angolo opposto al cateto c.

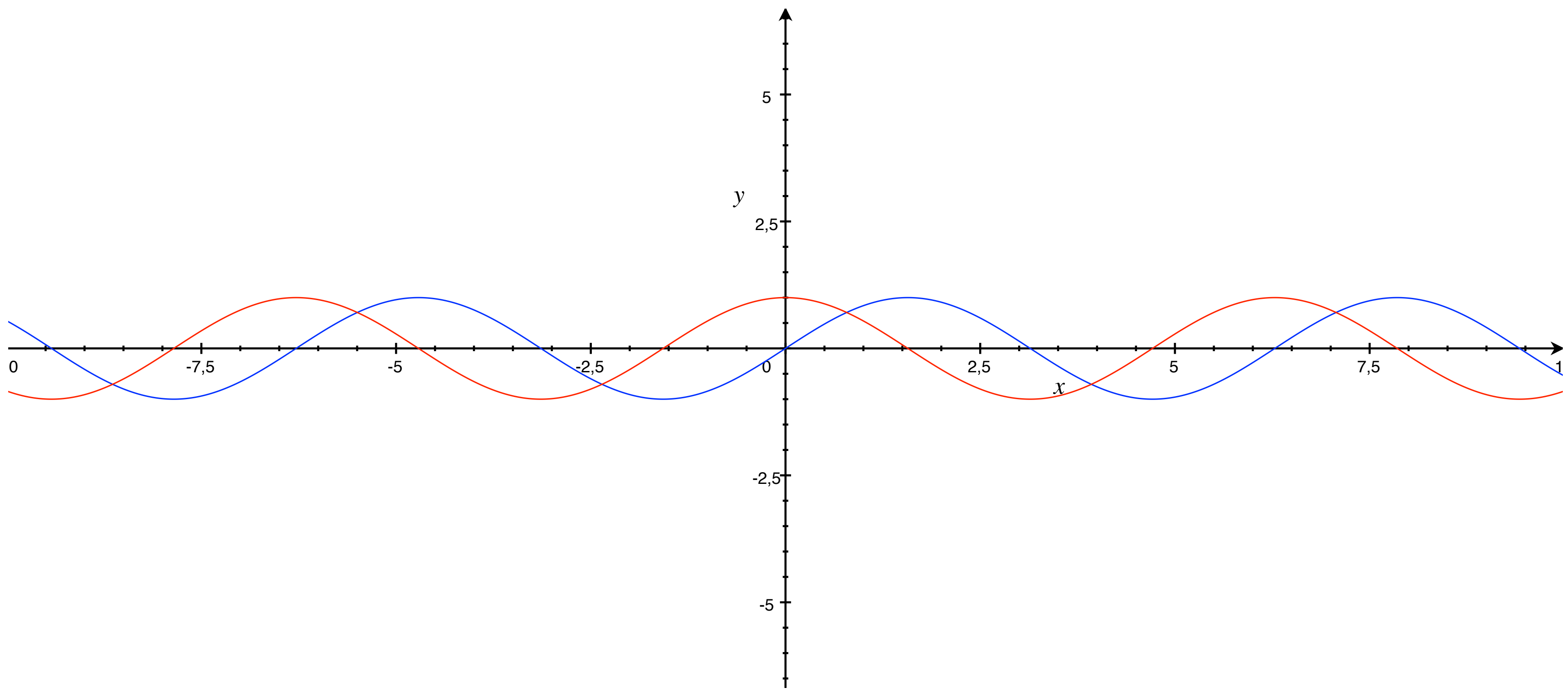


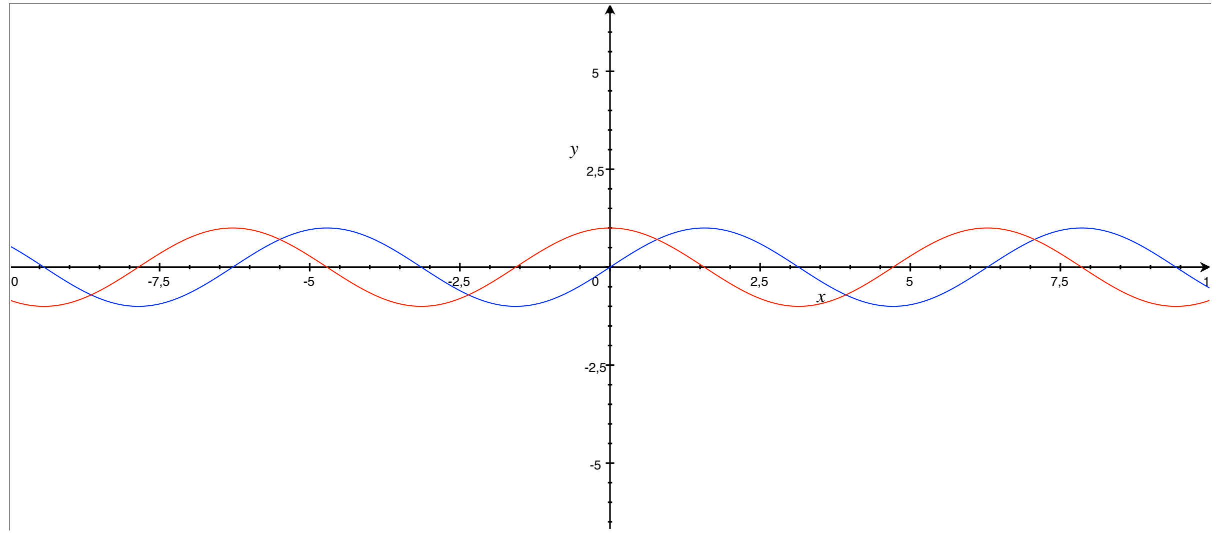
◁ ▷

- **le funzioni seno e coseno.**

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, è definita interpretando x come angolo di rotazione (e quindi ha significato anche se maggiore di 2π o minore di zero); pertanto x si può considerare appartenente a $\mathbb{R}$. Similmente per $f(x) = \cos(x)$.

Si osservi che per definizione stessa si ha $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ per ogni x. Quindi le funzioni sono periodiche di periodo minimo 2π.

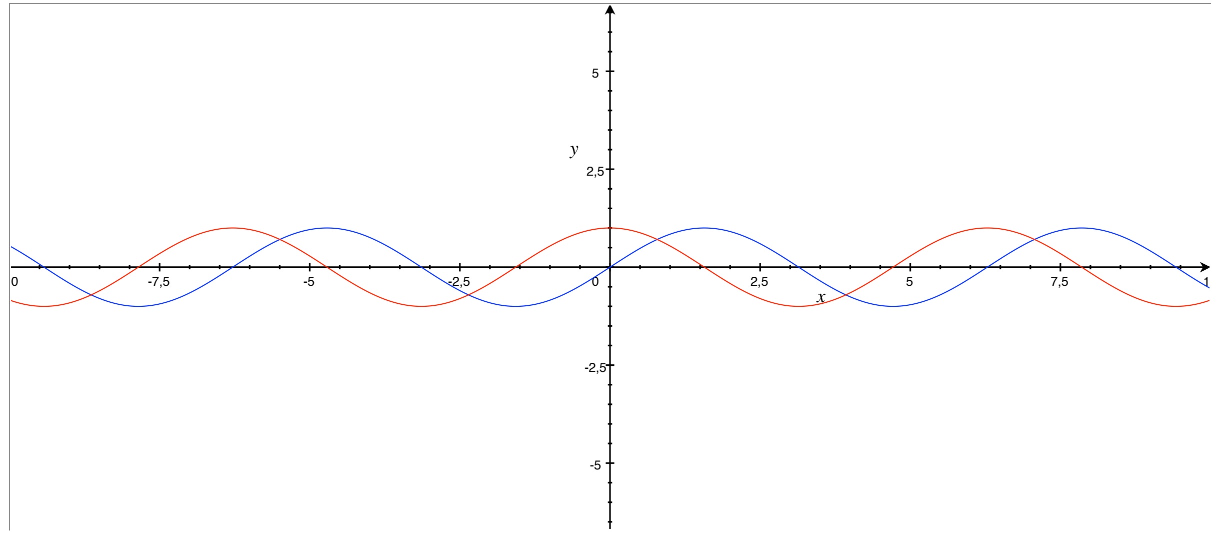




Poiché $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$ **sono le coordinate di un punto della circonferenza di raggio** 1 **si ha**

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \textbf{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

In particolare si ha $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ **e** $|\cos(x)| \leq 1$ **per ogni** $x \in \mathbb{R}$**. Quindi le funzioni** $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$ **sono limitate.**



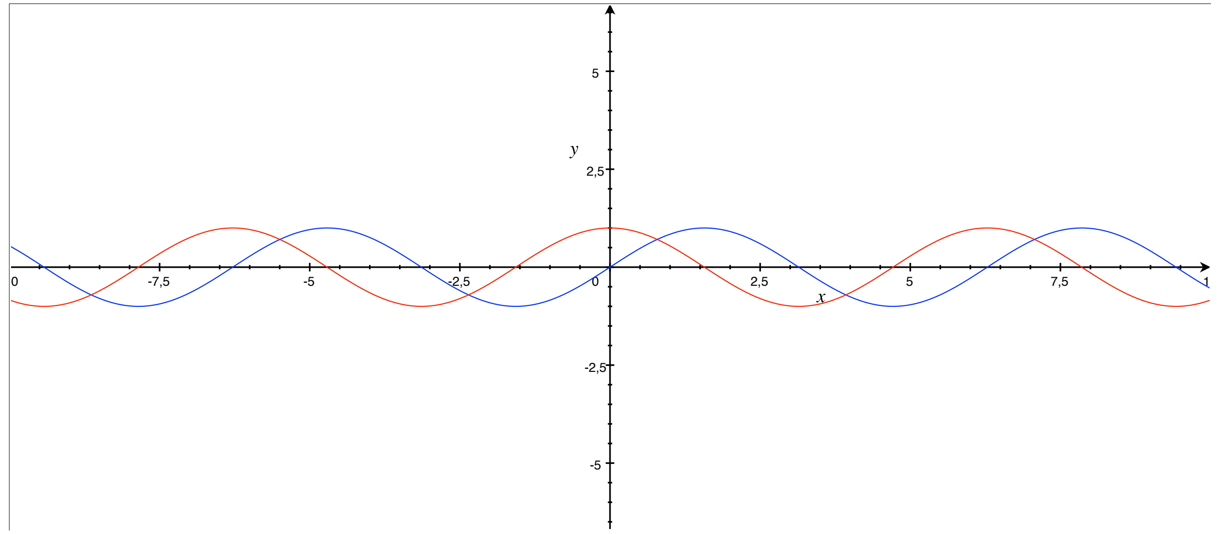
Poiché $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$ **sono le coordinate di un punto della circonferenza di raggio** 1 **si ha**

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \textbf{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

In particolare si ha $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ **e** $|\cos(x)| \leq 1$ **per ogni** $x \in \mathbb{R}$**. Quindi le funzioni** $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$ **sono limitate.**

La funzione $\operatorname{sen} x$ **è dispari. La funzione** $\cos x$ **è pari:**

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x); \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$



Poiché $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$ **sono le coordinate di un punto della circonferenza di raggio** 1 **si ha**

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \textbf{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

In particolare si ha $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ **e** $|\cos(x)| \leq 1$ **per ogni** $x \in \mathbb{R}$**. Quindi le funzioni** $\operatorname{sen} x$ **e** $\cos x$ **sono limitate.**

La funzione $\operatorname{sen} x$ **è dispari. La funzione** $\cos x$ **è pari:**

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x); \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

Infine si verifica che $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$**, per ogni** $x \in \mathbb{R}$**; quindi il grafico del coseno è uguale al grafico del seno traslato di** $\frac{\pi}{2}$ **verso sinistra.**

◁ ▷

- **Formule fondamentali.**

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\operatorname{sen}(y) \ \textbf{per ogni}\ x, y \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(y) \ \textbf{per ogni}\ x, y \in \mathbb{R}$$

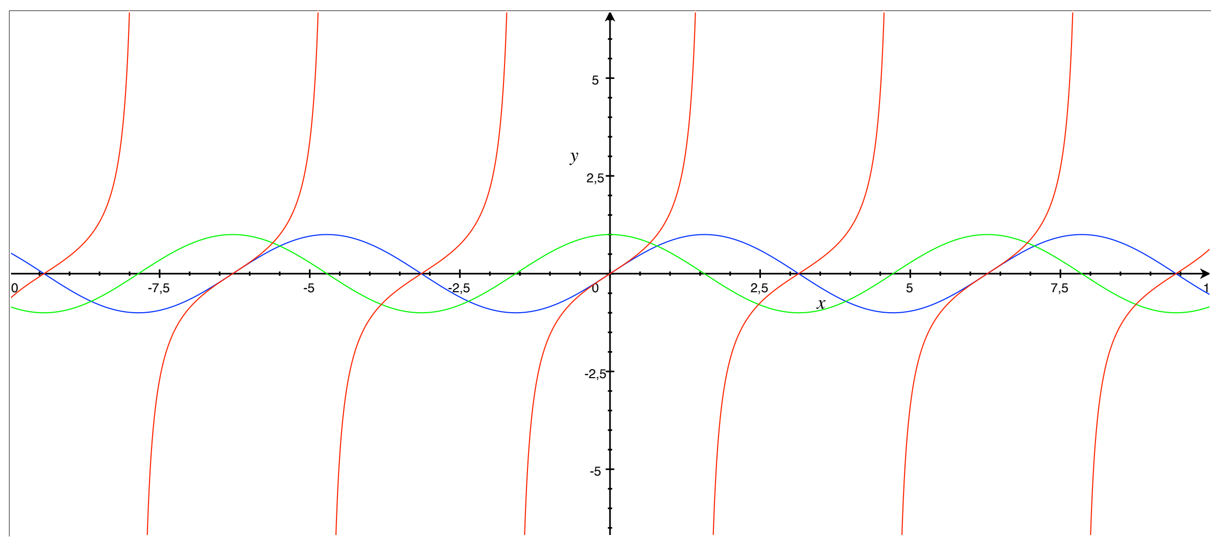
◁ ▷

- **La funzione tangente.**

Si osservi che $\cos(x) = 0$ **se e solo se esiste** $k \in \mathbb{Z}$ **tale che** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$**. Possiamo quindi definire la funzione** $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

