3 Applicazioni lineari e matrici

3.1 Applicazioni lineari

Definizione 3.1 *Siano V e W dei $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Una funzione*[*] $f\colon V \to W$ *è detta* ***applicazione lineare*** *se:*

i) $\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, *si ha* $\quad f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$;

ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, \boldsymbol{v} \in V$, *si ha* $\quad f(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$.

Osservazione 3.2 *Le due condizioni nella Definizione 3.1 equivalgono alla seguente condizione:*

$$iii) \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \qquad f(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}) = \alpha f(\boldsymbol{v}) + \beta f(\boldsymbol{w}).$$

Infatti le condizioni i) e ii) sono casi particolari di iii): i) si ottiene ponendo $\alpha = \beta = 1$ e ii) ponendo $\beta = 0$. La condizione iii) segue da i) e ii) perchè per i) $f(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}) = f(\alpha\boldsymbol{v}) + f(\beta\boldsymbol{w})$ e per ii) $f(\alpha\boldsymbol{v}) + f(\beta\boldsymbol{w}) = \alpha f(\boldsymbol{v}) + \beta f(\boldsymbol{w})$.

Lemma 3.3 *Data una applicazione lineare $f\colon V \to W$ abbiamo che*

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

Dim. Infatti $f(\mathbf{0}_V) = f(0 \cdot \mathbf{0}_V) = 0 \cdot f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. ■

3.2 Esempi

3.2.1 Applicazione delle coordinate

Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Chiamiamo applicazione delle coordinate l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} F_{\mathcal{B}}\colon & V & \to & \mathbb{K}^n \\ & \boldsymbol{v} & \mapsto & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \end{array}$$

[*] Supponiamo noto il concetto di *funzione* (o *applicazione*) da corsi precedenti.

che associa ad un vettore $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n \in V$ le sue coordinate ${}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si verifica che $F_\mathcal{B}$ è un'applicazione lineare.

i) Compatibilità con $+$:
Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$, che possiamo scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n \quad (\alpha_i \in \mathbb{K}) \\ \boldsymbol{w} &= \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{v}_n \quad (\beta_i \in \mathbb{K}) \end{aligned}$$

Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} F_\mathcal{B}(\boldsymbol{u}) &= {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ F_\mathcal{B}(\boldsymbol{w}) &= {}^t(\beta_1, \ldots, \beta_n) \end{aligned}$$

Dunque

$$F_\mathcal{B}(\boldsymbol{u}) + F_\mathcal{B}(\boldsymbol{w}) = {}^t\big((\alpha_1 + \beta_1), \ldots, (\alpha_n + \beta_n)\big)$$

Inoltre abbiamo che $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\boldsymbol{v}_n$ e, per definizione, risulta $F_\mathcal{B}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = {}^t\big((\alpha_1 + \beta_1), \ldots, (\alpha_n + \beta_n)\big)$. Abbiamo così provato che

$$F_\mathcal{B}(\boldsymbol{u}) + F_\mathcal{B}(\boldsymbol{w}) = F_\mathcal{B}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}).$$

ii) Compatibilità con $\cdot$:
Sia $z \in \mathbb{K}$. Allora $\forall\, \boldsymbol{u} \in V$, che possiamo scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n \in V$$

perciò

$$\begin{aligned} F_\mathcal{B}(\boldsymbol{u}) &= {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ zF_\mathcal{B}(\boldsymbol{u}) &= {}^t(z\alpha_1, \ldots, z\alpha_n) \end{aligned}$$

Inoltre $z\boldsymbol{u} = z\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + z\alpha_n\boldsymbol{v}_n$ e $F_\mathcal{B}(z\boldsymbol{u}) = {}^t(z\alpha_1, \ldots, z\alpha_n)$. Dunque risulta

$$F_\mathcal{B}(z\boldsymbol{u}) = zF_\mathcal{B}(\boldsymbol{u}).$$

Concludiamo che $F_\mathcal{B}$ è applicazione lineare. ■

3.2.2 Applicazione nulla e applicazione identica

Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Chiamiamo applicazione nulla l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{0}: & V & \to & W \\ & \boldsymbol{v} & \mapsto & \mathbf{0}_W \end{array}$$

Dato V $\mathbb{K}-$spazio vettoriale, definiamo applicazione identica

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Id}: & V & \to & V \\ & \boldsymbol{v} & \mapsto & \boldsymbol{v} \end{array}$$

3.2.3 Applicazione del prodotto per matrice: L_A

Sia $A \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$ una matrice con $h-$righe e $n-$colonne. Denotiamo con $A^1, \dots, A^n$ le colonne di A. Definiamo

$$\begin{array}{cccc} L_A\colon & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^h \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n \end{pmatrix} = A^1x_1 + \dots + A^nx_n \end{array} \tag{3.1}$$

