

8 novembre pomeriggio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$\forall b > 1$$

$$[b] \leq b < [b] + 1$$

$$0 < \frac{b^n}{n!} = \overbrace{\frac{b}{1} \frac{b}{2} \frac{b}{3} \dots \frac{b}{n-1}}^n \frac{b}{n} =$$

$$= \left(\frac{b}{1} \dots \frac{b}{[b]} \right) \left(\frac{b}{[b]+1} \dots \frac{b}{n-1} \right) \frac{b}{n}$$

$$< \frac{b^{[b]}}{[b]!} \frac{b}{n}$$

Per $n > [b] + 1$,

$$0 < \frac{b^n}{n!} < \frac{b^{[b]}}{[b]!} \frac{b}{n}$$

$\downarrow$
 0

$\downarrow$ $n \rightarrow +\infty$
 0

Per i Corollari.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

Esercizio Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$, e se
 $x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$ e $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$

Verificare che sono equivalenti

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste

2) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ esistono e sono uguali

Inoltre, se 1) e 2) sono vere,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Teor 1) Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ^(decrecente) crescente e sia $x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$.

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in X \text{ e } x > x_0 \}$
^{(sup $\{ f(x) : x \in X \text{ e } x > x_0 \}$)}

2) Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$.

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in X \text{ e } x < x_0 \}$
^(inf)

Ricordare che per $\sup X = +\infty$ ed f crescente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in X \} = \sup f(X)$$

$[x]$ E' crescente?

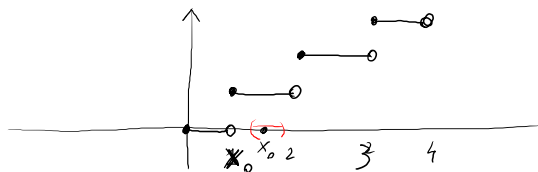
$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Se mento $x < y$ devo avere $[x] \leq [y]$. Altrimenti

ci sarebbe un caso con $[y] < [x] \Rightarrow [y] + 1 \leq [x]$

$$y < [y] + 1 \leq [x] \leq x \Rightarrow y < x < y \Rightarrow y < y$$

assurdo.



Se $x_0 \notin \mathbb{Z}$ $[x_0] < x_0 < [x_0] + 1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x] = \lim_{x \rightarrow x_0} [x] \Big|_{([x_0], [x_0]+1)} = \lim_{x \rightarrow x_0} [x_0] = [x_0]$$

Se $x_0 \in \mathbb{Z}$ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} [x] = \lim_{x \rightarrow x_0} [x] \Big|_{(x_0-1, x_0)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x_0 - 1) = x_0 - 1 = [x_0^-] \text{ se } x_0 \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} [x] = \lim_{x \rightarrow x_0} [x] \Big|_{(x_0, x_0+1)} = \lim_{x \rightarrow x_0} x_0 = x_0 = [x_0^+] \text{ se } x_0 \in \mathbb{Z}$$

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Verifichiamo che per $b > 1$, la funzione b^x è continua in $\mathbb{R}$.

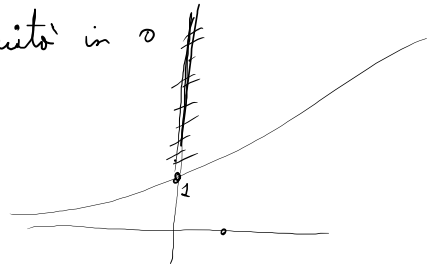
$$(b^0 = 1, \quad x < y \Rightarrow b^x < b^y, \\ b^{x+y} = b^x b^y \quad \text{e} \quad (b^x)^y = b^{xy})$$

Iniziamo dimostrando la continuità in 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = 1$$

Siccome b^x è crescente

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = \inf \{ b^x : x > 0 \} \\ &\leq \inf \{ b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$



per $x > 0$
 $b^x > b^0 = 1$

$\{ b^{\frac{1}{n}} \}$ è decrescente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = 1 = b^0$$

Ora dimostriamo $\lim_{x \rightarrow 0^-} b^x = 1$

$$y = -x \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} b^x = \lim_{y \rightarrow 0^+} b^{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{b^y} = 1$$

Concludiamo $\lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1 = b^0$ cioè b^x è continua in 0.

Ora verifichiamo $\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = b^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} b^x = \lim_{h \rightarrow 0} b^{h+x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{b^{x_0}}_{b^{x_0}} \underbrace{b^h}_{1} = b^{x_0}$$

$$x = h + x_0$$