Questa funzione si dice tangente e si indica con $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ **o** $f(x) = \tan(x)$**.**
La funzione $\operatorname{tg} x$ **è illimitata, dispari e periodica di periodo minimo** π**.**

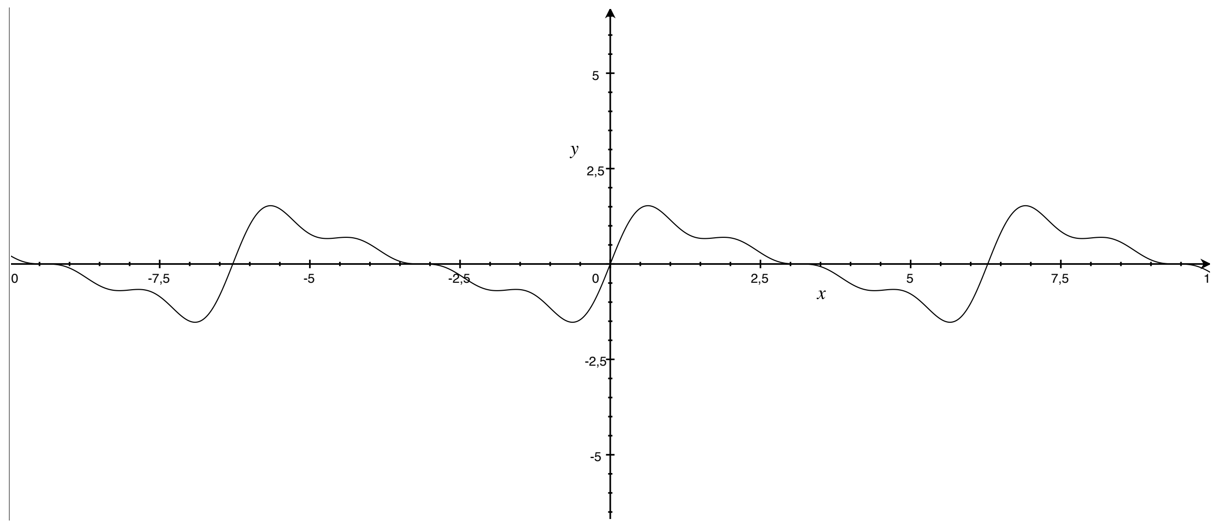


Le funzioni seno e coseno sono i mattoncini base per rappresentare un fenomeno oscillatorio. Consideriamo funzioni del tipo

$$f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$$

A **ampiezza,** $\frac{\omega}{2\pi}$ **frequenza** ($\frac{2\pi}{\omega}$ **periodo),** φ **fase.**

Consideriamo ad esempio la funzione periodica rappresentata dal seguente grafico:

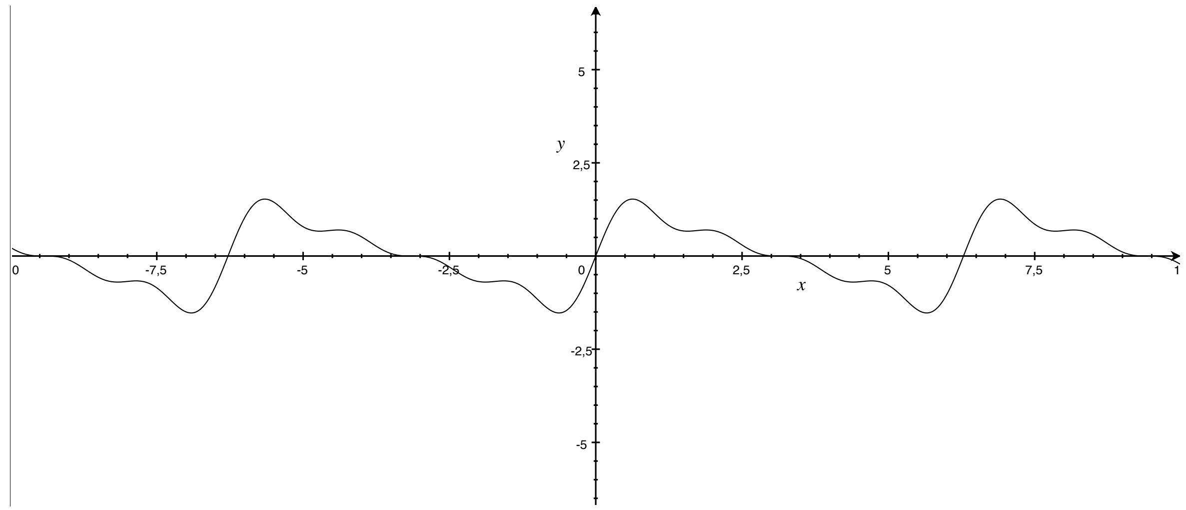


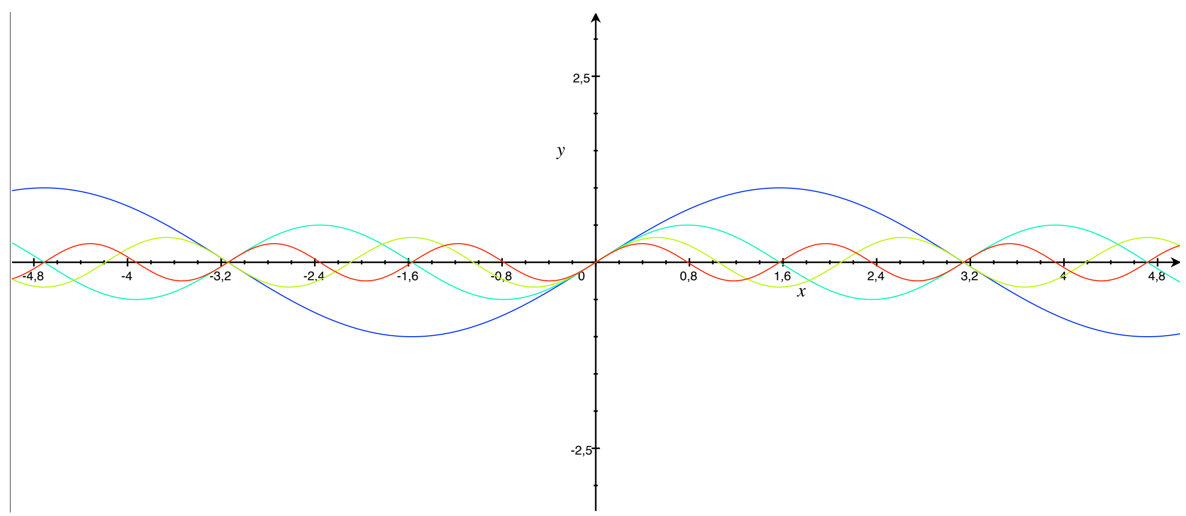
La funzione si può rappresentare come somma di quattro "armoniche":

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) = \sum_{n=1}^{4} b_n \cdot \operatorname{sen}(n\omega x)$$

con $\omega = 1$**,** $b_n = \frac{1}{n}$ **per** $n = 1, 2, 3, 4.$





◁ ▷

Se abbiamo una funzione periodica f, è improbabile che si possa rappresentare come "somma finita" di funzioni semplici del tipo $a_n \cdot \cos(n\omega x)$ o $b_n \cdot \operatorname{sen}(n\omega x)$.
Tuttavia, questo si può fare considerando una "somma infinita", ricorrendo al concetto di serie.

◁ ▷

Se abbiamo una funzione periodica f, è improbabile che si possa rappresentare come "somma finita" di funzioni semplici del tipo $a_n \cdot \cos(n\omega x)$ o $b_n \cdot \operatorname{sen}(n\omega x)$.
Tuttavia, questo si può fare considerando una "somma infinita", ricorrendo al concetto di serie.

- **Teorema di rappresentazione di un segnale in serie di Fourier.**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare, periodica di periodo $T > 0$. Posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$, esistono due successioni di numeri $\left(a_n\right)_n$ e $\left(b_n\right)_n$ tali che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \operatorname{sen}(n\omega x)\right)$$

Questa è una serie di funzioni. La somma della serie è per definizione il limite della successione delle somme parziali:

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \left(a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \operatorname{sen}(n\omega x)\right)$$

◁ ▷

Il linguaggio dell'analisi complessa permette di semplificare formalmente la scrittura come segue

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{i\omega n x}$$

(qui $\gamma_n \in \mathbb{C}$ **e** $e^{it} = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}\,(t)$ **per ogni** $t \in \mathbb{R}$**)**

La conoscenza della funzione f permette di calcolare i coefficienti della serie (mediante opportune formule che non riportiamo). Viceversa, la conoscenza dei coefficienti della serie permette di ricostruire la funzione.

conoscenza di $f \Longrightarrow$ conoscenza dei coefficienti γ_n

conoscenza dei coefficienti $\gamma_n \Longrightarrow$ conoscenza di f.

I coefficienti della serie possono essere pensati come i valori di una funzione (successione) : $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, con $\hat{f}(n) = \gamma_n$.
Si può quindi riscrivere la serie come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{i\omega n x}$$

Si ha quindi la corrispondenza

$$\text{conoscenza di } f \Longleftrightarrow \text{conoscenza di } \hat{f}$$

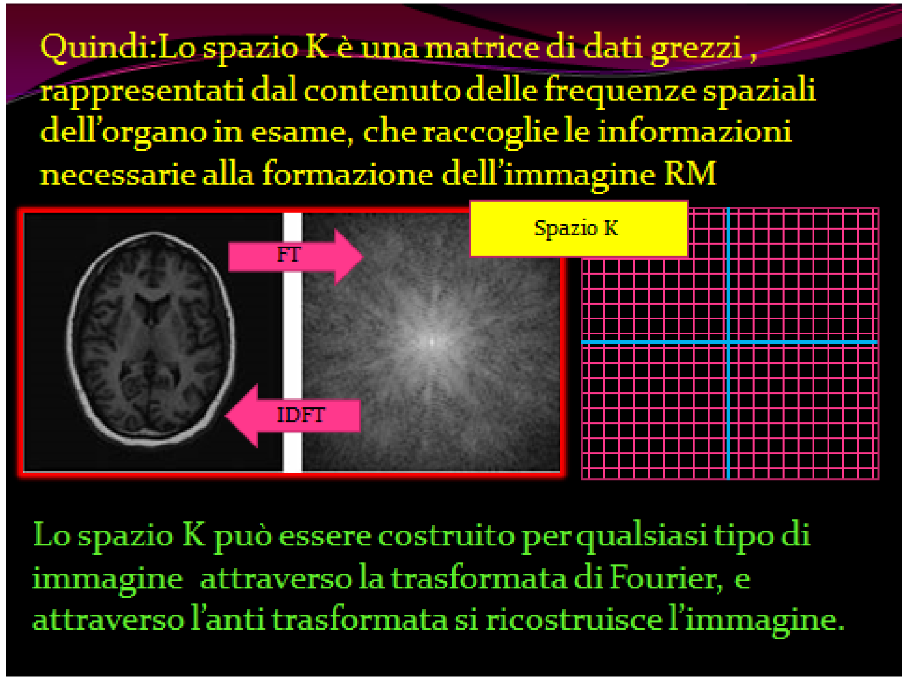
La funzione $\hat{f}$ è una "trasformata" della funzione f. Si dice che f è definita nel "dominio del tempo", mentre $\hat{f}$ è definita nel "dominio delle frequenze".

È quindi possibile passare dal "dominio del tempo" al "dominio delle frequenze" e viceversa.
Si osservi che in questo caso il dominio delle frequenze è "discreto" (cioè $\mathbb{Z}$).

Se la funzione non è periodica si sostituisce la serie con un integrale; $\sum$ diventa $\int$, la variabile discreta $n \simeq n\omega$ con $n \in \mathbb{Z}$ di $\hat{f}$ diventa la variabile continua $s \in \mathbb{R}$. Si parla in questo caso di tasformata di Fourier e si ha

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s)\, e^{isx}\, ds$$

Molte apparecchiature di radiologia utilizzano le trasformate di Fourier (bidimensionali) per trasmettere i segnali rilevati.