Allora L_A è un'applicazione lineare. Infatti, dati ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ e ${}^t(y_1, \dots, y_n) \in K^n$ ed α e $\beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} L_A\big(\alpha^t(x_1, \dots, x_n) + \beta^t(y_1, \dots, y_n)\big) &= L_A\big({}^t(\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha_n x_n + \beta_n y_n)\big) \\ &= A^1(\alpha x_1 + \beta y_1) + \dots + A^n(\alpha x_n + \beta y_n) \\ &= \alpha\big(A^1x_1 + \dots + A^nx_n\big) + \beta\big(A^1y_1 + \dots + A^ny_n\big) \\ &= \alpha L_A\big({}^t(x_1, \dots, x_n)\big) + \beta L_A\big({}^t(y_1, \dots, y_n)\big) \end{aligned}$$

3.2.4 Derivazione di polinomi

Dato $\mathbb{K}[x]_n$, definiamo l'operazione di derivazione di polinomi come l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{D}\colon & \mathbb{K}[x]_n & \to & \mathbb{K}[x]_n \\ & P(x) & \mapsto & \dfrac{dP}{dx} \end{array}$$

Lasciamo al lettore la verifica della linearità di tale applicazione.

3.3 Nucleo ed immagine di applicazioni lineari

Definizione 3.4 *Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare con V, W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Chiamiamo*

- ***nucleo** (o **kernel**) di f l'insieme $\ker f = \{\boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$; si ha $\ker f \subseteq V$;*
- ***immagine** di f l'insieme $\operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{w} \in W : \exists \boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$; si ha $\operatorname{Im} f \subseteq W$.*

Osservazione 3.5 *Sia $T\colon V \to W$ un'applicazione lineare di $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Allora si ha*

$$T\left(\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_i \alpha_i T(\boldsymbol{v}_i).$$

Quindi $T(\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n)) = \{T(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n)\} = \mathcal{L}(T(\boldsymbol{v}_1), ..., T(\boldsymbol{v}_n))$. Se V è finitamente generato, $\operatorname{Im} T$ è un sottospazio vettoriale di W finitamente generato.

Lemma 3.6 *Sia $f\colon V \to W$ applicazione lineare di $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Allora* $\ker f$ *è sottospazio vettoriale di V e* $\operatorname{Im} f$ *è sottospazio vettoriale di W.*

Dim. Iniziamo con il nucleo di f. Grazie a 3.3 abbiamo che $\mathbf{0}_V \in \ker f$ e quindi $\ker f \neq \emptyset$. Se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \ker f$, allora

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e quindi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in \ker f$. Inoltre, dati $k \in \mathbb{K}$ e $\boldsymbol{a} \in \ker f$, abbiamo

$$f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e dunque $k\boldsymbol{a} \in \ker f$. Concludiamo che $\ker f \subseteq V$ è sottospazio.

Per quanto riguarda l'immagine di f, grazie a 3.3 sappiamo che $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ e quindi $\mathbf{0}_W \in \operatorname{Im} f$. Dati $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ esistono $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v} \in V$ tali che $\boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{w})$. Ciò implica che

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$$

e quindi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$. Inoltre, dato $k \in \mathbb{K}$ e $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Im} f$ e dato $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $\boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{v})$, vale

$$k\boldsymbol{a} = kf(\boldsymbol{v}) = f(k\boldsymbol{v})$$

e quindi $k\boldsymbol{a} \in \operatorname{Im} f$. Concludiamo che $\operatorname{Im} f \subseteq W$ è sottospazio. ■

Definizione 3.7 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Chiamiamo*

- ***nullità*** *di f la dimensione dello spazio vettoriale* $\ker f$*;*
- ***rango*** *di f la dimensione dello spazio vettoriale* $\operatorname{Im} f$*.*

Lemma 3.8 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Valgono le seguenti relazioni:*

i) *f è suriettiva se e solo se* $\operatorname{Im} f = W$*;*

ii) *f è iniettiva se e solo se* $\ker f = \{\mathbf{0}\}$*.*

Dim.

i) è ovvia;

ii) Per quasiasi f sappiamo che $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ grazie al Lemma 3.3. Se $\boldsymbol{v} \in \ker f$ allora $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ e quindi $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V)$. Ora, se f è iniettiva segue che $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$. Viceversa se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ sono tali che $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u})$ allora $f(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_W$ e quindi $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \in \ker f$. Perciò $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$ e dunque $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, ovvero la tesi.

■

Proposizione 3.9 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

i) f è iniettiva se e solo se manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti;

ii) f è suriettiva se e solo se manda sistemi di generatori in sistemi di generatori.

Dim.

i) Dimostriamo l'implicazione diretta. Siano $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ linearmente indipendenti: allora $\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ se e solo se $\alpha_i = 0$ per ogni i. Per la linearità di f, abbiamo che

$$\sum_i \alpha_i f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0} \iff f\left(\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{0}$$

ovvero $\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i \in \ker f$. Poichè f è iniettiva, segue che $\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ e quindi $\alpha_i = 0$. Segue che $\{f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ sono linearmente indipendenti.

