β - FUNCTION e BACKGROUND FIELD METHOD

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{campo di gauge}}}{\mathcal{A}_\mu} = \overset{\swarrow \text{BKG FIELD}}{A_\mu} + \underset{\nwarrow \text{fluttuazioni}}{a_\mu} \qquad D_\mu = \partial_\mu + i \overset{\swarrow \text{BKG}}{A_\mu}$$

(quello che prima indicavamo con $\mathcal{A}_\mu$)

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \qquad a_\mu = a_\mu^a T^a$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + i[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \\
&= \overset{\swarrow \text{BKG}}{F_{\mu\nu}} + \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + i[A_\mu, a_\nu] + \underbrace{i[a_\mu, A_\nu]}_{= -i[A_\nu, a_\mu]} + i[a_\mu, a_\nu] \\
&= F_{\mu\nu} + D_\mu a_\nu - D_\nu a_\mu + i[a_\mu, a_\nu]
\end{aligned}$$

Utilizzeremo il P.I. in formulazione EUCLIDEA $\int \mathcal{D}\varphi \, e^{-S[\varphi]}$

$$\begin{aligned}
S_{YM} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \, \mathrm{tr}\Big[& \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F^{\mu\nu} D_\mu a_\nu + \underbrace{D^\mu a^\nu D_\mu a_\nu - D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu + i F^{\mu\nu}[a_\mu, a_\nu]}_{\text{quadratici in } a_\mu} \\
& + 2i D^\mu a^\nu [a_\mu, a_\nu] - \frac{1}{2}[a^\mu, a^\nu][a_\mu, a_\nu] \Big]
\end{aligned}$$

Trasf. di gauge: $\delta \mathcal{A}_\mu = \mathcal{D}_\mu \alpha \qquad \mathcal{D}_\mu = D_\mu + i a_\mu = \partial_\mu + i \mathcal{A}_\mu$

c'è un'ambiguità nel dire come trasf. tra A e a; scegliamo

$$\delta A_\mu = 0 \qquad \delta a_\mu = D_\mu \alpha + i[a_\mu, \alpha]$$

GAUGE FIXING : $G(A,a) = D^\mu a_\mu$ ← dipende dalla scelta di campo di Bkg A_μ

Seguendo la procedura di FADDEEV–POPOV, otteniamo un termine di gauge-fixing nell'azione:

$G^a G^a$

$$S_{g.f.} = \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[D^\mu a_\mu\right]^2$$

scelta di ξ fatta per comodità (semplificherà l'azione finale)

In S_{YM} c'è un termine

$$-\frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu\right] = \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[a_\nu D^\mu D^\nu a_\mu\right] =$$

integriamo per parti

$$\partial^\mu \mathrm{tr}\left[a^\nu D_\nu a_\mu\right] = D^\mu \mathrm{tr}\left[a^\nu D_\nu a_\mu\right] = \mathrm{tr}\left[D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu\right] + \mathrm{tr}\left[a^\nu D^\mu D_\nu a_\mu\right]$$

$$= \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[a_\nu\left(\underbrace{[D^\mu, D^\nu]}_{iF^{\mu\nu a} t^a_{Adj}} + D^\nu D^\mu\right)a_\mu\right] =$$

$$= \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[i a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]\right] \underbrace{- \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[(D^\mu a_\mu)^2\right]}_{\text{questo viene cancellato da } S_{g.f.}}$$

$$S_{YM} + S_{g.f.} = \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\Big[\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F^{\mu\nu}D_\mu a_\nu + D^\mu a^\nu D_\mu a_\nu$$

$$+ 2i\, a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]^{(*)} + 2i\, D^\mu a^\nu [a_\mu, a_\nu] - \frac{1}{2}[a^\mu, a^\nu][a^\mu, a^\nu]\Big]$$

due termini quadratici in a_μ

$(*) \; -2i\, a_\mu [F^{\mu\nu}, a_\nu]$

(*) $\mathrm{tr}\left(F^{\mu\nu}[a_\mu, a_\nu]\right) =$

$$= \mathrm{tr}\left(F^{\mu\nu} a_\mu a_\nu - F^{\mu\nu} a_\nu a_\mu\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(a_\nu F^{\mu\nu} a_\mu - a_\nu a_\mu F^{\mu\nu}\right)$$

usiamo ciclicità della traccia

$$= \mathrm{tr}\left(a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]\right)$$