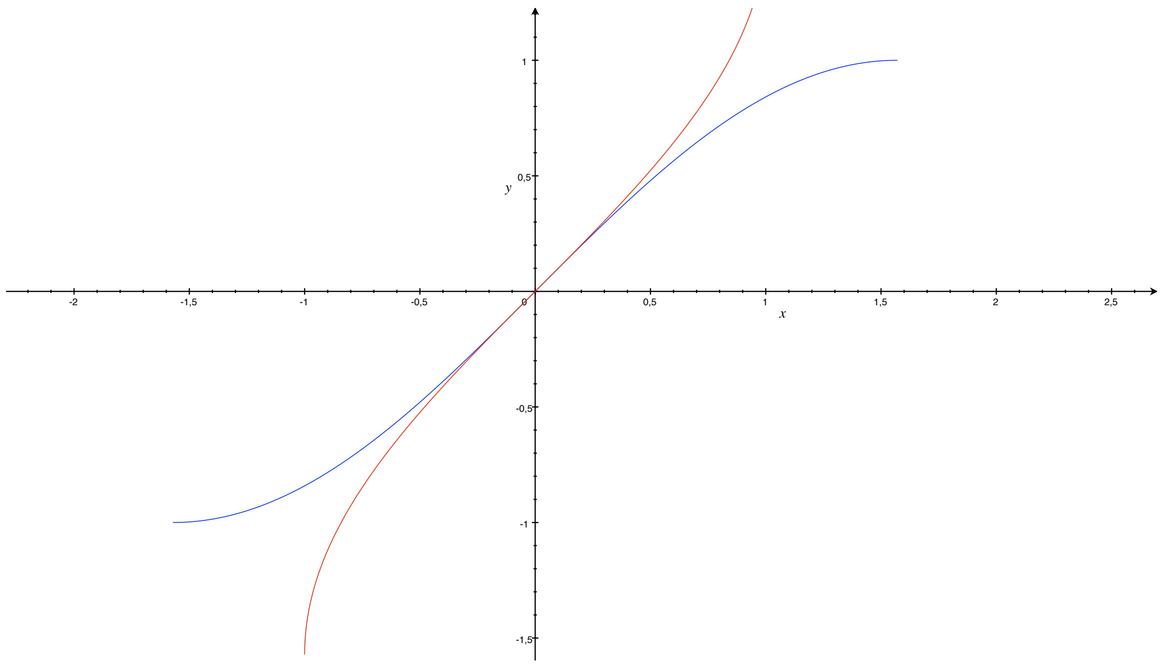
◁ ▷

• **Funzioni trigonometriche inverse. Una funzione periodica non è mai invertibile. In particolare non sono invertibili le funzioni** $\operatorname{sen} x$**,** $\cos x$**,** $\operatorname{tg} x$**.**

• **Funzioni trigonometriche inverse. Una funzione periodica non è mai invertibile. In particolare non sono invertibili le funzioni** $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

Si dice arcoseno la funzione inversa della restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **e pensata con valori in** $[-1.1]$. **Cioè, posto** $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, **si ha** $\operatorname{arcsen}(y) = f^{-1}(y)$. **Quindi**

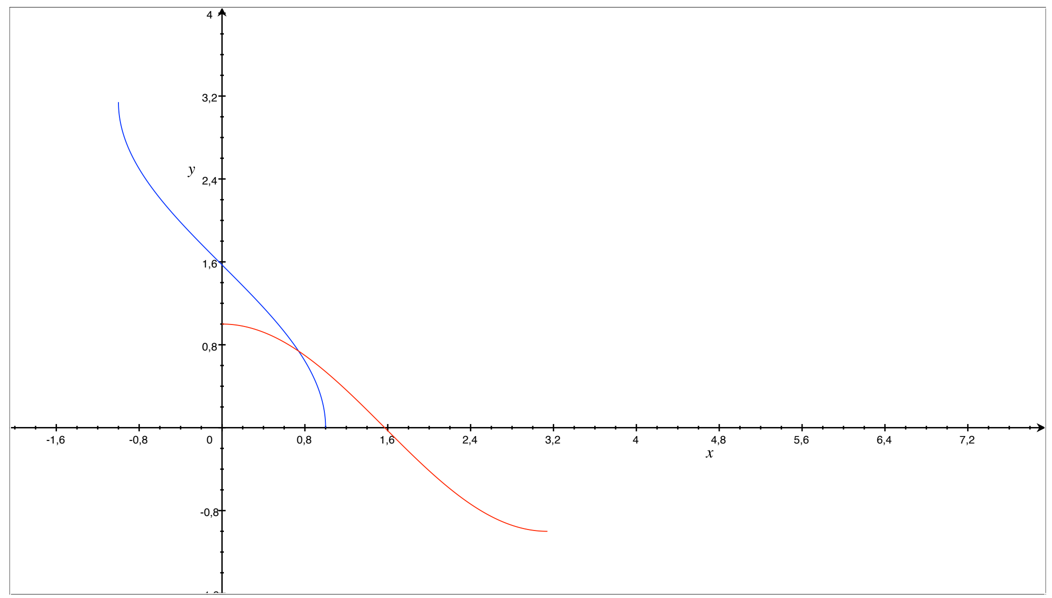
$$\textbf{per } y \in [-1, 1], \arcsin(y) = x \textbf{ se e solo se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \textbf{ e } \operatorname{sen}(x) = y$$



La funzione arcoseno è definita su $[-1, 1]$, **è dispari e strettamente crescente. La funzione ha valori in** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Si dice arcocoseno la funzione inversa della restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ e pensata con valori in $[-1.1]$. Cioè, posto $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, si ha $\arccos(y) = f^{-1}(y)$. Quindi

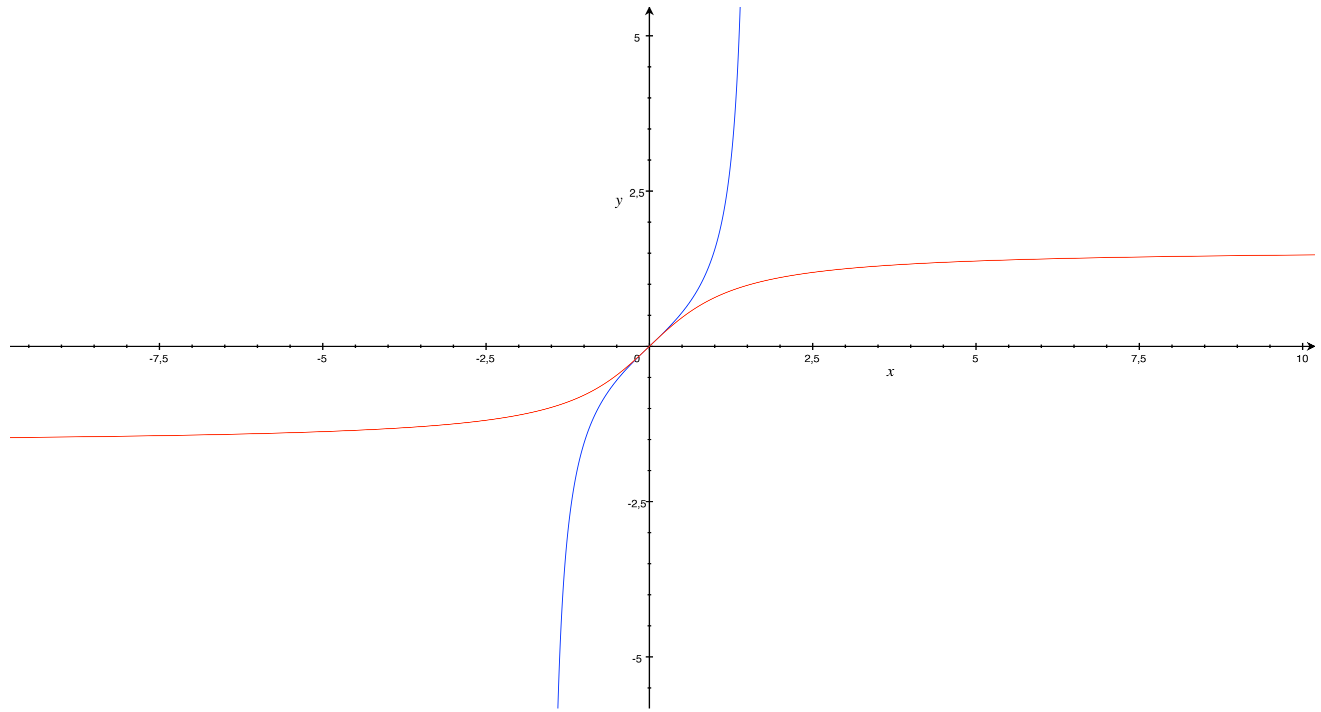
$$\textbf{per } y \in [-1, 1],\ \arccos(y) = x \textbf{ se e solo se } x \in [0, \pi] \textbf{ e } \cos(x) = y$$



Si osservi che la funzione arcocoseno è definita su $[-1, 1]$, è sempre positiva (nulla in 1) e decrescente. La funzione non è pari, però ha grafico simmetrico rispetto al punto $(0, \frac{\pi}{2})$. La funzione ha valori in $[0, \pi]$.

Si dice arcotangente la funzione inversa della restrizione della funzione tangente all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cioè

$$\textbf{per } y \in \mathbb{R},\ \operatorname{arctg}(y) = x \textbf{ se e solo se } x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\textbf{ e } \operatorname{tg}(x) = y$$



La funzione arcotangente è definita su $\mathbb{R}$, è limitata (la funzione ha valori in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), dispari e strettamente crescente.

◁ ▷

Il problema della pendenza: la derivata.

• **Sia** $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ **una funzione,** $x_0 \in]a,b[$**. Siamo interessati a studiare la "pendenza" della funzione** f **nel punto** $\big(x_0, f(x_0)\big)$**.**

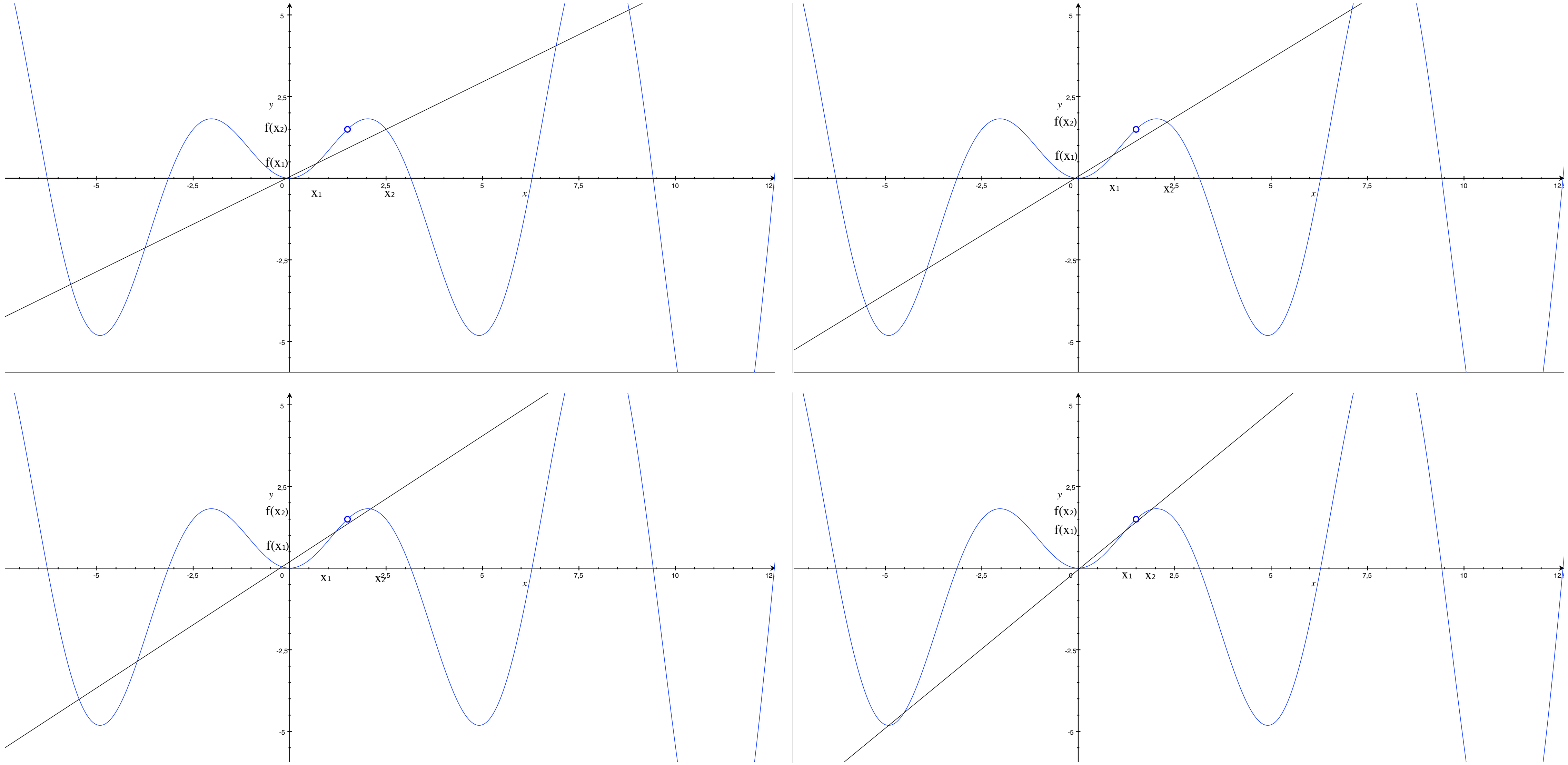
Il problema della pendenza: la derivata.

• **Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in]a, b[$. Siamo interessati a studiare la "pendenza" della funzione f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.**

Siano x_1, x_2 due punti di $]a, b[$. La retta che passa per i punti $\big(x_1, f(x_1)\big)$ e $\big(x_2, f(x_2)\big)$ ha equazione

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Questa retta è la secante il grafico di f nei punti $\big(x_1, f(x_1)\big)$ e $\big(x_2, f(x_2)\big)$. Pensiamo ora di scegliere i punti molto vicini al punto x_0.



y
f(x2)
f(x1)
x1
x2
x
y
f(x2)
f(x1)
x1
x2
x
y
f(x2)
f(x1)
x1
x2
x
y
f(x2)
f(x1)
x1
x2
x

Quando i punti x_1 e x_2 "tendono" al punto x_0 la retta secante "tende" alla retta tangente, di equazione

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

dove

$$m = \lim_{x_1 \to x_0,\, x_2 \to x_0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

◁ ▷

Quando i punti x_1 e x_2 "tendono" al punto x_0 la retta secante "tende" alla retta tangente, di equazione

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

dove

$$m = \lim_{x_1 \to x_0,\, x_2 \to x_0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Diremo derivata di f nel punto x_0, se esiste, il limite

$$f'(x_0) = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

◁ ▷

Quando i punti x_1 e x_2 "tendono" al punto x_0 la retta secante "tende" alla retta tangente, di equazione

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

dove

$$m = \lim_{x_1 \to x_0,\, x_2 \to x_0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Diremo derivata di f nel punto x_0, se esiste, il limite

$$f'(x_0) = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f'(x_0)$ è finito, si dice che f è derivabile in x_0.