Dimostriamo l'implicazione inversa. Se $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ allora $\boldsymbol{v}$ è linearmente indipendente. Quindi $\{f(\boldsymbol{v})\}$ è linearmente indipendente per ipotesi. Poichè $f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$ (Lemma 3.3) segue che $\boldsymbol{v} \notin \ker f$. Pertanto ogni $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ non appartiene a $\ker f$: segue che $\ker f = \{\boldsymbol{0}\}$, ovvero f è iniettiva.

ii) Dimostriamo l'implicazione diretta. Per ogni $\boldsymbol{w} \in W$ esiste $\boldsymbol{v}$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ un sistema di generatori. Allora

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) = f\left(\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_i \alpha_i f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}$$

ovvero $\{f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ è un sistema di generatori.

L'implicazione inversa è ovvia.

■

Corollario 3.10 *Dati V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali, un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ è biiettiva se e solo se manda basi in basi. In tal caso,* $\dim V = \dim W$.

3.4 Teorema di Nullità più Rango

Teorema 3.11 (Nullità più Rango) *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali, V abbia dimensione finita e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora* $\ker f$ *e* $\operatorname{Im} f$ *hanno dimensione finita e*

$$\dim V = \dim\ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Dim. Poichè V ha dimensione finita anche $\ker f \subseteq V$ e $\operatorname{Im} f$ (per l'Osservazione 3.5) hanno dimensione finita.

Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s\}$ una base di $\ker f$: la completiamo ad una base $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ di V. Per dimostrare il teorema è sufficiente mostrare che $\{f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ è base di $\operatorname{Im} f$, perchè così risulta $\dim \operatorname{Im} f = n - s$, cioè la tesi. Innanzitutto notiamo che $\{f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ è un insieme di generatori di $\operatorname{Im} f$, perchè

$$\operatorname{Im} f = f(\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)) = \mathcal{L}(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)) = \mathcal{L}(f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)),$$

poichè $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s \in \ker f$. Basta quindi mostrare che $f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ sono linearmente indipendenti. Ponendo una loro combinazione uguale a $\mathbf{0}$ si ha:

$$\mathbf{0} = \sum_{j=s+1}^{n} \alpha_j f(\boldsymbol{v}_j) = f\left(\sum_{j=s+1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j\right)$$

perciò $\boldsymbol{v} = \sum_{j=s+1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \in \ker f$. Quindi si può scrivere $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \boldsymbol{v}_i$ quindi

$$\sum_{j=s+1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j - \sum_{i=1}^{s} \beta_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$$

da cui segue che tutti gli α_j (e i β_i) debbono essere 0, perchè $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ è una base di V

■

Corollario 3.12 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali, con* $\dim V = \dim W$ *e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Allora f è iniettiva se e solo se f è suriettiva.*

Dim. f è iniettiva se e solo se $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, ovvero se e solo se $\dim\ker f = 0$. Per il Teorema di nullità più rango (3.11) ciò accade se e solo se $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$, cioè se e solo se $\dim W = \dim \operatorname{Im} f$. Ma $\operatorname{Im} f \subset W$: dunque per il Teorema 2.23 se e solo se $W = \operatorname{Im} f$, ovvero f è suriettiva. ■

3.4.1 Nullità e rango di matrici

Definizione 3.13 *Se $A \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$. Definisco*

i) il ***rango per righe*** *di A, denotato* $\operatorname{rg}_r(A)$, *come la dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A.*

ii) *il* ***rango per colonne*** *di A, denotato* $\mathrm{rg}_c(A)$, *come la dimensione del sottospazio di* $\mathbb{K}^h$ *generato dalle colonne di A.*

iii) *la* ***nullità*** *di A, denotata* $\mathrm{null}(A)$, *come la nullità di* $L_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^h$ *(definita come in 3.2.3), ossia* $\dim\ker L_A$.

Definizione 3.14 *Sia $A \in M_{h\times n}(K)$. Definiamo* ***matrice trasposta*** *di A la matrice ${}^tA \in M_{n\times h}(K)$ tale che $({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$.*

Osservazione 3.15 *Per definizione si ha $\mathrm{Im}\, L_A = \mathcal{L}\left(A^1,\dots,A^n\right)$ dove $A^1,\dots,A^n$ sono le colonne di A. Il rango per colonne di A è quindi uguale a $\dim \mathrm{Im}\, L_A$ e coincide con il massimo numero di vettori linearmente indipendenti nell'insieme $\{A^1,\dots,A^n\}$ per il Teorema di estrazione di base 2.19. In particolare, $\mathrm{rg}_c A \le h$ grazie alla Proposizione 2.22.*

Similmente, il rango per righe di A è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A e vale $\mathrm{rg}_r A \le n$.