$G(A, a) = D^\mu a_\mu$

Nell'integrale sui cammini in FP abbiamo utilizzato

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha\, \delta\left(G(A^\alpha, a^\alpha)\right) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha, a^\alpha)}{\delta\alpha}\right)$$

dove $A^\alpha_\mu = A_\mu \qquad a^\alpha_\mu = a_\mu + D_\mu \alpha + i[a_\mu, \alpha]$

il det di FP sarà riscritto come

$$\det\left(\frac{\delta G(A^\alpha, a^\alpha)}{\delta\alpha}\right) = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\; e^{-\frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[-\bar{c}D^2 c - i\bar{c}D^\mu[a_\mu, c]\right]}$$

scegliamo qto fattore per convenienza

termine quadratico in $c, \bar{c}, a$

Proseguendo con FP, l'integrale su $\mathcal{D}\alpha$ disaccoppia e rimaniamo con l'integrale sui cammini di e^{-S}, dove

$$S = S_{YM} + S_{g.f.} + S_{gh}$$

S è invariante sotto $A_\mu \mapsto U^{-1}A_\mu U - \partial_\mu U U^{-1} \qquad a_\mu \mapsto U^{-1}a_\mu U$ (A)

Integriamo su $a_\mu, c, \bar{c}$

$$e^{-S_{eff.}[A]} \equiv \int \underbrace{\mathcal{D}a\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}}_{\substack{\text{invariante} \\ \text{sotto traf. } (\star)}} \; e^{-S[A,a,c,\bar{c}]}$$

Anche $S_{eff}[A]$ è INVARIANTE sotto $(\star)$ (trasf. di gauge del campo di bkg. A_μ)

($G(A,a)=0$ è inv. sotto trasf. $(\star)$)

Scegliamo come campo di bkg A_μ una soluzione delle eq. del moto classiche ($D_\mu F^{\mu\nu}=0$) $\Rightarrow$ termini lineari in S_{YM} scompaiono (in espansione di $S_{YM}[A]$ attorno A_μ)

Vogliamo calcolarci $S_{eff.}[A]$; dobbiamo quindi fare il P.I. e lo calcoliamo fermandoci a 1-LOOP $\Rightarrow$ possiamo ignorare termini che NON siano quadratici

$\downarrow$

il P.I. diventa Gaussiano

vertice interazione forzerebbe ad avere diagrammi almeno 2-loop.

Motivo per cui calcoliamo $S_{eff}[A]$: cerchiamo quantità che diverge con definizione naïve (bare) della costante di accoppiamento.

Per "curare" gli infiniti dobbiamo ridefinire la cost. di accoppiamento : $g_B = g_r(1+\dots)$

$\rightarrow$ da questa relazione ci calcoliamo la funzione β.

$$e^{-S_{eff}[A]} = e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \left(\det \Delta_{gauge}\right)^{-1/2} \left(\det \Delta_{gh}\right)$$

$$\Delta^{\mu\nu}_{gauge} = -D^2 \delta^{\mu\nu} - 2i\,[F^{\mu\nu}, \cdot\,] \qquad \Delta_{gh} = -D^2$$

matrice che agisce su indice ν

$$\left(\det \Delta = e^{\log \det \Delta} = e^{\mathrm{tr} \log \Delta} \qquad \log \det \Delta = \mathrm{tr} \log \Delta \right)$$

$$S_{eff}[A] = \frac{1}{2g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr} \log \Delta_{gauge} - \mathrm{Tr}\log \Delta_{gh}$$

traccia su group indices, lorentz indices, sp. funz.

S_{eff} ha termini che divergono a 1-loop. Per cancellare ciò bisogna RINORMALIZZARE la cost. di accoppiamento

$$S_{eff} = \underbrace{S_{YM}(A)}_{\frac{1}{g_B^2}(\dots) = \frac{1}{g_r^2}(\dots) - \cancel{\text{div.}}} + \underbrace{\text{1-loop}}_{\cancel{\text{div.}} + \dots}$$

↳ questo darà la relazione tra g_B e g_r (che poi ci permette di calcolare β)

