9 Novembre

Definizione (Sottosuccessione) Dato un insieme X ed una successione di elementi di X, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ottiene una sua sottosuccessione considerando una successione strettamente crescente $\mathbb{N}\ni k \to n_k \in \mathbb{N}$ ($k_1 < k_2 \Rightarrow n_{k_1} < n_{k_2}$) e poi considerando $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$

Esempi 1) Data $\{x_n\}$, $\{x_{2n}\}$ e $\{x_{2n+1}\}$ sono sottosuccessioni

2) Partendo da $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$

$\{(-1)^{2n}\} = \{1\}$ è una sottosuccessione

$\{(-1)^{2n+1}\} = \{-1\}$ è una sottosuccessione

Esercizio Dimostrare che per ogni successione strettamente crescente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ ho $n_k \geq k$.

Def Una successione $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli chiusi si dice di intervalli dimezzati se $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ $\forall n \geq 2$

ed inoltre $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ $\forall\ n \geq 2$

Es $\left\{ \left[0, \frac{1}{2^n}\right] \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2^n}\right] = \{0\}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$\forall n \geq 2$ $\quad \left[0, \frac{1}{2^n}\right] = \left\{ x : 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n} \right\} \subseteq \left\{ x : 0 \leq x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \right\} = \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$

ed inoltre $\text{lunghezza}\left(\left[0, \frac{1}{2^n}\right]\right) = \left| \left[0, \frac{1}{2^n}\right] \right| = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \left| \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \right|$

$2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$

Lemma Data una successione $\{[a_n, b_n]\}$ di intervalli dimezzati esiste ed è univoco un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\{\bar{x}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$$ ($\Longleftrightarrow$ $\bar{x}$ è l'unico numero reale contenuto in tutti gli $[a_n, b_n]$)

ed inoltre $\bar{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$

Dim Per prima cosa consideriamo le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ $\quad \forall n \geq 2$

$\Longrightarrow a_{n-1} \leq a_n \ \forall n$ e $b_{n-1} \geq b_n \ \forall n$, $a_n \leq b_m \ \forall n, m$.

Cioè $\{a_n\}$ è crescente e $\{b_n\}$ è decrescente

Esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n =: \bar{x}$

Notiamo che $\boxed{a_n \leq b_m}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Verifichiamolo

Se $n = m$ $\quad a_n < b_m$ perchè $[a_n, b_n]$ è un intervallo non banale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $n < m$

$$a_n \leq a_m < b_m \Longrightarrow a_n < b_m \quad \forall n < m.$$

Se $n > m$ $\quad a_n < b_n \leq b_m \Longrightarrow a_n < b_m \quad \forall n > m$

Siccome $a_n < b_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bar{x} \leq b_m \ \forall m \in \mathbb{N}$

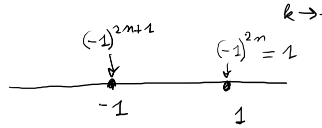
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} [a_n + (b_n - a_n)] = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a_n}_{\bar{x}} + \underbrace{\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n)}_{0} = \bar{x}$$

Lo vediamo

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Teorema (Bolzano Weierstrass) Sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora esistono una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ ed un punto $\bar{x} \in [a,b]$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

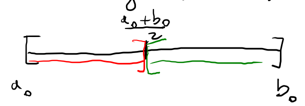
Es $\{(-1)^n\}$



Dim Si definirà in modo opportuno una successione di intervalli dimezzati $\{[a_n,b_n]\}_{n=0}^{+\infty}$

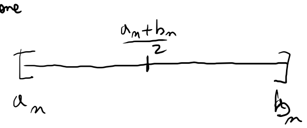
$[a_0,b_0] = [a,b]$.

$[a_1,b_1]$ viene ottenuto tagliando a metà l'intervallo iniziale



e scegliamo come $[a_1,b_1]$ una delle due metà che contenga infiniti elementi della successione.

Per induzione, avendo definito $[a_n,b_n]$ che contiene infiniti elementi della successione



$[a_{n+1},b_{n+1}]$ viene scelto come una delle due metà di $[a_n,b_n]$ che contenga infiniti elementi della successione.