Risulta dal Teorema 3.11 che nullità e rango di A sono legate dalla eguaglianza $\mathrm{null}(A) + \mathrm{rg}_c A = n$.

Sia ${}^tA \in M_{n\times h}(\mathbb{K})$ la trasposta di A. Osserviamo che le righe di ${}^tA$ sono le colonne di A e le colonne di ${}^tA$ sono le righe di A. In particolare quindi:

$$\mathrm{rg}_r({}^tA) = \mathrm{rg}_c(A) \qquad \mathrm{rg}_c({}^tA) = \mathrm{rg}_r(A).$$

3.5 Il Teorema di Rouchè Capelli e sue applicazioni

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Chiamiamo sistema di m–equazioni nelle incognite $X_1,\dots,X_n$ un sistema della forma

$$\Sigma = \begin{cases} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ & & & \cdots & & & \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m \end{cases}$$

Scriveremo un tale sistema nella forma matriciale $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ove $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definiamo A la **matrice incompleta** associata a Σ e definiamo la matrice $\left(A|\boldsymbol{b}\right) \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$, ottenuta da A aggiungendo la colonna $\boldsymbol{b}$, la **matrice completa** associata a Σ. Un sistema è detto **omogeneo** se $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Diciamo che il sistema Σ ha soluzione o è risolubile se esiste $\boldsymbol{\alpha} = {}^t(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ che sia soluzione simultaneamente di tutte le equazioni date ovvero tale che $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$. Scriviamo $\mathrm{Sol}(\Sigma)$ o $\mathrm{Sol}(A,\boldsymbol{b})$ per l'insieme delle soluzioni di Σ.

Definizione 3.16 *Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale. Un **sottospazio affine** a V di dimensione k è un sottoinsieme della forma*

$$\boldsymbol{v}_0 + W := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{w} \text{ per } \boldsymbol{w} \in W\}$$

dove W è un sottospazio vettoriale di V di dimensione k e $\boldsymbol{v}_0 \in V$.

Teorema 3.17 (di Rouchè Capelli) *Sia dato il sistema di m equazioni in n incognite $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Allora:*

i) il sistema è risolubile se e solo se $\operatorname{rg}_c(A) = \operatorname{rg}_c(A|\mathbf{b})$;

ii) l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $\operatorname{Sol}(A, \mathbf{0})$ coincide con $\ker L_A$ (vedere §3.2.3) ed è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - r$ con $r = \operatorname{rg}_c(A)$;

iii) se il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è risolubile, allora, data una soluzione particolare $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathbb{K}^n$, l'insieme delle soluzioni $\operatorname{Sol}(A, \boldsymbol{b})$ è il sottospazio affine di dimensione $n - r$ definito da

$$\operatorname{Sol}(A, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \operatorname{Sol}(A, \mathbf{0})$$

Dim.

i) Ricordiamo che $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ è soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se e solo se $\alpha_1 A^1 + \cdots + \alpha_n A^n = \boldsymbol{b}$ dove $A^1, \ldots, A^n$ sono le colonne di A. Il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è perciò risolubile se e solo se $\boldsymbol{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A, cioè se e solo se $\boldsymbol{b} \in \mathcal{L}\left(A^1, \ldots, A^n\right)$, cioè se e solo se
$$\dim \mathcal{L}\left(A^1, \ldots, A^n\right) = \dim \mathcal{L}\left(A^1, \ldots, A^n, \boldsymbol{b}\right).$$
Tuttavia, per definizione abbiamo che
$$\dim \mathcal{L}\left(A^1, \ldots, A^n\right) = \operatorname{rg}_c(A) \qquad \dim \mathcal{L}\left(A^1, \ldots, A^n, \boldsymbol{b}\right) = \operatorname{rg}_c(A|\boldsymbol{b})$$

ii) Per definizione $L_A(\boldsymbol{\alpha}) = A\boldsymbol{\alpha}$, quindi $\operatorname{Sol}(A, \mathbf{0}) = \ker L_A$ e inoltre $\operatorname{Im} L_A$ è generato dalle colonne di A perciò $\dim \operatorname{Im} L_A = \operatorname{rg}_c(A)$. Quindi, per il teorema della nullità più rango, abbiamo che
$$n = \dim \ker L_A + \dim \operatorname{Im} L_A = \dim \operatorname{Sol}(A, \mathbf{0}) + r.$$

iii) Sia ora $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathbb{K}^n$ una soluzione di $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Mostriamo che
$$\operatorname{Sol}(A, \boldsymbol{b}) \subset \boldsymbol{\alpha}_0 + \operatorname{Sol}(A, \mathbf{0})$$
Per ogni $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Sol}(A, \boldsymbol{b})$ abbiamo che $A(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ e quindi $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0 \in \operatorname{Sol}(A, \mathbf{0})$. Viceversa, dato $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Sol}(A, \mathbf{0})$ abbiamo che $A\left(\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{w}\right) = \boldsymbol{b} - \mathbf{0} = \boldsymbol{b}$ e quindi
$$\boldsymbol{\alpha}_0 + \operatorname{Sol}(A, \mathbf{0}) \subset \operatorname{Sol}(A, \boldsymbol{b})$$
Dalle due inclusioni appena dimostrate segue la tesi.

