Lezione 12 — Compattificazione di Alexandroff

Def Uno spazio X è <u>localmente compatto</u> se $\forall x \in X \ \exists U \subset X$ intorno compatto di x in X.

Oss Compatto $\Rightarrow$ loc. compatto ($\not\Leftarrow$)

Es 1) $\mathbb{R}^n$ loc. compatto: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\overline{B}(x;1)$ intorno compatto di x, dove $\overline{B}(x;r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \leq r\}$ boccia chiusa

2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ non è loc. compatto.

Oss Localmente compatto è una proprietà topologica non ereditaria

Prop Supponiamo che X sia uno spazio compatto di Hausdorff. Allora $\forall x \in X \ \exists \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x.

Dim $\mathcal{J}_x := \{Cl_X U \mid x \in U \subset X \text{ aperto}\}$ famiglia di int. cpt. di x

$\forall W \subset X$ intorno aperto di $x \Rightarrow Y := X - W$ compatto

$\forall y \in Y \ \exists U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $U_y \cap V_y = \emptyset$,

$x \in U_y$, $y \in V_y \Rightarrow \{V_y \cap Y\}_{y \in Y}$ ricoprimento aperto di Y

$\rightsquigarrow \{V_{y_1}, \dots, V_{y_k}\}$ sottoricoprimento finito $\rightsquigarrow$

$U := \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$ intorno aperto di x in X

$V := \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$ intorno aperto di Y in $X \Rightarrow$

$U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \subset X - V$ e $X - V$ chiuso $\Rightarrow$

$Cl_X U \subset X - V \subset W$ e $Cl_X U \in \mathcal{J}_x$.

Quindi $\mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x.

Oss Stesso ragionamento $\rightsquigarrow$ cpt $T_2 \Rightarrow T_3$ e T_4

Corollario Sia X localmente compatto e di Hausdorff. Allora $\forall x \in X \ \exists \ \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in X.

Dim $U \subset X$ intorno compatto di x e U di Hausdorff $\Rightarrow \exists \ \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in $U \Rightarrow$ $\mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in X.

Teorema di Alexandroff

Sia X uno spazio di Hausdorff loc. compatto e non compatto. Allora esiste uno spazio di Hausdorff compatto $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ ottenuto da X aggiungendo un singolo punto $\infty \notin X$ t.c. $X \subset \hat{X}$ sia sottospazio aperto. Un tale $\hat{X}$ è unico a meno di omeo.

Def $\hat{X}$ è detto compattificazione di Alexandroff (o con un punto) di X. Il punto $\infty \in \hat{X}$ è detto punto all'infinito.

Dim Poniamo $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ dove $\infty \notin X$. Definiamo una topologia su $\hat{X}$:

$$U \subset \hat{X} \text{ aperto} \iff \left| \begin{array}{l} \text{(a) } U \subset X \text{ aperto in } X \\ \quad \text{oppure} \\ \text{(b) } \infty \in U \text{ e } X - U \text{ compatto in } X. \end{array} \right.$$

Mostriamo che è una topologia

i) $\emptyset \subset X$ aperto di tipo (a).

ii) $\hat{X}$ aperto di tipo (b): $X - \hat{X} = \emptyset$ compatto

iii) $U_i \subset \hat{X}$ aperto $\forall\, i \in I$ $\rightsquigarrow$

$$A = \{ i \in I \mid U_i \text{ di tipo (a)} \}$$
$$B = \{ i \in I \mid U_i \text{ di tipo (b)} \}$$

$U := \bigcup_{i \in A} U_i \subset X$ aperto di tipo (a)

$\infty \in V := \bigcup_{i \in B} U_i$ e $X - V = \bigcap_{i \in B} (X - U_i)$ chiuso perché

intersezione di chiusi (X è T_2 e $X - U_i \subset X$ cpt $\forall\, i \in B$)

$X - V \subset X - U_i \implies X - V$ compatto $\implies V$ aperto di tipo (b).

$\bigcup_{i \in I} U_i = U \cup V$ è di tipo:

(a) se $V = \emptyset$

(b) se $U = \emptyset$

(b) se $U, V \neq \emptyset$ infatti:

$X - (U \cup V) = (X - U) \cap (X - V) \subset X - V$ chiuso

$\implies X - (U \cup V)$ compatto $\implies U \cup V$ aperto di tipo (b).

iv) $U, V \subset \hat{X}$ aperti

- U, V entrambi di tipo (a) $\implies U \cap V \subset X$ aperto
  $\implies U \cap V$ aperto di tipo (a)
- U entrambi di tipo (b) $\implies$
  $X - (U \cap V) = (X - U) \cup (X - V)$ compatto $\implies$
  $U \cap V$ aperto di tipo (b)
- U di tipo (a), V di tipo (b) $\implies \infty \notin U \cap V$
  $K = X - V \subset X$ compatto quindi chiuso in X
  $\implies V \cap X = X - K$ aperto in $X \implies$
  $U \cap V = U \cap (V \cap X) \subset X$ aperto di tipo (a).

