Lezione 14

Teorema Sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base di V. Consideriamo i vettori $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}$, $w = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} \in V$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$.

Allora $v + w$ ha coordinate $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \gamma_n \end{pmatrix}$

e λv ha coordinate $\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix}$.

Dim • $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_i \Rightarrow$

$$v + w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i b_i + \gamma_i b_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \gamma_i) b_i \Rightarrow v + w = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \gamma_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}$$

• $\lambda v = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i b_i \Rightarrow \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}$.

OSS Questo teorema permette di fare calcoli con i vettori usando le coordinate (vettori di $\mathbb{K}^n$), purché sia stata fissata una base.

Corollario Sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base per V.

Consideriamo vettori $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}, \dots, v_s = \begin{pmatrix} \alpha_{1s} \\ \vdots \\ \alpha_{ns} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} \in V$

e scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$.

Allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s \in V$ ha coordinate

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_s \begin{pmatrix} \alpha_{1s} \\ \vdots \\ \alpha_{ns} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base di V. Siano $u_1, \dots, u_k \in V$. Se $k > n$ allora $u_1, \dots, u_k$ sono <u>linearmente dipendenti</u>.

Dim

$\forall\, j = 1, \dots, k$ possiamo esprimere u_j come combinazione lineare di $b_1, \dots, b_n$ con certi coefficienti

$$u_j = \alpha_{1j} b_1 + \dots + \alpha_{nj} b_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}}$$

Consideriamo il sistema lineare <u>omogeneo</u> ($\Rightarrow$ compatibile)

$$x_1 u_1 + \dots + x_k u_k = 0_V \qquad \text{ovvero}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1k} x_k = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1} x_1 + \dots + \alpha_{nk} x_k = 0 \end{cases}$$

Riducendolo a gradini mediante il metodo di Gauss si ottiene un sistema di n equazioni e k incognite con $n < k$ $\Rightarrow$ almeno una incognita non ha pivot $\Rightarrow$ c'è almeno un parametro libero $\Rightarrow$

$\exists$ soluzione non nulla (ponendo un parametro libero $= 1$)

Una tale soluzione determina una combinazione lineare nulla non banale di $u_1, \dots, u_k$ $\Rightarrow$

$u_1, \dots, u_k$ linearmente dipendenti.

Corollario Supponiamo che V sia generato da $v_1, \dots, v_s \in V$ e che $u_1, \dots, u_r \in V$ siano linearmente indipendenti. Allora $r \leq s$.

Dim Il teorema della base dice che $\{v_1, \dots, v_s\}$ contiene una base $(b_1, \dots, b_n)$, $n \leq s$.
Ragioniamo per assurdo: se avessimo $r > s \Rightarrow$
$r > s \geq n \underset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow} u_1, \dots, u_r$ lin. dip. contraddizione.

Teorema (importante) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e supponiamo che $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ e $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ siano due basi di V. Allora $n = m$.

Dim $b_1, \dots, b_n$ generano V e $c_1, \dots, c_m$ sono lin. indip. $\Rightarrow m \leq n$. Viceversa $c_1, \dots, c_m$ generano V e $b_1, \dots, b_n$ sono lin. indip. $\Rightarrow n \leq m$. Pertanto $n = m$.

Quindi se V è finitamente generato allora
1) V ammette basi.
2) Tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori.

Il numero di vettori di una base è una proprietà di V.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. La dimensione di V è il numero di vettori di una base qualunque di V. Si denota con $\dim V$ oppure con $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Pertanto se $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ è base per V si ha

$$\dim V = n$$

Se V non è finitamente generato poniamo $\dim V = \infty$.

Pertanto V è finitamente generato $\iff \dim V < \infty$.

Oss $\dim V = 0 \iff V = \{0\}$ è lo spazio nullo dato che ϕ è base per $\{0\}$.

Corollario Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con $\dim V < \infty$.

Se $u_1, \dots, u_k$ generano $V \implies k \geq \dim V$.

Se $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti $\implies k \leq \dim V$.

Esempio notevole $\mathbb{K}^n$ ha la base canonica formata da n vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$. Tutte le basi di $\mathbb{K}^n$ hanno n vettori.

Teorema di completamento della base Supponiamo che $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ sia base per V e che $u_1, \dots, u_k \in V$ siano linearmente indipendenti. Allora esistono $n-k$ vettori $u_{k+1}, \dots, u_n \in \mathcal{B}$ t.c. $u_1, \dots, u_n$ formano una base per V.

Dim Per induzione su $k \geq 0$

Base dell'induzione: $k = 0$ basta porre $u_1 = b_1, \dots, u_n = b_n$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che sia vero per $k-1 \geq 0$ e lo dimostriamo per k vettori. $u_1, \dots, u_{k-1}$ lin. indip. $\underset{\text{ip. ind.}}{\implies}$

$\exists\ \tilde{u}_k, \dots, \tilde{u}_n \in \mathcal{B}$ t.c. $u_1, \dots, u_{k-1}, \tilde{u}_k, \dots, \tilde{u}_n$ base di V

$\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$u_k = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{k-1} u_{k-1} + \alpha_k \tilde{u}_k + \dots + \alpha_n \tilde{u}_n$$

$\alpha_k, \dots, \alpha_n$ non possono essere tutti nulli altrimenti u_k sarebbe comb. lin. di $u_1, \dots, u_{k-1}$ contraddicendo l'ipotesi che sono lin. indip. A meno di rinominare $\tilde{u}_k, \dots, \tilde{u}_n$ e $\alpha_k, \dots, \alpha_n$ possiamo assumere che $\alpha_k \neq 0 \Rightarrow$

$$\tilde{u}_k = \alpha_k^{-1}\left(-\alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{k-1} u_{k-1} + u_k - \alpha_{k+1} \tilde{u}_{k+1} - \dots - \alpha_n \tilde{u}_n\right)$$

$\Rightarrow V = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k, \tilde{u}_{k+1}, \dots, \tilde{u}_n)$

Poniamo $u_{k+1} := \tilde{u}_{k+1}, \dots, u_n := \tilde{u}_n \in \mathcal{B}$.

D'altra parte $u_1, \dots, u_n$ essendo generatori, per il teorema della base devono contenere una base con $n = \dim V$ vettori

$\Rightarrow$ sono loro stessi base.

Teorema Supponiamo che $\dim V = n < \infty$. Consideriamo n vettori $u_1, \dots, u_n$. Le seguenti sono equivalenti:

i) $u_1, \dots, u_n$ generano V;

ii) $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti;

iii) $u_1, \dots, u_n$ formano una base per V.

Dim $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Per il teorema della base $u_1, \dots, u_n$ contengono una base con $n = \dim V$ vettori $\Rightarrow$ sono loro stessi base $\Rightarrow u_1, \dots, u_n$ lin. indip.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ $u_1, \dots, u_n$ si possono completare ad una base di V con $n = \dim V$ vettori $\Rightarrow u_1, \dots, u_n$ base.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Vero per definizione di base.

Es 1) $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, ...

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lin. indip. (non proporzionali) $\Rightarrow$ base di $\mathbb{R}^2$

3) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$x u_1 + y u_2 + z u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 3z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -\cancel{2}_{1} & \cancel{2}_{1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\cancel{2}_{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ lin. indip. in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ base per $\mathbb{R}^3$.