■

Corollario 3.18 *Dato un sistema lineare* $A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$*, lo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{K}^n$ *se e solo se* $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ *ovvero se e solo se il sistema è omogeneo.*

Dim. Se $\mathrm{Sol}(A, \boldsymbol{b})$ è un sottospazio vettoriale allora $\mathbf{0} \in \mathrm{Sol}(A, \boldsymbol{b})$. In particolare, $A\mathbf{0} = \boldsymbol{b}$. Poiche è $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ho quindi $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.

Viveversa se il sistema è omogeneo, segue allora dal Teorema di Rouchè Capelli 3.17 che $\mathrm{Sol}(A, \mathbf{0})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. ■

Proposizione 3.19 *Data una matrice* $A \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$ *vale* $\mathrm{rg}_r(A) = \mathrm{rg}_c(A) \leq \min\{h, n\}$.

Dim. La seconda disuguaglianza della tesi segue dalla Osservazione 3.15. Osserviamo che basta dimostrare che $\mathrm{rg}_c(D) \leq \mathrm{rg}_r(D)$ per ogni matrice D. Infatti per $D = A$ otteniamo $\mathrm{rg}_c(A) \leq \mathrm{rg}_r(A)$ e per $D = {}^tA$ otteniamo, grazie alla Osservazione 3.15:

$$\mathrm{rg}_r(A) = \mathrm{rg}_c({}^tA) \leq \mathrm{rg}_r({}^tA) = \mathrm{rg}_c(A).$$

Resta da dimostrare che $\mathrm{rg}_c(A) \leq \mathrm{rg}_r(A)$ per ogni matrice A. Sia $\mathrm{rg}_r(A) = r$ e sia $B \in M_{r\times n}(\mathbb{K})$ le cui righe sono ottenute prendendo r righe linearmente indipendenti di A. Osserviamo che ogni altra riga di A è combinazione lineare delle righe di B e quindi le matrici A e B definiscono sistemi lineari omogenei equivalenti, ovvero $\mathrm{Sol}(A, \mathbf{0}) = \mathrm{Sol}(B, \mathbf{0})$.

Consideriamo le applicazioni lineari già note $L_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^h$ e $L_B\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$. Il nucleo di L_A (risp. di L_B) coincide con $\mathrm{Sol}(A, \mathbf{0})$ (risp. con $\mathrm{Sol}(B, \mathbf{0})$). Quindi $\ker(L_A) = \ker(L_B)$. Per il teorema di nullità più rango applicato ad L_A abbiamo:

$$\dim \mathrm{Im} L_A = n - \dim \ker L_A.$$

Ma $(n - \dim \ker L_A) = (n - \dim \ker L_B)$ in quanto $\ker L_A = \ker L_B$. Applicando ancora il teorema di nullità più rango ad L_B abbiamo che

$$n - \dim \ker L_B = \dim \mathrm{Im} L_B.$$

Poiché $\mathrm{Im} L_B \subseteq \mathbb{K}^r$ abbiamo che $\dim \mathrm{Im} L_B \leq r$. Concludiamo che

$$\mathrm{rg}_c(A) = \dim \mathrm{Im} L_A \leq r = \mathrm{rg}_r(A)$$

ovvero la tesi. ■

3.6 Lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari.

Definizione 3.20 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Definiamo* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *l'insieme delle applicazioni lineari (omomorfismi) da V a W. Ovvero,*

$$\mathrm{Hom}(V, W) \overset{def}{\equiv} \{f : V \to W \; f \textit{ applicazione lineare } \}.$$

Lemma 3.21 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Allora,* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{F}(V, W)$.*

Dim. Verifichiamo che le condizioni della Definizione 1.6 siano soddisfatte. Osservo che $\mathrm{Hom}(V, W) \neq \emptyset$. Infatti, l'applicazione $\mathbf{0}: V \to W$ definita da $\boldsymbol{v} \mapsto \mathbf{0}_W$ è una applicazione lineare. Ricordiamo che questo è l'elemento neutro di $\mathcal{F}(V, W)$. Se $f: V \to W$ è una applicazione lineare ed $\alpha \in \mathbb{K}$ allora la funzione $\alpha f: V \to W$, definita da $\boldsymbol{v} \mapsto \alpha f(\boldsymbol{v})$, è ancora lineare. Infine, se f e $g: V \to W$ sono applicazione lineari, la funzione $f + g: V \to W$, definita da $\boldsymbol{v} \mapsto f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$, è ancora lineare. Lasciamo queste verifiche al lettore.