Resta definita una successione di intervalli dimezzati $\{[a_k,b_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ ognuno dei quali contiene infiniti elementi della successione $\{x_n\}$. Ora voglio definire una sotto-successione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{n_k} \in [a_k,b_k]$

scegliamo $x_{n_0} \in [a_0,b_0] = [a,b]$

Supponiamo di avere

$x_{n_0} \in [a_0,b_0], \dots, x_{n_k} \in [a_k,b_k]$ con $n_0 < \dots < n_k$

Verifico che esiste $x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1},b_{k+1}]$ con $n_{k+1} > n_k$

Infatti, siccome $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contiene infiniti elementi della successione, esiste necessariamente $n > n_k$ con $x_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$

e scelgo $n_{k+1} = n$

Resta così definita, per induzione, una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ con $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ $\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

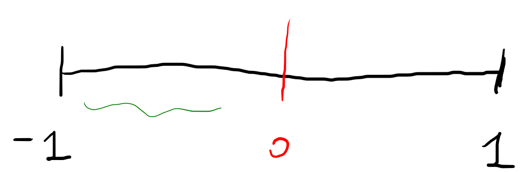
$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \qquad \forall\, k$$

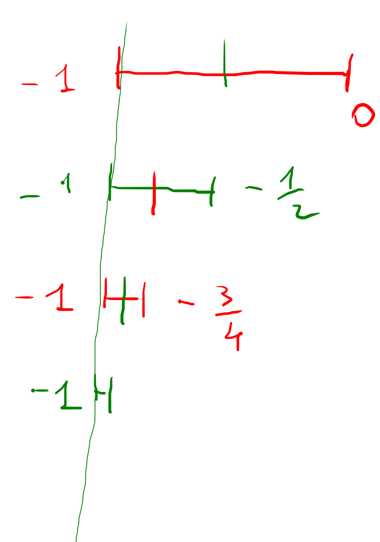
So che $\exists\, \bar{x} \in [a,b]$

$$\begin{array}{ccc} a_k & & b_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{x} & & \bar{x} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$$

Es $\{(-1)^n\}$





Esercizio Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora esistono $L \in \overline{\mathbb{R}}$ ed una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ t.c.

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = L.$$

Def Dato $f : X \to \mathbb{R}$ X un insieme qualsiasi, un punto $x_0 \in X$ si dice punto di massimo (assoluto) (minimo)

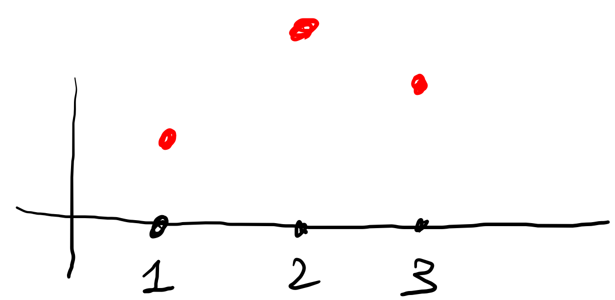
se $$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in X$$

$$\left(f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in X \right)$$

Teorema (Weierstrass) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ compatto e sia $f \in C^0(X)$. Allora f ammette in X un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto. (Nella dimostrazione considereremo $X = [a,b]$)