◁ ▷

Quando i punti x_1 e x_2 "tendono" al punto x_0 la retta secante "tende" alla retta tangente, di equazione

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

dove

$$m = \lim_{x_1 \to x_0,\, x_2 \to x_0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Diremo derivata di f nel punto x_0, se esiste, il limite

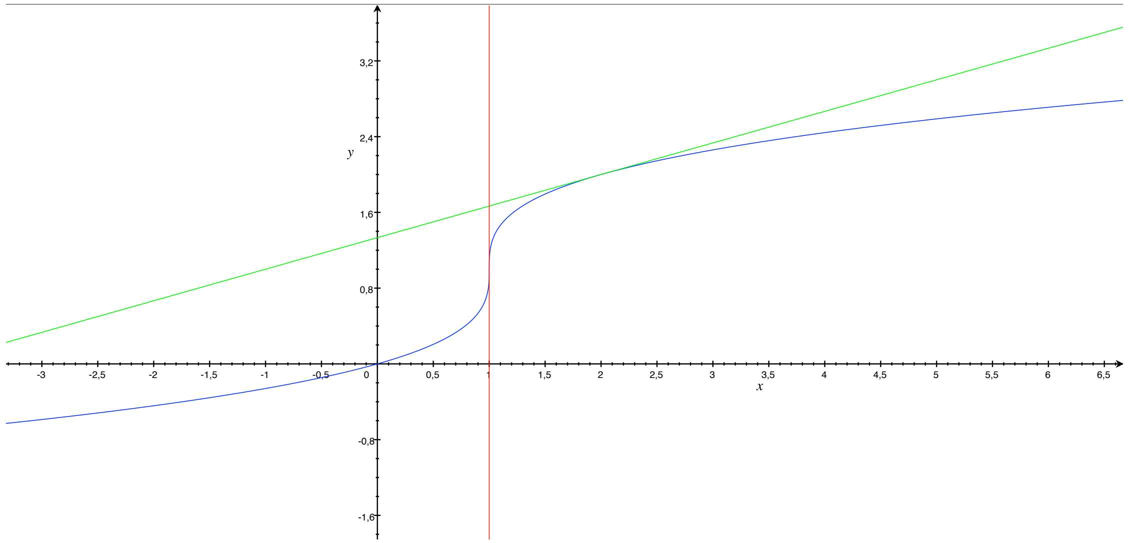
$$f'(x_0) = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f'(x_0)$ è finito, si dice che f è derivabile in x_0.

Quindi la retta tangente il grafico di f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Se la derivata $f'(x_0)$ esiste ma è infinita, la retta tangente il grafico della funzione è verticale (parallela all'asse delle ordinate y).



Una funzione si dice derivabile se è derivabile in ogni punto del suo dominio. La derivata della funzione f può essere indicata in vari modi: f', Df, $\frac{df}{dx}$, f_x, $\dot{f}$, ecc. .

◁ ▷

Vi sono alcune regole che permettono il calcolo delle derivate delle funzioni elementari. Si ha ad esempio

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}; \qquad D(a^x) = a^x \ln a; \qquad D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a};$$
$$D(\operatorname{sen} x) = \cos x; \qquad D(\cos x) = -\operatorname{sen} x; \qquad D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Inoltre vi sono regole per calcolare la derivata della funzione somma, prodotto, della funzione composta, della funzione inversa, eccetera.

◁ ▷

Vi sono alcune regole che permettono il calcolo delle derivate delle funzioni elementari. Si ha ad esempio

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}; \quad D(a^x) = a^x \ln a; \quad D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a};$$
$$D(\operatorname{sen} x) = \cos x; \quad D(\cos x) = -\operatorname{sen} x; \quad D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Inoltre vi sono regole per calcolare la derivata della funzione somma, prodotto, della funzione composta, della funzione inversa, eccetera.

Sono derivabili nel loro dominio tutte le funzioni razionali (in particolare le funzioni polinomiali), le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni seno, coseno, tangente.

Vi sono alcune regole che permettono il calcolo delle derivate delle funzioni elementari. Si ha ad esempio

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}; \quad D(a^x) = a^x \ln a; \quad D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a};$$
$$D(\operatorname{sen} x) = \cos x; \quad D(\cos x) = -\operatorname{sen} x; \quad D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Inoltre vi sono regole per calcolare la derivata della funzione somma, prodotto, della funzione composta, della funzione inversa, eccetera.

Sono derivabili nel loro dominio tutte le funzioni razionali (in particolare le funzioni polinomiali), le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni seno, coseno, tangente.

Pur ammettendo derivata, non sono derivabili in 0 le funzioni potenza x^α di esponente $0 < \alpha < 1$. Non sono derivabili in -1 e 1 le funzioni arcoseno e arcocoseno.

◁ ▷

- **Uso della derivata nello studio della monotonia di una funzione.**

◁ ▷

- **Uso della derivata nello studio della monotonia di una funzione.**

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ **una funzione derivabile e si abbia** $f'(x) \geq 0$ **su** $]a, b[$**. Allora la funzione è crescente sull'intervallo** $]a, b[$**.**

◁ ▷

- **Uso della derivata nello studio della monotonia di una funzione.**

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ **una funzione derivabile e si abbia** $f'(x) \geq 0$ **su** $]a, b[$**. Allora la funzione è crescente sull'intervallo** $]a, b[$**.**

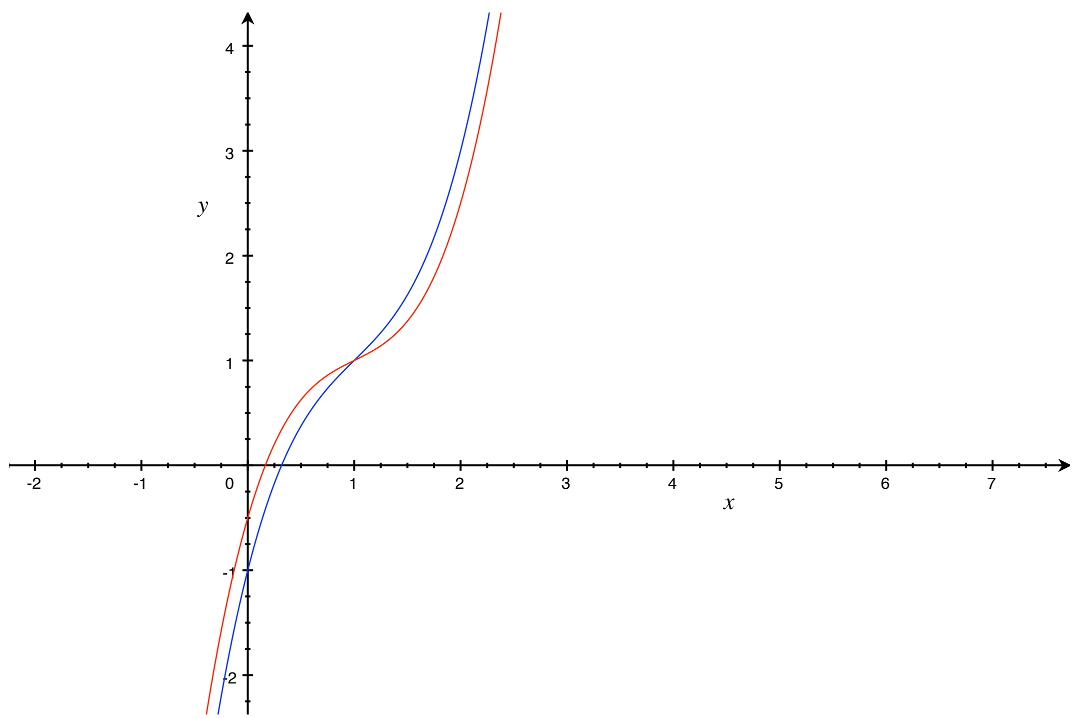
Se invece si ha $f'(x) \leq 0$ **su** $]a, b[$**, allora la funzione è decrescente sull'intervallo** $]a, b[$**.**

• **Uso della derivata nello studio della monotonia di una funzione.**

Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ **una funzione derivabile e si abbia** $f'(x) \geq 0$ **su** $]a, b[$**. Allora la funzione è crescente sull'intervallo** $]a, b[$**.**

Se invece si ha $f'(x) \leq 0$ **su** $]a, b[$**, allora la funzione è decrescente sull'intervallo** $]a, b[$**.**

Si osservi che la derivata indica la "pendenza" del grafico della funzione f**. Se** $f'(x)$ **è "grande", significa che la funzione** f **cresce molto velocemente.**



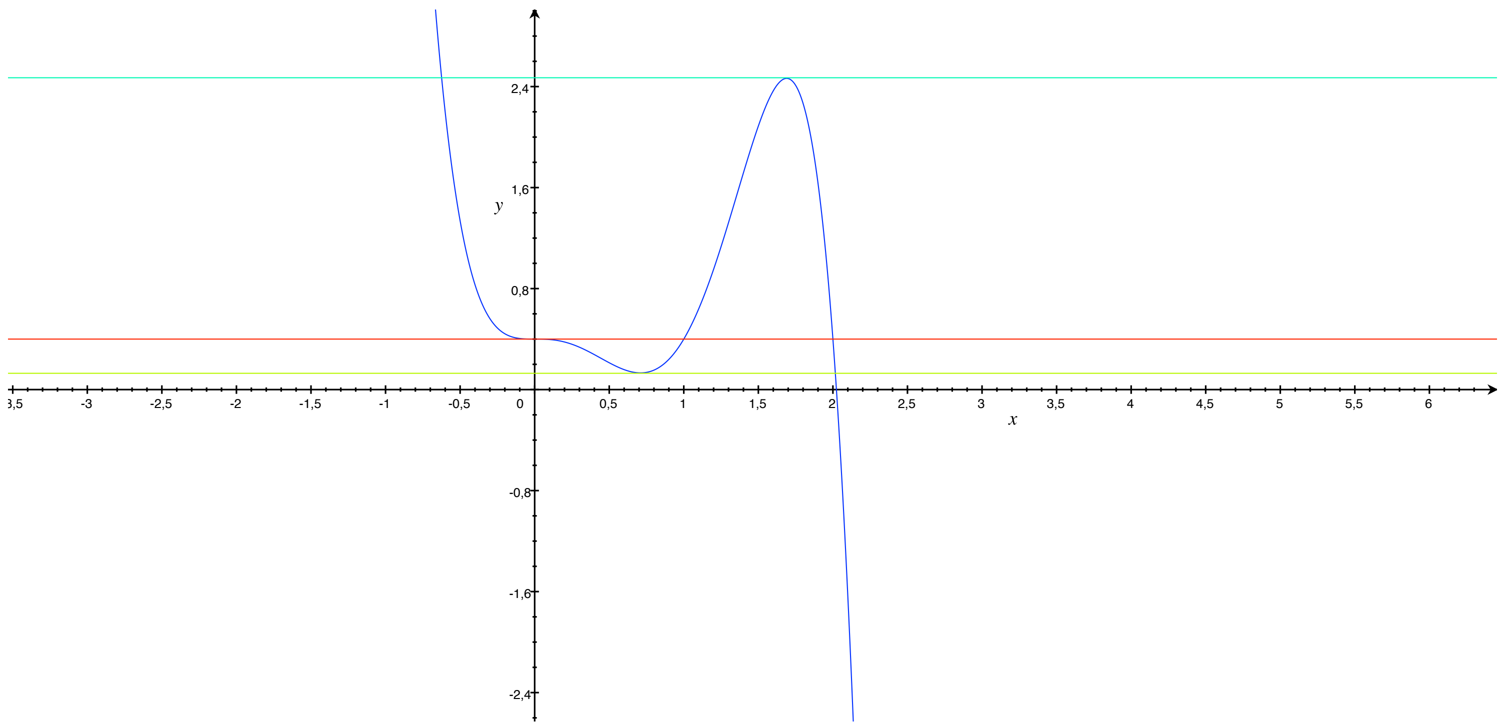
◁ ▷

- **Uso della derivata nello studio locale di una funzione.**

◁ ▷

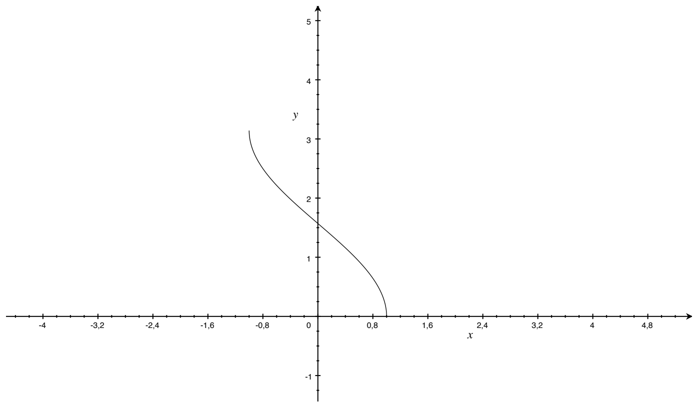
- **Uso della derivata nello studio locale di una funzione.**

Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ **una funzione derivabile. Sia** $x_0 \in]a,b[$ **un punto di minimo locale per** f**, oppure un punto di massimo locale per** f**. Allora** $f'(x_0) = 0$**.**
Si osservi che in questi punti la tangente è orizzontale.