∎

Definizione 3.22 *Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale. Si dice **spazio vettoriale duale** di V lo spazio $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.*

Lemma 3.23 *Siano U, V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Siano $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ e $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Allora $g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$.*

Dim. Abbiamo la compatibilità rispetto alla somma:

$$(g \circ f)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = g(f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})) = g(f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})) = (g \circ f)(\boldsymbol{a}) + (g \circ f)(\boldsymbol{b})$$

e la compatibilità rispetto al prodotto per scalare:

$$(g \circ f)(k\boldsymbol{a}) = g(kf(\boldsymbol{a})) = k(g \circ f)(\boldsymbol{a}).$$

Dunque $g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$. ∎

Proposizione 3.24 *Valgono le seguenti proprietà:*

- ***(associatività)*** *se $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e $h \in Hom(W, Z)$ allora:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- ***(distributività)*** *se f e $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $h \in \mathrm{Hom}(W, Z)$ e $s \in \mathrm{Hom}(U, V)$ allora:*

$$(f + g) \circ s = f \circ s + g \circ s \qquad e \qquad h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$$

La verifica è lasciata al lettore.

3.7 Matrici e applicazioni lineari.

Teorema 3.25 (Teorema di esistenza e unicità dell'applicazione lineare) *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Sia $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V e siano $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n \in W$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $T\colon V \to W$ tale che $T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, \dots, T(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{w}_n$.*

Dim. Dimostriamo l'esistenza di T. Sia $T\colon V \to W$ e sia $\boldsymbol{v} \in V$. Grazie al lemma 2.13 esistono unici $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $\boldsymbol{v} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i$. Definiamo allora

$$T(\boldsymbol{v}) \overset{\text{def}}{\equiv} \sum_i \alpha_i \boldsymbol{w}_i \,.$$

Mostriamo che T è lineare. Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b} \in V$ scriviamo $\boldsymbol{a} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ e $\boldsymbol{b} = \sum_i \beta_i \boldsymbol{v}_i$. Allora,

$$\begin{aligned} T(\gamma \boldsymbol{a} + \delta \boldsymbol{b}) = T\left(\sum_i (\gamma\alpha_i + \delta\beta_i)\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_i (\gamma\alpha_i + \delta\beta_i)\boldsymbol{w}_i = \\ = \gamma \sum_i \alpha_i \boldsymbol{w}_i + \delta \sum_i \beta_i \boldsymbol{w}_i = \gamma T(\boldsymbol{a}) + \delta T(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

Infine, come richiesto, abbiamo che $T(\boldsymbol{v}_i) = T(0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_i + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{w}_i$.

Dimostriamo ora l'unicità di T. Siano $F\colon V \to W$ un'altra applicazione lineare tale che per ogni i valga $F(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$. Se $\boldsymbol{v} \in V$, scriviamo $\boldsymbol{v} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i$. Allora,

$$F(\boldsymbol{v}) = \sum_i \alpha_i F(\boldsymbol{v}_i) = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{w}_i = \sum_i \alpha_i T(\boldsymbol{v}_i) = T(\boldsymbol{v})$$

ovvero $F = T$. ∎

Osservazione 3.26 *Come conseguenza del teorema 3.25 si ha che, per determinare in modo unico un'applicazione lineare, è sufficiente fissare l'immagine di una base di V.*

3.7.1 Matrice associata ad una applicazione lineare.

Siano V e W dei $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V e sia $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_h\}$ una base di W. Data una applicazione lineare $f\colon V \to W$ chiamiamo **matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$** la matrice

$${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) \in M_{h\times n}(\mathbb{K}) = \big(a_{ij}\big)_{1\le i\le h, 1\le j\le n}$$

le cui entrate sono definite da

$$f(\boldsymbol{v}_i) = a_{1i}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_{hi}\boldsymbol{w}_h.$$

Ovvero la colonna i-esima di ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ è composta dalle coordinate dell'immagine $f(\boldsymbol{v}_i)$ dell' i-esimo vettore della base $\mathcal{B}$ di V tramite f rispetto alla base $\mathcal{C}$ di W.

Esempio 3.27 *Sia n un intero positivo. Sia $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sia $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare ${}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto A \cdot {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ come in §3.2.3. Sia $\mathcal{C}_{an,n}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{C}_{an,m}$ la base canonica di $\mathbb{K}^m$. Allora, ${}_{\mathcal{C}_{an,m}}M_{\mathcal{C}_{an,n}}(L_A) = A$. Infatti, la i-esima colonna di ${}_{\mathcal{C}_{an,m}}M_{\mathcal{C}_{an,n}}(L_A)$ è definita dalle coordinate rispetto a $\mathcal{C}_{an,m}$ dell'immagine tramite L_A dell' i-esimo elemento di $\mathcal{C}_{an,n}$. Ovvero coincide con $A \cdot \boldsymbol{e}_i$ che è l' i-esima colona di A.*

Osserviamo che l'applicazione nulla $\mathbf{0} : \mathbb{K}^n : \mathbb{K}^m$ corrisponde alla matrice con tutte le entrate nulle e che l'applicazione identica su $\mathbb{K}^n$ corrisponde alla matrice

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice $n \times n$ che ha 1 sulla diagonale e 0 altrove.

