Lezione 13

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. <u>Due</u> vettori $v, w \in V$ sono proporzionali se $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha w$ oppure $w = \alpha v$.

Es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono proporzionali $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sono proporzionali $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Prop $v, w \in V$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ v e w sono proporzionali.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non entrambi nulli t.c. $\alpha v + \beta w = 0_V$

Se $\alpha \neq 0 \Rightarrow v = -\frac{\beta}{\alpha} w$; Se $\beta \neq 0 \Rightarrow w = -\frac{\alpha}{\beta} v$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha w \Rightarrow v - \alpha w = 0_V$

oppure $w = \alpha v \Rightarrow -\alpha v + w = 0_V$.

Questa proposizione è un caso particolare della successiva.

Prop I vettori $v_1, \dots, v_s \in V$ sono linearmente dipendenti $\Longleftrightarrow$ uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0_V$$

A meno di rinominare i v_i e gli α_i possiamo assumere

$\alpha_s \neq 0 \Rightarrow v_s = -\alpha_s^{-1} \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_s^{-1} \alpha_{s-1} v_{s-1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ A meno di rinominare i v_i possiamo assumere

$v_s = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1}$ per certi $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$$-\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{s-1} v_{s-1} + v_s = 0_V$$

Comb. lin. nulla non banale $\Rightarrow v_1, \dots, v_s$ lin. dip.

Def Un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è <u>finitamente generato</u> se $\exists\, v_1, \dots, v_s \in V$ t.c. $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s)$ cioè $\forall\, v \in V$ $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s$.

Teorema della base Se $V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_s)$ allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_s\}$ contiene una base di V.

Dim Se $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti allora formano una base di V. Altrimenti uno di loro è comb. lin. degli altri e a meno di rinominarli possiamo assumere che sia v_s:

$$v_s = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1}$$

per certi $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1} \in \mathbb{K}$.

Dimostriamo che $V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_{s-1})$

$\forall\, v \in V$ $\exists\, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{s-1} v_{s-1} + \beta_s v_s$$
$$= (\beta_1 + \beta_s \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_{s-1} + \beta_s \alpha_{s-1}) v_{s-1} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{s-1})$$

$\Rightarrow V \subset \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{s-1})$. L'inclusione $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{s-1}) \subset V$ è evidente, quindi si ha uguaglianza.

Se ora $v_1, \dots, v_{s-1}$ sono lin. indip. allora sono base altrimenti ripetiamo il procedimento.

Ad ogni passo il numero di generatori diminuisce di 1 e quindi in un numero finito di passi si ottiene una base di V oppure $\emptyset$ che è base dello spazio nullo (per definizione).

OSS La dimostrazione fornisce un metodo per trovare una base a partire dai generatori:

1) si controlla che i generatori siano lin. indip. Se sì allora formano base. Se no vai al passo 2.
2) si trova comb. lin. nulla non banale e si elimina un vettore con coefficiente $\neq 0$. Si ricomincia dal passo 1.

In particolare si ottiene una base $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \{v_1, \dots, v_s\}$ e quindi $n \leq s$. Più avanti vedremo altri due metodi.

Corollario Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora V ammette almeno una base.

OSS Se tra i vettori $v_1, \dots, v_s \in V$ c'è il vettore nullo $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_s$ lin. dipendenti: se $v_i = 0_V$, $0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_s = 0_V$ è una combinazione lin. nulla non banale.
Il vettore nullo può essere sempre eliminato dai generatori.

Es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$

$x v_1 + y v_2 + z v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Si ha una soluz. non nulla $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

$-2v_1 - v_2 + v_3 = 0$ possiamo eliminare v_1 (o v_2 o v_3)

$\mathcal{B} = (v_2, v_3)$ è base di V dato che non sono proporzionali.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato e siano $b_1, \dots, b_n \in V$. Le seguenti sono equivalenti:

i) $b_1, \dots, b_n$ formano una base di V.

ii) $\forall v \in V \ \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

OSS Il teorema dice che $b_1, \dots, b_n \in V$ formano una base di V $\iff$ ogni vettore di V è combinazione lineare unica di $b_1, \dots, b_n$.

Dim $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ $\forall v \in V \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

generano

Supponiamo che $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ siano scalari arbitrari t.c.

$v = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n \Rightarrow \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

$\Rightarrow (\gamma_1 - \alpha_1) b_1 + \dots + (\gamma_n - \alpha_n) b_n = 0_V \Rightarrow$

lin. indip.

$$\begin{cases} \gamma_1 - \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \gamma_n - \alpha_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1 \\ \dots \\ \gamma_n = \alpha_n \end{cases}$$

e quindi si ha l'unicità.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ $b_1, \dots, b_n$ generano V

$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = 0_V$ è soddisfatta per $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$

L'unicità garantisce che non esistono altre comb. lin. nulle di $b_1, \dots, b_n \Rightarrow b_1, \dots, b_n$ lin. indip. e quindi formano una base di V.

Def Sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base di V e sia

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in V$$

Gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono detti <u>coordinate</u> o <u>componenti</u> di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ ~~ns~~ vettore delle coordinate $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Per indicare che $v \in V$ ha coordinate $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ di V scriviamo

$$v = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

NB Non confondere v vettore di V con $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$ vettore di $\mathbb{K}^n$.

NB Su uno spazio vettoriale qualsiasi non ha senso parlare di coordinate di vettori se non è stata <u>scelta una base</u> (in generale esistono molte basi). Basi diverse determinano in generale coordinate diverse per lo stesso vettore. Soltanto il vettore nullo ha tutte le coordinate nulle rispetto a qualunque base.

Es $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ ha coordinate $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ con $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

Mostriamo che $b_1 = (1,1)$, $b_2 = (1,2)$ formano un'altra base di $\mathbb{R}^2$; $\forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$x b_1 + y b_2 = (u, v)$$

$$\begin{cases} x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & u \\ 1 & 2 & v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & u \\ 0 & 1 & v-u \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = u \\ \phantom{x+{}} y = v - u \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2u - v \\ y = v - u \end{cases}$$ unica soluzione.

Quindi $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ base per la (ii) del teorema.

Le coordinate di b_2 rispetto alla base (b_1, b_2) sono $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$