Esempio $X = \{1, 2, 3\}$

$f : X \to \mathbb{R}$

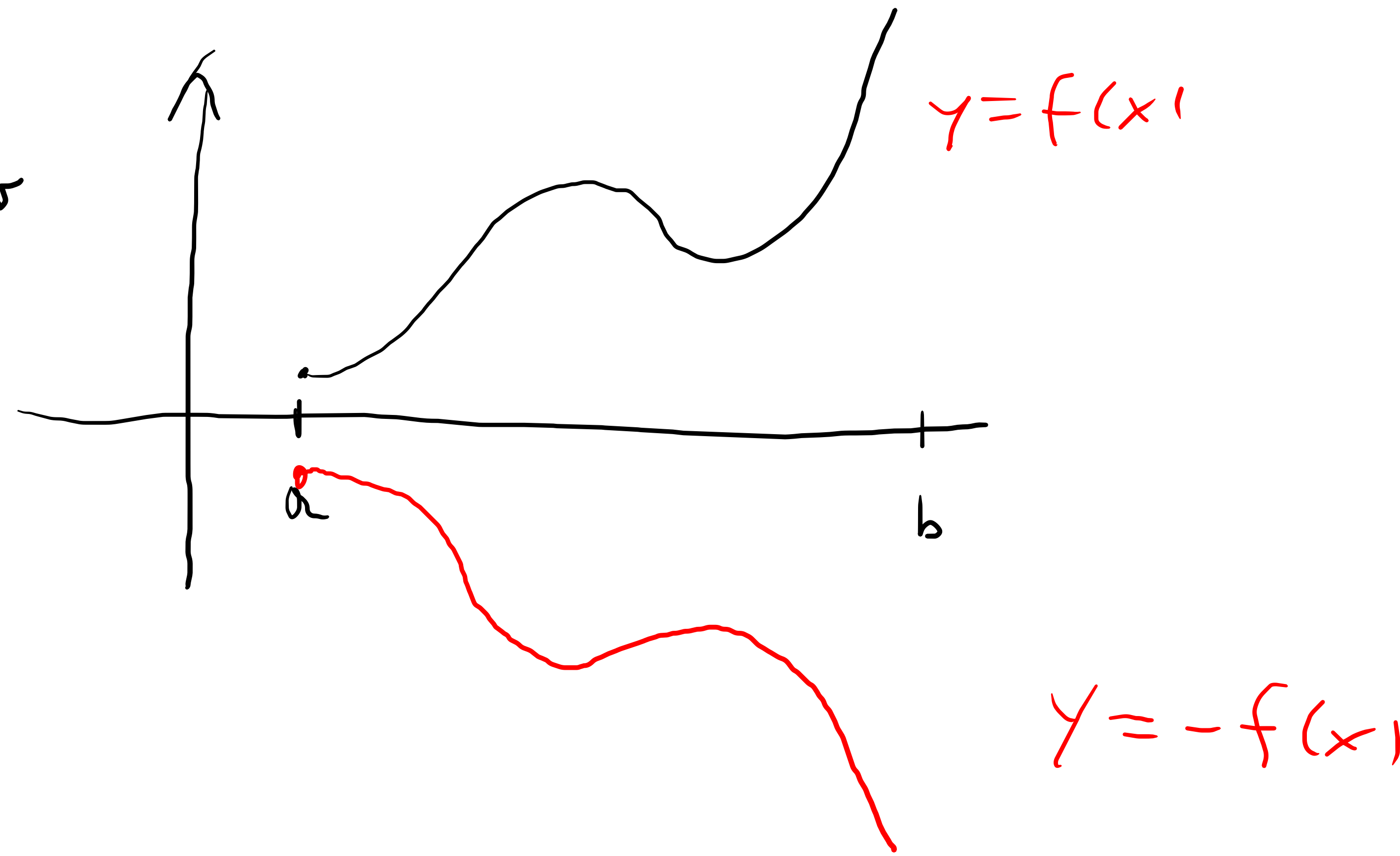


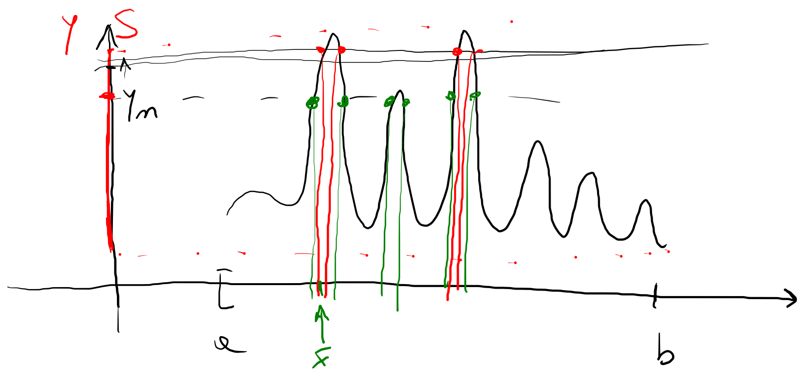
Qui 1 è il punto di minimo

2 max

Dim È sufficiente dimostrare l'esistenza di un punto di massimo x_M,

perché ~~un~~ un punto di minimo di f è anche punto di massimo di −f.





Consideriamo $f \in C^0([a,b])$.

Consideriamo $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$

$S = \sup f([a,b])$. Se $S \in f([a,b])$

allora $\exists\, x_M \in [a,b]$ t.c. $f(x_M) = S$ ed abbiamo finito.

Supponiamo di non sapere se $S \in f([a,b])$. Nel caso $S \notin f([a,b])$

$\exists$ una successione $\{y_n\}$ in $f([a,b])$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} y_n = S$

Per ogni n so che $\exists\, x_n \in [a,b]$ t.c. $f(x_n) = y_n$

Resta definita una successione $\{x_n\}$ in $[a,b]$.

Per B-W so che $\exists$ $\{x_{n_k}\}$ ed un $\bar{x} \in [a,b]$

t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = S = \sup f([a,b]) \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = S$$

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x} \text{ e } f \in C^0([a,b]) \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

$f(\bar{x}) = S = \sup f([a,b])$

$\Rightarrow \bar{x}$ è un punto di massimo.