Lemma 3.28 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali di dimensioni n ed m rispettivamente e con basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Allora, data una applicazione lineare $f \colon V \to W$, con matrice rappresentativa $A := {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f)$ rispetto alle basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, sia ha il seguente diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle F_{\mathcal{A}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

cioè

$$F_{\mathcal{B}} \circ f = L_A \circ F_{\mathcal{A}}.$$

Dim. Verifichiamo l'uguaglianza

$$F_{\mathcal{B}} \circ f = L_A \circ F_{\mathcal{A}}$$

applicando le funzioni ai vettori della base $\mathcal{A} := \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ di V. Per il Teorema 3.25, concludiamo che l'uguaglianza vale per ogni vettore. Ricordando la definizione di matrice associata valutiamo

$$(F_{\mathcal{B}} \circ f)(\boldsymbol{v}_j) = F_{\mathcal{B}}(f(\boldsymbol{v}_j)) = F_{\mathcal{B}}\left(\sum_i a_i \boldsymbol{w}_i\right) = A^j.$$

Inoltre abbiamo che

$$(L_A \circ F_{\mathcal{A}})(\boldsymbol{v}_j) = L_A(F_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{v}_j)) = L_A \boldsymbol{e}_j = A^j.$$

Da queste segue l'uguaglianza voluta ed otteniamo quindi la tesi. ■

Proposizione 3.29 *L'applicazione ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}} \colon$ $\mathrm{Hom}(V, W) \to M_{h\times n}(\mathbb{K})$ è lineare e biettiva. In particolare,* $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

Dim. Ricordiamo che la struttura di $\mathbb{K}-$spazio vettoriale su $\mathrm{Hom}(V, W)$ è definita nel Lemma 3.21 mentre la struttura di $\mathbb{K}-$spazio vettoriale su $M_{h\times n}(\mathbb{K})$ è definita in §1.3. Osserviamo intanto che ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}$ è biettiva. Infatti, data una matrice $A = (\alpha_{ij}) \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$, segue dal Teorema 3.25 che esiste un'unica applicazione lineare $g\colon V \to W$ tale che $g(\boldsymbol{v}_i) = \alpha_{1i}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \alpha_{hi}\boldsymbol{w}_h$ ovvero tale che ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(g) = A$.

Resta da mostrare che ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}$ è lineare. Siano f e $g \in \ Hom(V, W)$ ed α, $\beta \in \mathbb{K}$ e

$$ {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij}) \quad \text{e} \quad {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(g) = (b_{ij}) $$

Allora, $(\alpha f + \beta g)(\boldsymbol{v}_i) = \alpha f(\boldsymbol{v}_i) + \beta g(\boldsymbol{v}_i)$ per definizione di somma e prodotto per scalare in $\mathrm{Hom}(V, W)$. Quindi abbiamo che:

$$ (\alpha f + \beta g)(\boldsymbol{v}_i) = (\alpha a_{1i} + \beta b_{1i})\boldsymbol{w}_1 + \cdots + (\alpha a_{hi} + \beta b_{hi})\boldsymbol{w}_h $$

ovvero ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(\alpha f + \beta g) = \alpha {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) + \beta {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(g)$ per definizione di somma e prodotto per scalare su $M_{h\times n}(\mathbb{K})$.

L'asserzione sulla dimensione segue dal fatto che $\dim M_{h\times n}(\mathbb{K}) = h \cdot n$ come mostrato in §2.2.3 e che spazi vettoriali isomorfi hanno uguale dimensione grazie al Corollario 3.10. ■

3.7.2 Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici.

Definizione 3.30 *Siano $A = \big(a_{ij}\big) \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$ e $B = \big(b_{sr}\big) \in M_{n\times t}(\mathbb{K})$. Definiamo*

$$ A \cdot B = C = (c_{\alpha\beta}) \in M_{h\times t}(\mathbb{K}) $$

*il **prodotto delle matrici** A e B come la matrice la cui entrata $c_{\alpha\beta}$ sulla riga $1 \le \alpha \le h$ e sulla colonna $1 \le \beta \le t$ è definita*

$$ c_{\alpha\beta} = a_{\alpha 1}b_{1\beta} + \cdots + a_{\alpha n}b_{n\beta} $$

ovvero il prodotto della riga α di A per la colonna β di B.