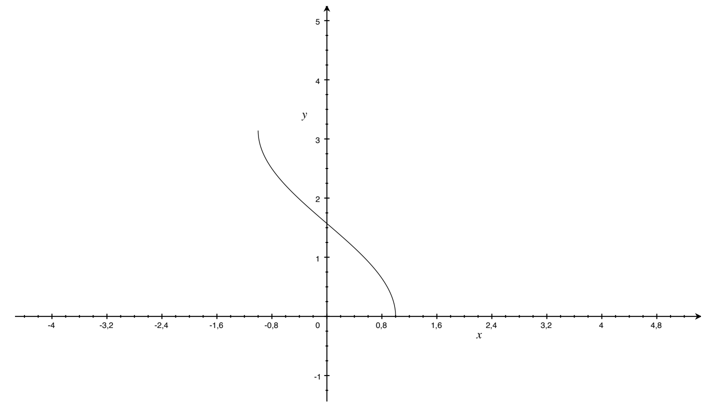


Attenzione! Può succedere che sia $f'(x_0) = 0$ **anche se** x_0 **non è né un punto di minimo, né un punto di massimo (es.** $f(x) = x^3$ **in** $x_0 = 0$**).**

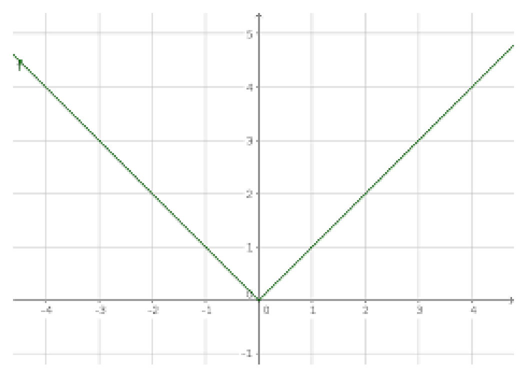
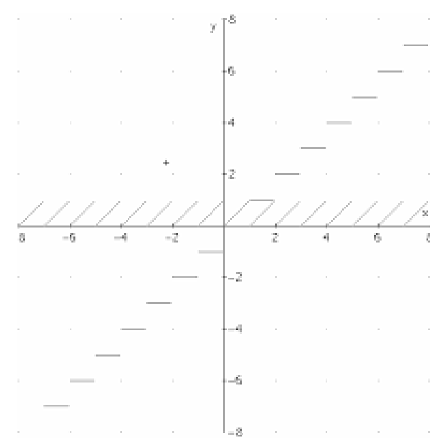
Attenzione! Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha in a, oppure in b, un punto di minimo o di massimo, non è detto che la derivata si annulli in tali punti (es. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x$).



Attenzione! Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ha in a, oppure in b, un punto di minimo o di massimo, non è detto che la derivata si annulli in tali punti (es. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x$).



Naturalmente non tutte le funzioni ammettono derivata. Ad esempio la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ non ha derivata in 0.
Non esiste derivata nei punti $x \in \mathbb{Z}$ delle funzioni parte intera e mantissa (dove la funzione presenta un "salto").

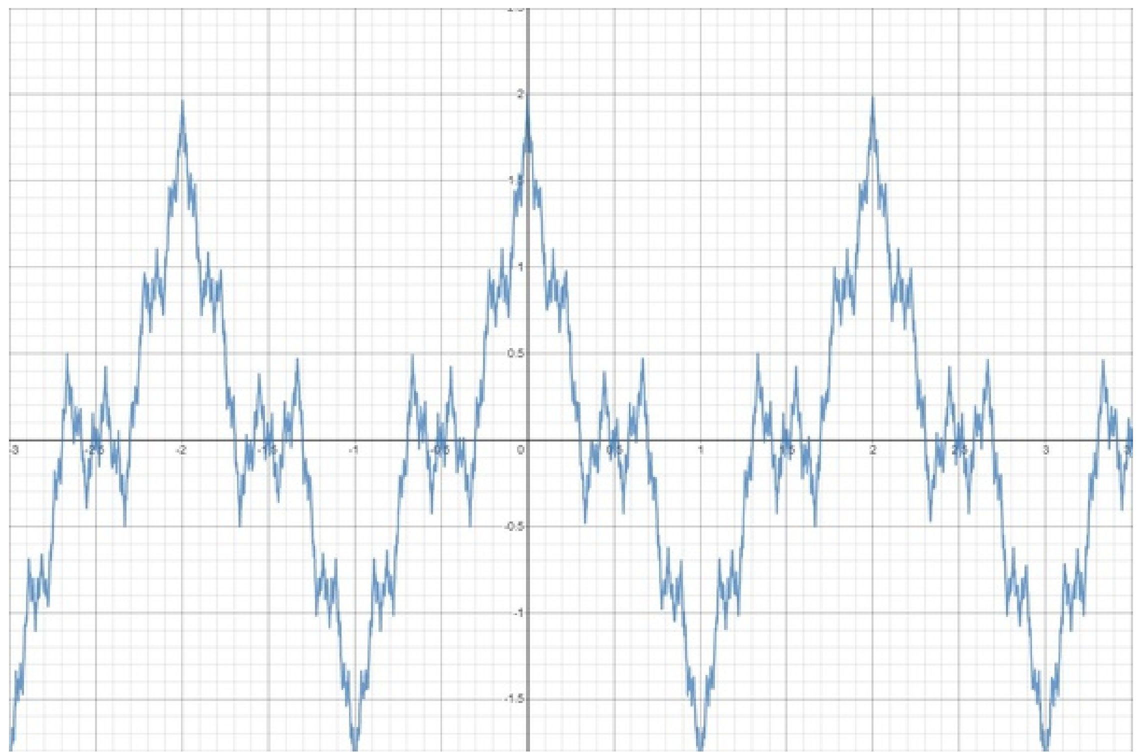
Tipicamente una funzione non è derivabile in un punto se ha derivata verticale, presenta un punto "angoloso" oppure ha un "salto" (vi sono altre possibilità più rare).

Tipicamente una funzione non è derivabile in un punto se ha derivata verticale, presenta un punto "angoloso" oppure ha un "salto" (vi sono altre possibilità più rare).

Esistono anche funzioni che non sono derivabili in nessun punto (ad esempio la funzione di Weierstrass)

Tipicamente una funzione non è derivabile in un punto se ha derivata verticale, presenta un punto "angoloso" oppure ha un "salto" (vi sono altre possibilità più rare).

Esistono anche funzioni che non sono derivabili in nessun punto (ad esempio la funzione di Weierstrass)



◁ ▷

- **Funzioni convesse e funzioni concave.**

◁ ▷

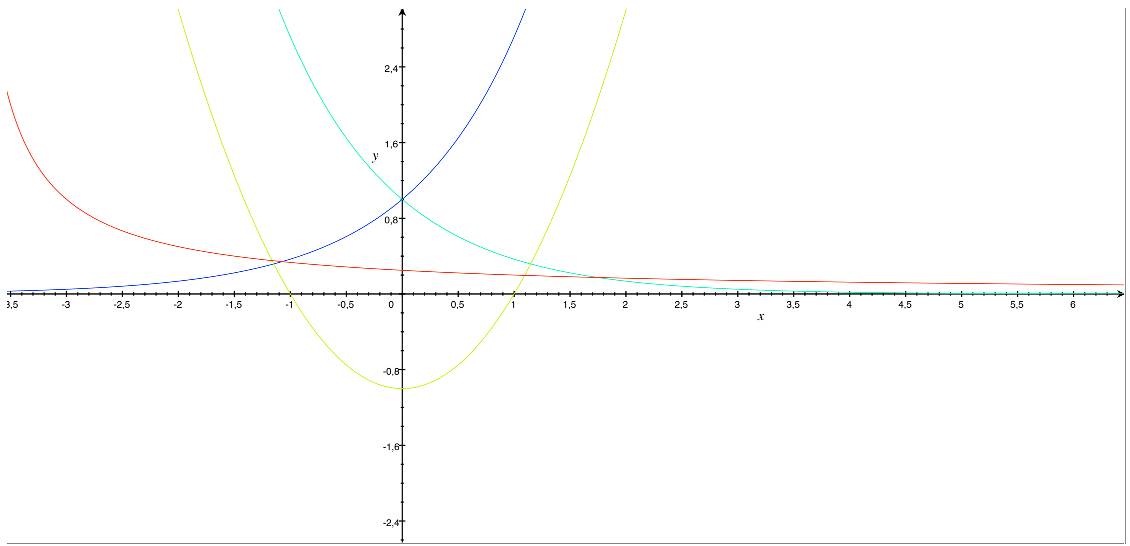
- **Funzioni convesse e funzioni concave.**

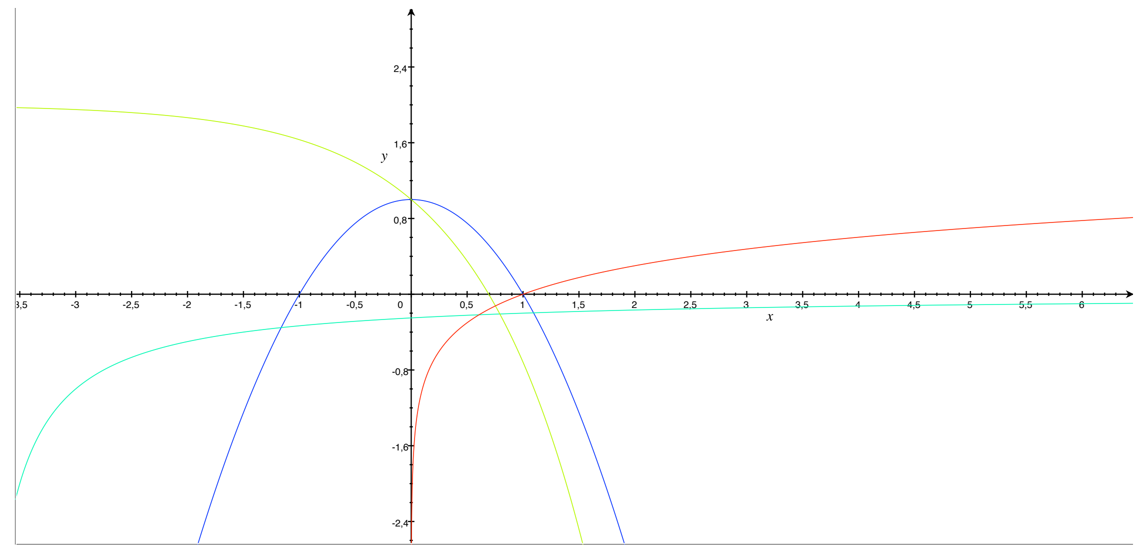
Una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ si dice convessa se la sua derivata è una funzione crescente. Una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ si dice concava se la sua derivata è una funzione decrescente.

- **Funzioni convesse e funzioni concave.**

Una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ si dice convessa se la sua derivata è una funzione crescente. Una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ si dice concava se la sua derivata è una funzione decrescente.

Esempi di funzioni convesse sono e^x, x^2, $\frac{1}{x}$ per $x > 0$, $\operatorname{sen} x$ su $[\pi, 2\pi]$, . . . ; esempi di funzioni concave sono $\ln x$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ per $x < 0$, $\operatorname{sen} x$ su $[0, \pi]$,. . .