Quindi $\hat{X}$ è uno spazio topologico

$\underline{X \subset \hat{X} \text{ sottospazio aperto}}$:

$$U \subset X \text{ aperto} \Leftrightarrow \exists\, V \subset \hat{X} \text{ aperto t.c. } U = V \cap X$$

$U \subset \hat{X}$ aperto di tipo (a) $\Leftrightarrow$ $U \subset X$ aperto

$\forall\, V \subset \hat{X}$ aperto di tipo (b) $\Rightarrow$ $K := X - V \subset X$ compatto

$\underset{X\, T_2}{\Longrightarrow}$ K chiuso in X $\Rightarrow$ $U = V \cap X = X - K$ aperto in X

$\underline{\hat{X} \text{ è di Hausdorff}}$:

$\forall\, x, y \in \hat{X}$ consideriamo due casi

i) $x, y \in X \underset{X\, T_2}{\Longrightarrow} \exists\, U, V \subset X$ aperto in X t.c.

$U \cap V = \phi$, $x \in U$, $y \in V$. $U, V \subset \hat{X}$ aperti di tipo (a)

ii) $x \in X$, $y = \infty$ $\underset{X \text{ loc cpt}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, K \subset X$ intorno compatto di x

$\rightsquigarrow$ $U = \mathrm{Int}_X K \subset K$, $V = \hat{X} - K$ $\Rightarrow$ $U \cap V = \phi$

$x \in U$ aperto in X $\Rightarrow$ U aperto di tipo (a) in $\hat{X}$

$X - V = K$ $\Rightarrow$ V aperto di tipo (b) in $\hat{X}$ e $\infty \in V$.

$\underline{\hat{X} \text{ è compatto}}$: $\forall\, \mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di $\hat{X}$

$\exists\, i_\infty \in I$ t.c. $\infty \in U_{i_\infty}$ $\rightsquigarrow$ $K := X - U_{i_\infty}$ compatto

$V_i = U_i \cap K$ aperto in K $\forall\, i \in I$ $\rightsquigarrow$

$\{V_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di K $\rightsquigarrow$ $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_s}\}$ sottoric. per K

$\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{s} U_{i_s}$ $\Rightarrow$ $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_s}, U_{i_\infty}\}$ sottoric. di $\mathcal{U}$ per $\hat{X}$.

Unicità $\hat{X}' = X \cup \{\infty'\}$ compatto di Hausdorff t.c.

$X \subset \hat{X}'$ sottospazio aperto $\rightsquigarrow$

$$\varphi : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}' \qquad \text{biiettiva}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X \\ \infty' & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

$\forall \; V \subset \hat{X}'$ aperto

i) $\infty' \notin V \implies V \subset X$ aperto in $X \subset \hat{X}'$

$\implies \varphi^{-1}(V) = V$ aperto in X

ii) $\infty' \in V \rightsquigarrow K = \hat{X}' - V$ chiuso in $\hat{X}' \implies K$ compatto

$\implies \varphi^{-1}(V) = \hat{X} - K$ aperto di tipo (b) in $\hat{X}$

$\implies \varphi$ continua e biiettiva, $\hat{X}$ compatto, $\hat{X}'$ $T_2 \implies \varphi$ omeo.

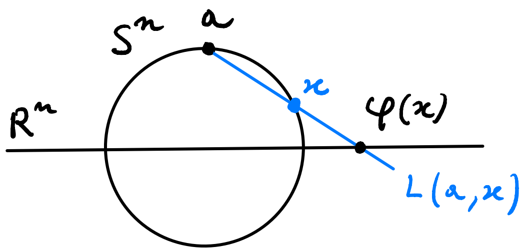
Corollario X come nel teorema, $X \cong Y \implies \hat{X} \cong \hat{Y}$.

Proiezione stereografica $a = (0, \dots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\varphi : S^n - \{a\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(x) = L(a, x) \cap \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \cong \{x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$



Equazione parametrica

$$L(a,x) : \; z = a + t(x-a) \qquad z_{n+1} = 0 \implies t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{1-x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n) \\ \varphi^{-1}(y) &= \left(\frac{2}{\|y\|^2 + 1} y, \; \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \end{aligned}\right\} \implies \varphi \text{ omeo}$$

$$\mathbb{R}^n \cong S^n - \{a\} \implies \hat{\mathbb{R}}^n \cong \widehat{S^n - \{a\}} = S^n, \quad a = \infty.$$