S_{eff} è inv. sotto trasf. di gauge di A → questa è simmetria che vale per $S_{YM}(A)$ e deve valere anche per i termini divergenti ⇒ termini divergenti saranno del tipo

$$\frac{1}{\underbrace{2-\omega}_{\text{QUADRATICO}}} \left(\dots \right)$$

funzionale in A invariante sotto trasf. di gauge di A

⇓ cioè $(\dots) \propto S_{YM}(A)$

Δ_{gh}

$$\Delta_{gh} = -D^2 = -\partial^2 + \Delta_1 + \Delta_2$$

$$\Delta_2 \longrightarrow [A^\mu, [A_\mu, \cdot\,]] = A^{\mu a} A^b_\mu \cdot T^a_{Adj} \cdot T^b_{Adj}$$

$$\Delta_1 = -i\,\partial^\mu A_\mu - i A_\mu \partial^\mu = -i\,\{\partial^\mu, A_\mu\} = -i\{\partial^\mu, A^a_\mu\}\,T^a_{Adj}$$

$$\mathrm{Tr}\log\Delta_{gh} = \mathrm{Tr}\log\big(\underbrace{-\partial^2 + \Delta_1 + \Delta_2}_{(-\partial^2)(1+(-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2))}\big) = \mathrm{Tr}\log(-\partial^2) + \mathrm{Tr}\log\big(1+(-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2)\big)$$

$$= \mathrm{Tr}\log(-\partial^2) + \mathrm{Tr}\big[(-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2)\big] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big[\big((-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2)\big)^2\Big] + \dots$$

termine cost che trascuriamo

lineare in A_μ e $\mathrm{tr}\, t^a = 0$

termini che contengono potenze di A^μ superiori a 2 (Infatti vengono cancellati dalla parte cubica e quartica di S_{YM})

$|x\rangle$ $\quad |k\rangle$

$f(x) = \langle x | f \rangle \rightsquigarrow \quad \Delta \cdot f(x) \equiv \langle x | \Delta | f \rangle$

$\int d^d x\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1} \qquad \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} |k\rangle\langle k| = \mathbb{1}$

$\langle x | k \rangle = e^{ikx}$

$\rightsquigarrow$ In qto formalismo, facile passare a trasf. di Fourier $\quad \Delta\cdot\tilde f(k) = \langle k|\Delta|f\rangle$

$$\langle x | (-\partial^2)^{-1} \overset{\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}|k\rangle\langle k|}{\vee} |y\rangle = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d k \,\frac{1}{k^2}\, e^{ik(x-y)}$$

$\mathrm{Tr}\, M = \sum_i e_i \cdot M e_i$

Calcoliamo ora i termini quadratici in A_μ $\leftarrow$ bkg,

cioè $\quad \mathrm{Tr}\big[(-\partial^2)^{-1}\Delta_2\big] +$

$$+\ \mathrm{Tr}\big[(-\partial^2)^{-1}\Delta_1 (-\partial^2)^{-1}\Delta_1\big]$$

$$\mathrm{Tr}\left[(-\partial^2)^{-1}\Delta_2\right] = \underset{\uparrow}{\mathrm{Tr}}\left[(-\partial^2)^{-1} A^{\mu a} t^a_{Ad} A^b_\mu t^b_{Ad}\right] =$$

traccia sulle funz. e sullo sp. di rap. Adj

$\int d^d y \, |y\rangle\langle y|$

$$= \int d^d x \, \langle x | \, \underset{\uparrow}{tr}\left[(-\partial^2)^{-1} A^{\mu a} t^a_{Ad} A^b_\mu t^b_{Ad}\right] | x\rangle =$$

traccia su sp. rap. Adj

funz. di operatore $\hat{X}$

$$= \int d^d x \, d^d y \, \langle x | (-\partial^2)^{-1} | y\rangle \langle y | A^{\mu a} A^b_\mu | x \rangle \, tr\left(t^a_{Ad} t^b_{Ad}\right)$$

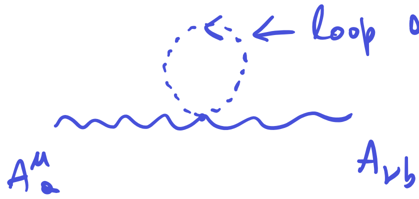
$$= \int d^d x \, d^d y \, \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{k^2} \, e^{ik(x-y)} \, tr\left(t^a_{Ad} t^b_{Ad}\right) A^{\mu a}(y) A^b_\mu(y) \, \delta(y-x)$$

$$= \int d^d x \, A^{\mu a}(x) A^b_\mu(x) \, \underbrace{tr\left(t^a_{Ad} t^b_{Ad}\right)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}$$

DIVERGENZA in $d=4$

termine in $S_{eff}(A)$ che contribuisce alla funz. a 2pt. (tree-level)

Derivando $S_{eff}(A)$ per A due volte, otteniamo correz. a propagatore di teoria eff.



← loop dei ghost

← qui c'è interaz. ... quindi otteniamo G(A) diverso da plo di gauge di Lorentz

bkg gauge field

$$tr\left(t^a_{Ad} t^b_{Ad}\right) = C(Adj)\,\delta^{ab} = c_2(G)\,\delta^{ab}$$