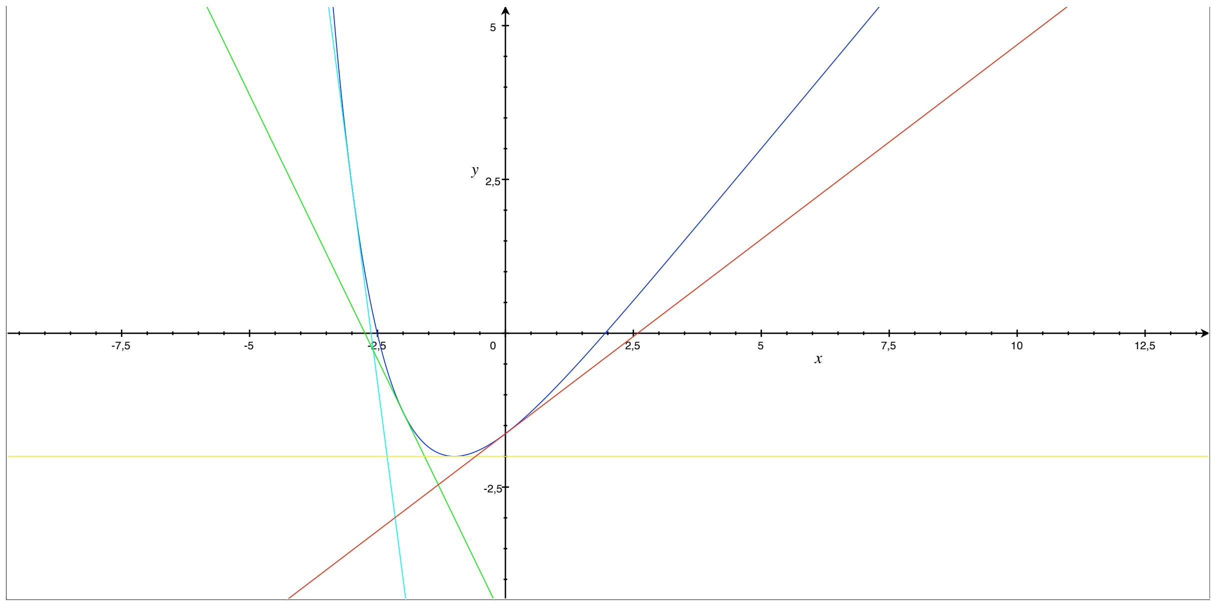


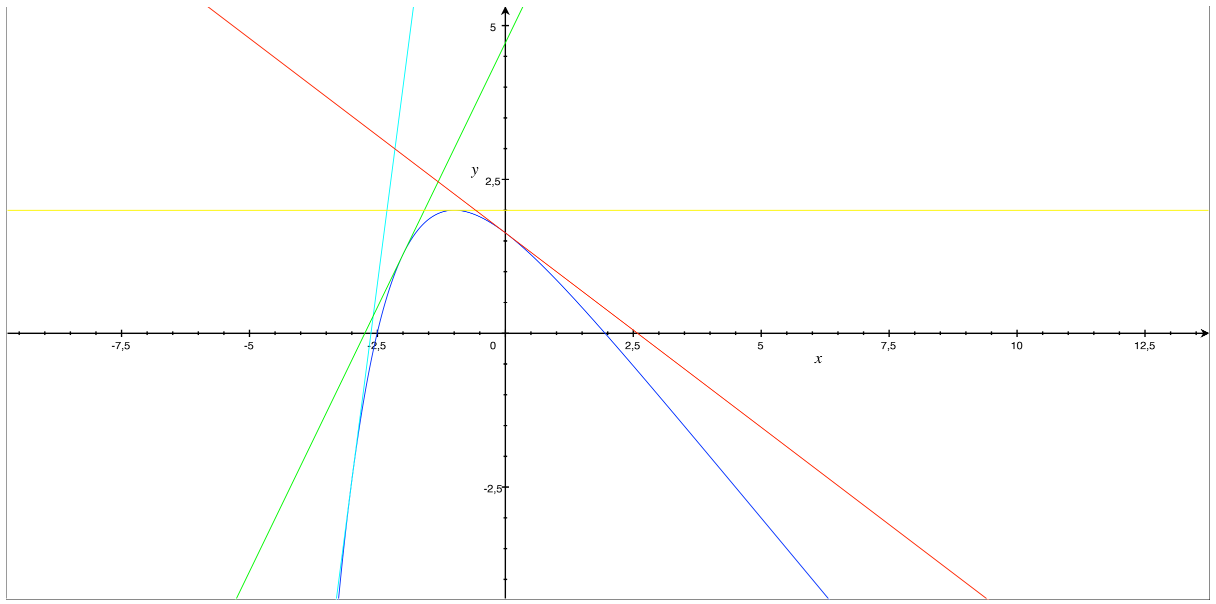


È possibile dare una definizione di funzione convessa anche per funzioni non derivabili.

Se una funzione è convessa, in ogni punto del grafico la tangente “sta sotto il grafico”.

Se una funzione è concava, in ogni punto del grafico la tangente “sta sopra il grafico”.





◁ ▷

- **Punti di flesso. Sia** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **un funzione derivabile e sia** $x_0 \in \,]a, b[$**.**

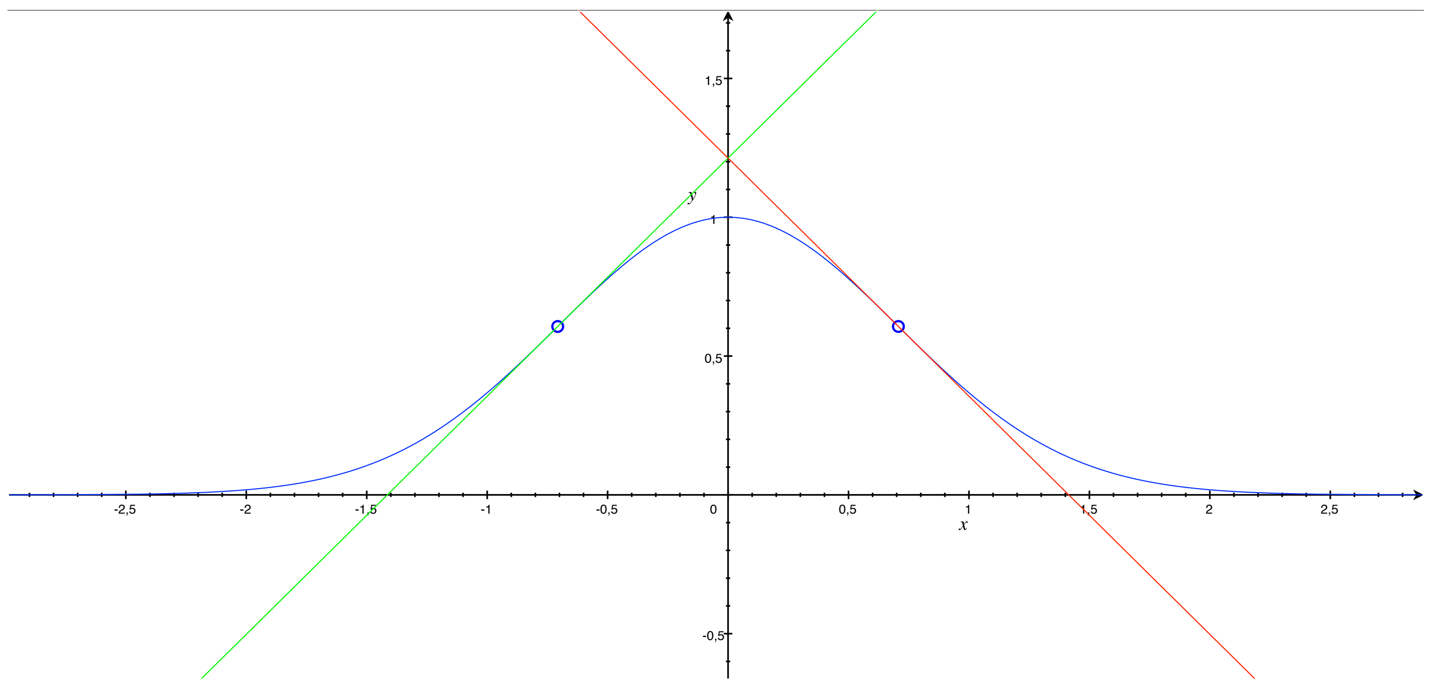
◁ ▷

- **Punti di flesso. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un funzione derivabile e sia $x_0 \in \,]a, b[$.**

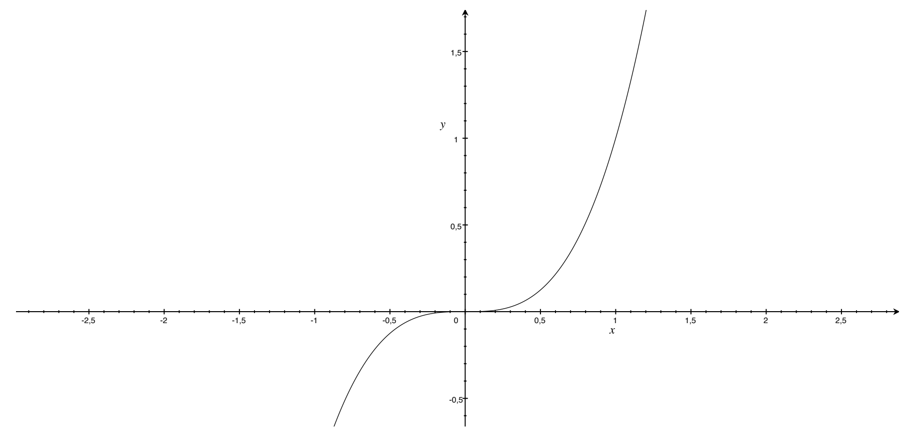
Diremo che x_0 è un punto di flesso per f se la funzione f è convessa sull'intervallo $[a, x_0]$ ed è concava sull'intervallo $[x_0, b]$ (si parla in questo caso di punto di flesso discendente);

oppure se la funzione f è concava sull'intervallo $[a, x_0]$ ed è convessa sull'intervallo $[x_0, b]$ (si parla in questo caso di punto di flesso ascendente).

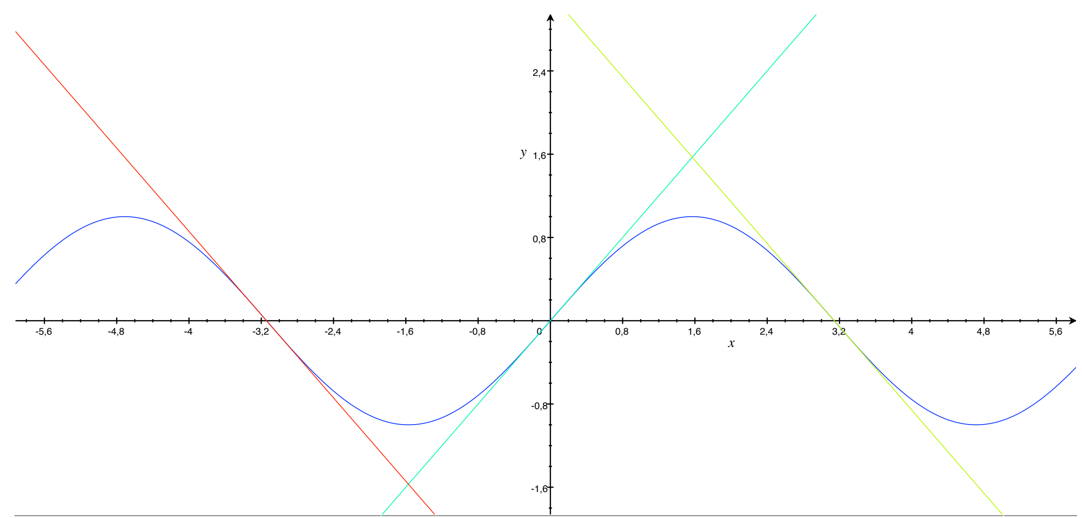
In un punto di flesso il grafico attraversa la tangente.



Ad esempio 0 è punto di flesso ascendente per la funzione x^3.



Per la funzione $\operatorname{sen} x$ **i punti** $2k\pi$**,** $k \in \mathbb{Z}$ **sono punti di flesso discendente, i punti** $(2k+1)\pi$**,** $k \in \mathbb{Z}$ **sono punti di flesso ascendente**



• **Uso della derivata seconda nello studio della convessità di una funzione.**

Si dice derivata seconda di f la funzione f'' derivata della funzione f'.

◁ ▷

- **Uso della derivata seconda nello studio della convessità di una funzione.**

Si dice derivata seconda di f **la funzione** f'' **derivata della funzione** f'**.**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **una funzione due volte derivabile e si abbia** $f''(x) \geq 0$ **su** $[a, b]$**. Allora la funzione è convessa sull'intervallo** $[a, b]$**.**

Se invece si ha $f''(x) \leq 0$ **su** $[a, b]$**, allora la funzione è concava sull'intervallo** $[a, b]$**.**

• Uso della derivata seconda nello studio della convessità di una funzione.

Si dice derivata seconda di f la funzione f'' derivata della funzione f'.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile e si abbia $f''(x) \geq 0$ su $[a, b]$. Allora la funzione è convessa sull'intervallo $[a, b]$.

Se invece si ha $f''(x) \leq 0$ su $[a, b]$, allora la funzione è concava sull'intervallo $[a, b]$.

In un punto di flesso si ha $f''(x_0) = 0$.

◁ ▷

- **Uso della derivata seconda nello studio della convessità di una funzione.**

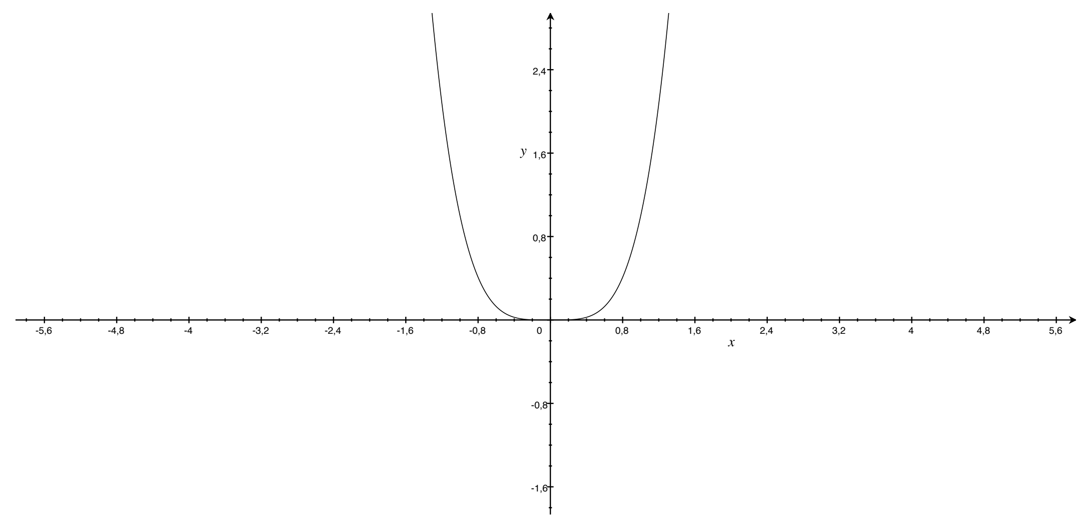
Si dice derivata seconda di f la funzione f'' derivata della funzione f'.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile e si abbia $f''(x) \geq 0$ su $[a, b]$. Allora la funzione è convessa sull'intervallo $[a, b]$.

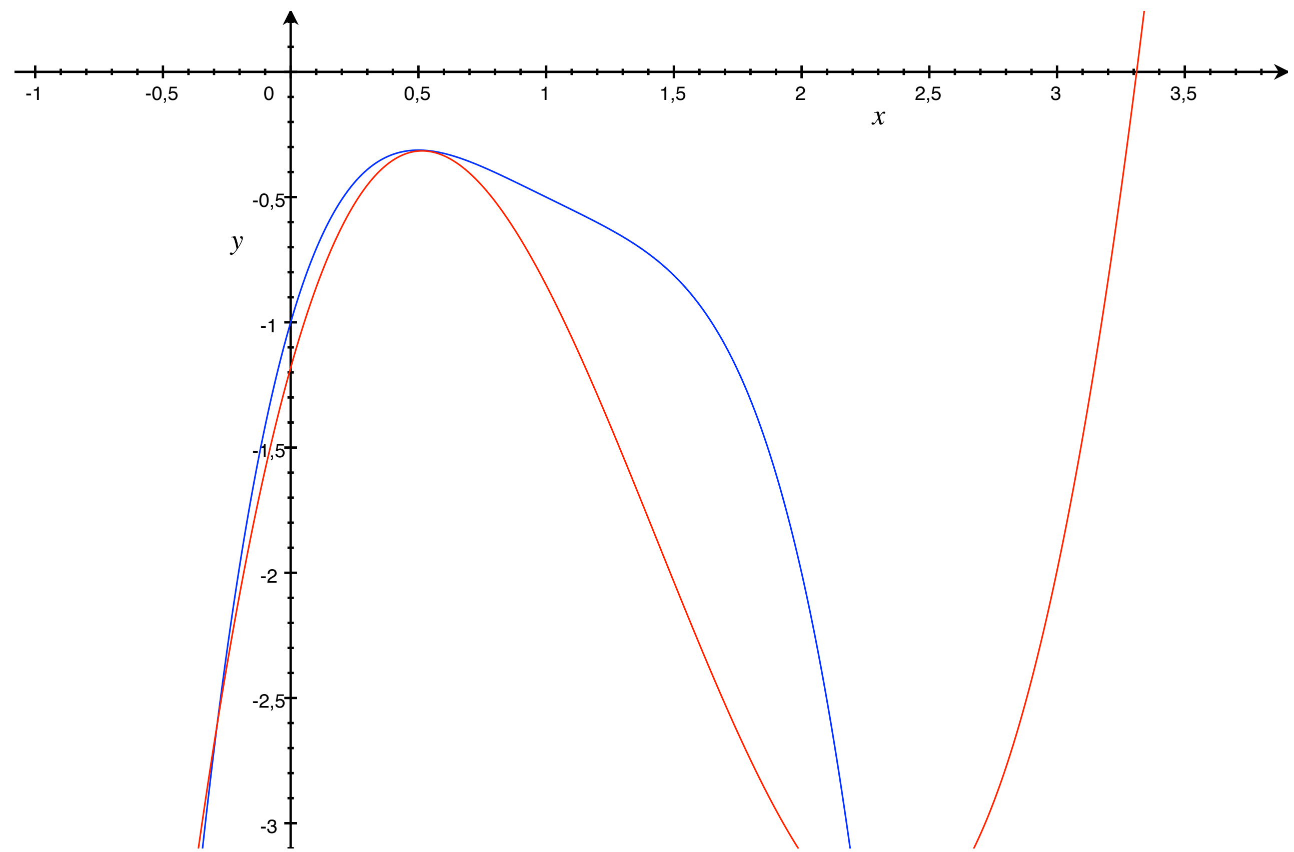
Se invece si ha $f''(x) \leq 0$ su $[a, b]$, allora la funzione è concava sull'intervallo $[a, b]$.

In un punto di flesso si ha $f''(x_0) = 0$.

Attenzione! Può succedere che sia $f''(x_0) = 0$ anche se x_0 non è un punto di flesso (es. $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$).



Si osservi che la derivata seconda indica la “curvatura” del grafico della funzione f. Se $f''(x)$ è “grande”, significa che il grafico della funzione f cambia pendenza molto velocemente.



◁ ▷

Il problema dell'area: l'integrale.

◁ ▷

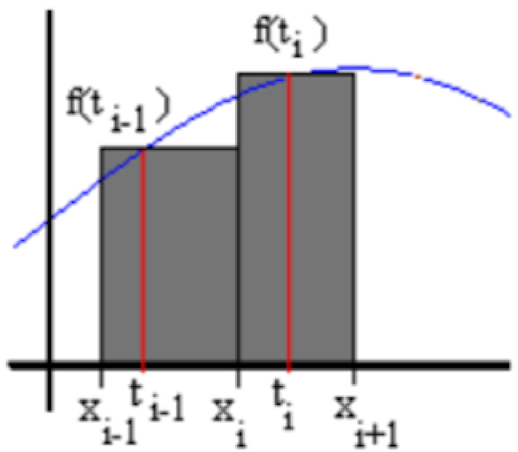
Il problema dell'area: l'integrale.

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n parti, ad esempio tutte di uguale lunghezza $\frac{1}{n}$. Si è quindi suddiviso l'intervallo $[0,1]$ in n sottointervalli

$$[0, \tfrac{1}{n}], [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}], [\tfrac{2}{n}, \tfrac{3}{n}], \ldots, [\tfrac{n-1}{n}, 1].$$

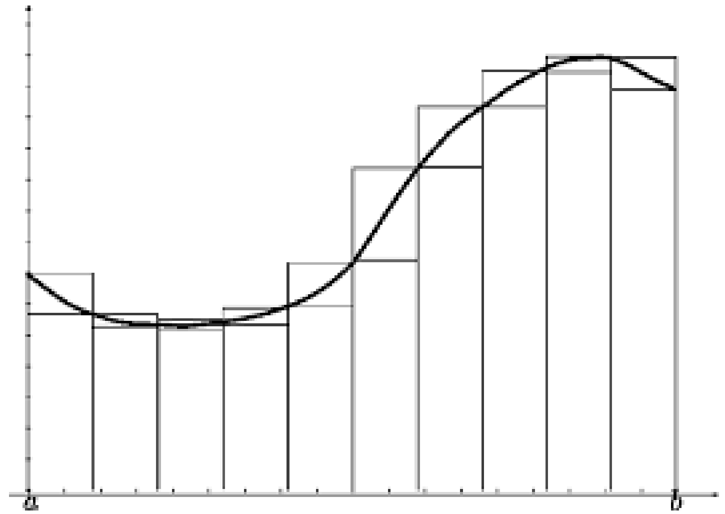
In ogni intervallino $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ scegliamo un qualunque punto, che indichiamo con $x_{n,k}$, (ad esempio si può prendere il punto di mezzo: $x_{n,k} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{2n}$).

Consideriamo il rettangolo $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \times [0, f(x_{n,k})]$. La sua area è $\dfrac{1}{n} \cdot f\left(x_{n,k}\right)$



Sommiamo queste aree in modo da calcolare l'area del "trapezoide" che approssima la regione sottesa al grafico di f.

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\frac{1}{n}$$



Diremo integrale della funzione f sull'intervallo $[0,1]$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\frac{1}{n}$$

◁ ▷

Si può ripetere lo stesso discorso per una funzione definita su un intervallo $[a,b]$.
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x)\geq 0$ per ogni $x\in[a,b]$. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti, ad esempio tutte di uguale lunghezza $\frac{b-a}{n}$. Si è quindi suddiviso l'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli

$$[a+\tfrac{k-1}{n}(b-a), a+\tfrac{k}{n}(b-a)], \qquad k\in\{1,2,\ldots,n\}$$

In ogni intervallino $[a+\frac{k-1}{n}(b-a), a+\frac{k}{n}(b-a)]$ scegliamo un qualunque punto, che indichiamo con $x_{n,k}$, e consideriamo l'area del rettangolo di base $\frac{b-a}{n}$ e altezza $f\big(x_{n,k}\big)$: $f\big(x_{n,k}\big)\dfrac{b-a}{n}$.
Consideriamo il rettangolo $[a+\frac{k-1}{n}(b-a), a+\frac{k}{n}]\times[0,f\big(x_{n,k}\big)]$. La sua area è $\dfrac{b-a}{n}\cdot f\big(x_{n,k}\big)$
Sommiamo queste aree in modo da calcolare l'area del "trapezoide" che approssima la regione sottesa al grafico di f.
Diremo integrale della funzione f sull'intervallo $[a,b]$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\frac{b-a}{n}$$

Indicheremo l'integrale con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Indicheremo l'integrale con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

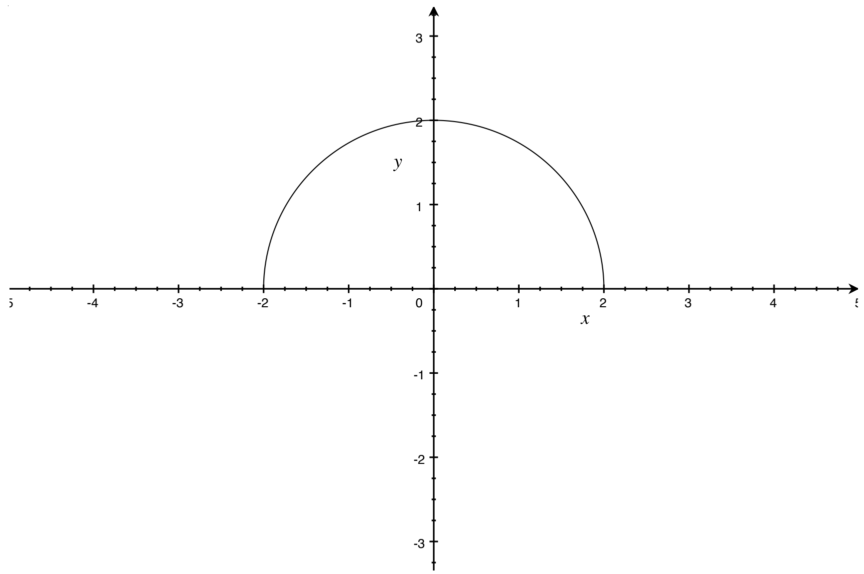
Se f **è una funzione positiva, l'integrale** $\int_a^b f(x)\, ds$ **si può quindi interpretare come l'area della regione piana compresa tra l'asse delle** x **e il grafico della funzione** f**.**

Indicheremo l'integrale con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se f è una funzione positiva, l'integrale $\int_a^b f(x)\,ds$ si può quindi interpretare come l'area della regione piana compresa tra l'asse delle x e il grafico della funzione f.

Esempio: $f:[-R,R]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$; il grafico è un semicerchio di raggio R.

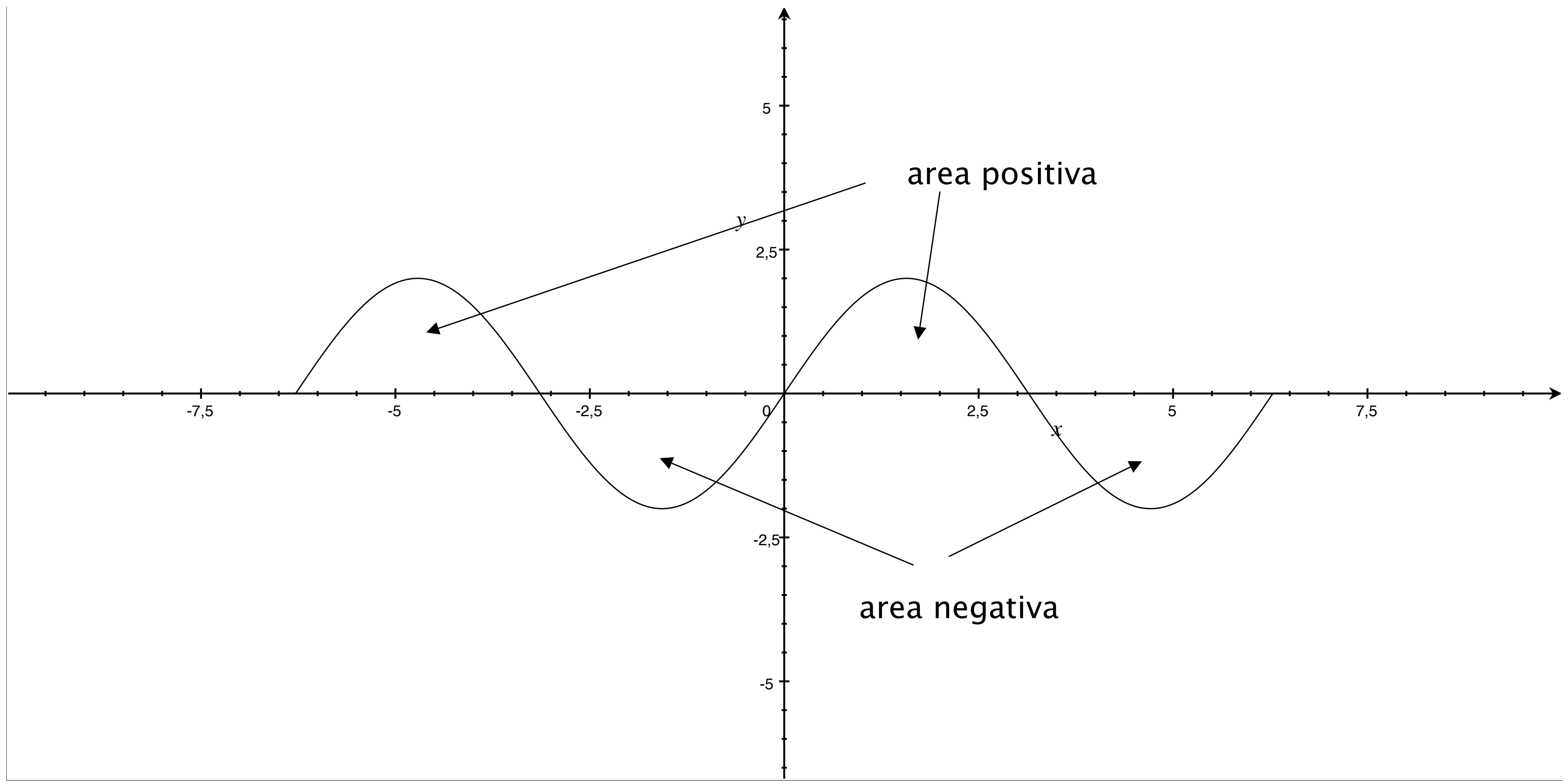


Si avrà

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = ?$$

La definizione si può estendere anche a funzioni non positive e anche a funzioni che non sono continue.

Se la funzione f non è positiva, l'integrale $\int_a^b f(x)\, ds$ si può interpretare come la somma algebrica delle aree delle regione piane comprese tra l'asse delle x e il grafico della funzione f con segno positivo dove $f(x) \geq 0$ e le aree delle regioni piane comprese tra il grafico della funzione f e l'asse delle x con segno negativo dove $f(x) \leq 0$.



◁ ▷

Possiamo vedere una seconda importante interpretazione dell'integrale. Ricordiamo la definizione data

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})}{n}$$

Osserviamo che

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})}{n} = \frac{f(x_{n,1}) + f(x_{n,2}) + \cdots + f(x_{n,n})}{n}$$

◁ ▷

Possiamo vedere una seconda importante interpretazione dell'integrale.
Ricordiamo la definizione data

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})}{n}$$

Osserviamo che

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})}{n} = \frac{f(x_{n,1}) + f(x_{n,2}) + \cdots + f(x_{n,n})}{n}$$

è la media fra gli n valori della funzione $f(x_{n,1}), f(x_{n,2}), \ldots, f(x_{n,n})$.

Pertanto l'integrale si può interpretare come il valore medio della funzione f sull'intervallo $[0, 1]$.

◁ ▷

Possiamo vedere una seconda importante interpretazione dell'integrale. Ricordiamo la definizione data

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})}{n}$$

Osserviamo che

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})}{n} = \frac{f(x_{n,1}) + f(x_{n,2}) + \cdots + f(x_{n,n})}{n}$$

è la media fra gli n valori della funzione $f(x_{n,1}), f(x_{n,2}), \ldots, f(x_{n,n})$.

Pertanto l'integrale si può interpretare come il valore medio della funzione f sull'intervallo $[0,1]$.

Se lavoriamo su un intervallo generico $[a,b]$ il valore medio della funzione f sull'intervallo è

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \text{ valor medio della funzione } f \text{ sull'intervallo } [a,b]$$

◁ ▷

- **Primitiva di una funzione.**

◁ ▷

- **Primitiva di una funzione.**

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** I **intervallo. Supponiamo che esista una funzione** $F : I \to \mathbb{R}$ **tale che** $F'(x) = f(x)$ **per ogni** $x \in I$**. Diremo allora che** F **è una primitiva di** f**.**

◁ ▷

- **Primitiva di una funzione.**

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** I **intervallo. Supponiamo che esista una funzione** $F : I \to \mathbb{R}$ **tale che** $F'(x) = f(x)$ **per ogni** $x \in I$**. Diremo allora che** F **è una primitiva di** f**.**

- **Il Teorema fondamentale del calcolo.**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$**. Si può dimostrare che, se** f **è continua, allora esiste una primitiva** F **di** f**. Inoltre si ha**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

◁ ▷

• **Primitiva di una funzione.**

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** I **intervallo. Supponiamo che esista una funzione** $F : I \to \mathbb{R}$ **tale che** $F'(x) = f(x)$ **per ogni** $x \in I$**. Diremo allora che** F **è una primitiva di** f**.**

• **Il Teorema fondamentale del calcolo.**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$**. Si può dimostrare che, se** f **è continua, allora esiste una primitiva** F **di** f**. Inoltre si ha**

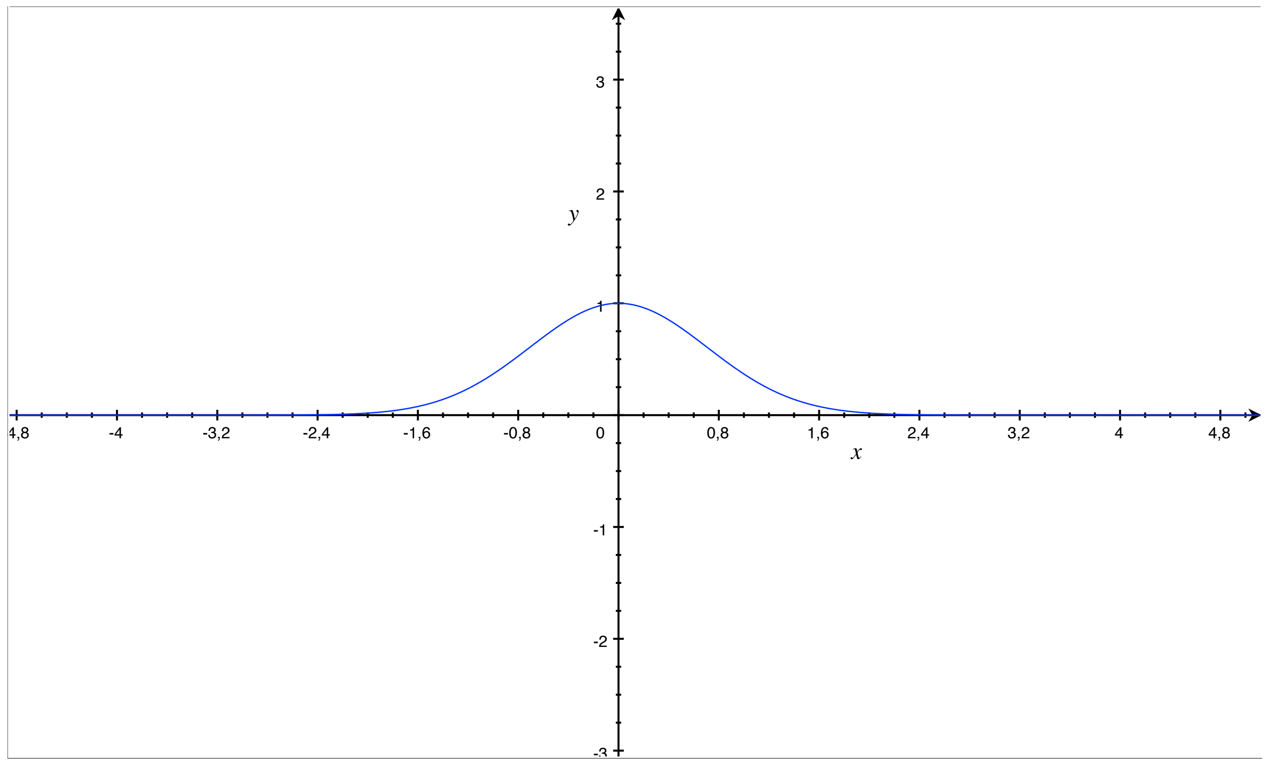
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ad esempio, ricordando che $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$**, si verifica facilmente che la funzione** $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ **è una primitiva della funzione** $f(x) = x^2$**, e quindi**

$$\int_0^2 x^2\,dx = F(2) - F(0) = \frac{8}{3}.$$

La definizione di integrale si può estendere anche a funzioni definite su intervalli illimitati. Ad esempio, particolarmente importante è l'integrale su $\mathbb{R}$ della funzione gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$



Riassumendo

Riassumendo

La matematica permette di creare dei modelli per rappresentare alcuni fenomeni della realtà. Lo strumento principale per questa rappresentazione è il concetto di funzione.

◁ ▷

Riassumendo

La matematica permette di creare dei modelli per rappresentare alcuni fenomeni della realtà. Lo strumento principale per questa rappresentazione è il concetto di funzione.

Una funzione è una relazione tra insiemi. Questa può essere rappresentata in tanti modi: grafici, tabelle, espressioni analitiche. Non si deve mai confondere la funzione con la sua rappresentazione. Sono funzioni anche le successioni, tra le quali abbiamo ricordato la progressione aritmetica, la progressione geometrica, la succesione di Fibonacci.

◁ ▷

Riassumendo

La matematica permette di creare dei modelli per rappresentare alcuni fenomeni della realtà. Lo strumento principale per questa rappresentazione è il concetto di funzione.

Una funzione è una relazione tra insiemi. Questa può essere rappresentata in tanti modi: grafici, tabelle, espressioni analitiche. Non si deve mai confondere la funzione con la sua rappresentazione. Sono funzioni anche le successioni, tra le quali abbiamo ricordato la progressione aritmetica, la progressione geometrica, la succesione di Fibonacci.

Vi sono alcune proprietà importanti delle funzioni tra insiemi (iniettività, suriettività, invertibilità).

Riassumendo

La matematica permette di creare dei modelli per rappresentare alcuni fenomeni della realtà. Lo strumento principale per questa rappresentazione è il concetto di funzione.

Una funzione è una relazione tra insiemi. Questa può essere rappresentata in tanti modi: grafici, tabelle, espressioni analitiche. Non si deve mai confondere la funzione con la sua rappresentazione. Sono funzioni anche le successioni, tra le quali abbiamo ricordato la progressione aritmetica, la progressione geometrica, la succesione di Fibonacci.

Vi sono alcune proprietà importanti delle funzioni tra insiemi (iniettività, suriettività, invertibilità).

Le funzioni che abbiamo analizzato nel corso in modo più dettagliato sono le funzioni reali di variabile reale.

Riassumendo

La matematica permette di creare dei modelli per rappresentare alcuni fenomeni della realtà. Lo strumento principale per questa rappresentazione è il concetto di funzione.

Una funzione è una relazione tra insiemi. Questa può essere rappresentata in tanti modi: grafici, tabelle, espressioni analitiche. Non si deve mai confondere la funzione con la sua rappresentazione. Sono funzioni anche le successioni, tra le quali abbiamo ricordato la progressione aritmetica, la progressione geometrica, la succesione di Fibonacci.

Vi sono alcune proprietà importanti delle funzioni tra insiemi (iniettività, suriettività, invertibilità).

Le funzioni che abbiamo analizzato nel corso in modo più dettagliato sono le funzioni reali di variabile reale.

Abbiamo studiato alcune proprietà generali delle funzioni reali di variabile reale: la limitatezza, le simmetrie, la monotonia, la periodicità.

◁ ▷

Le funzioni che utilizziamo sono combinazioni in vari modi (somma, prodotto, composizione) di alcune funzioni "mattoncini base".
Questi mattoncini sono le funzioni elementari: potenze e radici, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche.

**Le funzioni che utilizziamo sono combinazioni in vari modi (somma, prodotto, composizione) di alcune funzioni “mattoncini base”.
Questi mattoncini sono le funzioni elementari: potenze e radici, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche.**

Abbiamo visto come in alcuni casi si può studiare il grafico di una funzione ottenuta come composizione di funzioni più semplici.

Le funzioni che utilizziamo sono combinazioni in vari modi (somma, prodotto, composizione) di alcune funzioni "mattoncini base".
Questi mattoncini sono le funzioni elementari: potenze e radici, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche.

Abbiamo visto come in alcuni casi si può studiare il grafico di una funzione ottenuta come composizione di funzioni più semplici.

Abbiamo confrontato la crescita polinomiale con la crescita esponenziale. Abbiamo anche visto alcune applicazioni pratiche dei logaritmi e delle scale logaritmiche.

Le funzioni che utilizziamo sono combinazioni in vari modi (somma, prodotto, composizione) di alcune funzioni "mattoncini base".
Questi mattoncini sono le funzioni elementari: potenze e radici, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche.

Abbiamo visto come in alcuni casi si può studiare il grafico di una funzione ottenuta come composizione di funzioni più semplici.

Abbiamo confrontato la crescita polinomiale con la crescita esponenziale. Abbiamo anche visto alcune applicazioni pratiche dei logaritmi e delle scale logaritmiche.

Abbiamo introdotto le funzioni circolari seno, coseno, tangente, e abbiamo spiegato come molti fenomeni di tipo periodico possono essere "decomposti nelle loro armoniche", cioè rappresentati mediante somme infinite (serie di Fourier) delle funzioni seno e coseno.

Le funzioni che utilizziamo sono combinazioni in vari modi (somma, prodotto, composizione) di alcune funzioni "mattoncini base".
Questi mattoncini sono le funzioni elementari: potenze e radici, esponenziali e logaritmi, funzioni trigonometriche.

Abbiamo visto come in alcuni casi si può studiare il grafico di una funzione ottenuta come composizione di funzioni più semplici.

Abbiamo confrontato la crescita polinomiale con la crescita esponenziale. Abbiamo anche visto alcune applicazioni pratiche dei logaritmi e delle scale logaritmiche.

Abbiamo introdotto le funzioni circolari seno, coseno, tangente, e abbiamo spiegato come molti fenomeni di tipo periodico possono essere "decomposti nelle loro armoniche", cioè rappresentati mediante somme infinite (serie di Fourier) delle funzioni seno e coseno.

Abbiamo introdotto due nozioni fondamentali dell'analisi matematica: la derivata (che si può interpretare come pendenza del grafico della funzione) e l'integrale (interpretato come area del sottografico o come valore medio della funzione).

Buon Natale, buon lavoro e tantissimi auguri per il vostro futuro!