Osservazione 3.31 *Si noti che $\mathbb{K}^n = M_{n\times 1}$ e dati $A = \big(a_{ij}\big) \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$ e $\boldsymbol{\alpha} :=^t (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ il prodotto matrice per vettore è esattamente il corrispondente prodotto tra matrici.*

Proposizione 3.32 *Valgono le seguenti proprietà:*

- ***(associatività)*** *se $A \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times s}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{s\times t}(\mathbb{K})$ allora*

$$ (A\,B)\,C = A\,(B\,C) $$

- ***(distributività)*** *se $A, D \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in M_{n\times s}(\mathbb{K})$ allora*

$$ A\,(B + C) = A\,B + A\,C \quad e \quad (A + D)\,B = A\,B + D\,B; $$

- *per ogni n ed $h \in \mathbb{N}$ ed ogni $A \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$ si ha $I_h\,A = A = A\,I_n$.*

La verifica è lasciata al lettore.

Lemma 3.33 *Siano* $A = \big(a_{ij}\big) \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B = \big(b_{sr}\big) \in M_{n\times t}(\mathbb{K})$ *e* $L_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^h$ *e* $L_B\colon \mathbb{K}^t \to \mathbb{K}^n$ *le corrispondenti applicazioni lineari. Allora*

$$L_A \circ L_B = L_{AB}.$$

Dim. Basta verificare l'ugualianza sui vettori della base canonica di $\mathbb{K}^t$.

$$L_A \circ L_B(\boldsymbol{e}_j) = L_A(B\,\boldsymbol{e}_j) = A\,(B\,\boldsymbol{e}_j)$$

$$L_{AB}(\boldsymbol{e}_j) = (A\,B)\,\boldsymbol{e}_j = A\,(B\,\boldsymbol{e}_j)$$

per la proprietà associativa del prodotto tra matrici. ∎

Proposizione 3.34 *Siano* U*,* V *e* W $\mathbb{K}-$*spazi vettoriali non nulli, di dimensione finita* t*,* n *ed* h *rispettivamente con basi* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *rispettivamente. Siano* $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$ *e* $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$*. Allora*

$$_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{A}}\big(g\circ f\big) = {_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}}(g)\cdot {_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}}(f).$$

Dim. Osserviamo che $g \circ f \in \mathrm{Hom}(U,W)$ grazie al Lemma 3.23 quindi ha senso parlare di matrice associata. Inoltre,

$$_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{A}}\big(g\circ f\big) \in M_{h\times t}(\mathbb{K}) \qquad {_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}}\big(f\big) \in M_{n\times t}(\mathbb{K}) \qquad {_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}}\big(g\big) \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$$

Quindi il prodotto di matrici ${_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}}(g)\cdot{_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}}(f)$ è ben definito e definisce una matrice in $M_{h\times t}(\mathbb{K})$ come segue dalla Definizione 3.30.

Dimostriamo ora la formula. Scriviamo le basi:

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_t\} \quad \mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\} \quad \mathcal{C} = \{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_h\}$$

Siano ${_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}}(g) = (a_{ij})$ e ${_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}}(f) = (b_{sr})$. L'entrata sulla riga $1 \le \alpha \le h$ e sulla colonna $1 \le \beta \le t$ di ${_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{A}}}\big(g\circ f\big)$ è definita dalla coordinata di $g\big(f(\boldsymbol{u}_\beta)\big)$ rispetto a $\boldsymbol{w}_\alpha$. Calcoliamo

$$g\big(f(\boldsymbol{u}_\beta)\big) = g\big(b_{1\beta}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_{n\beta}\boldsymbol{v}_n\big) = \sum_{x=1}^{n} b_{x\beta}\,g(\boldsymbol{v}_x) = \sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{h} b_{x\beta}\,a_{yx}\,\boldsymbol{w}_y$$

Quindi, la coordinata di $\boldsymbol{u}_\beta$ rispetto a $\boldsymbol{w}_\alpha$ è $\sum_{x=1}^{n} a_{\alpha x}b_{x\beta}$, e coincide con l'entrata sulla riga α e la colonna β di $A\cdot B$ come volevasi dimostrare.

∎

3.7.3 Matrici di cambiamento di base.

Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale non nullo di dimensione finita n. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ basi di V. Definisco **matrice di cambiamento di base** dalla base $\mathcal{A}$ alla base $\mathcal{B}$ la matrice ${_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}}(\mathrm{Id})$ ove $\mathrm{Id}\colon V \to V$ è l'applicazione identica definita in §3.2.2.

Lemma 3.35 *Sia* $A := {_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}}(\mathrm{Id})$ *la matrice del cambio di base dalla base* $\mathcal{A}$ *alla base* $\mathcal{B}$*. Se* $\boldsymbol{v} \in V$ *ha coordinate* $\boldsymbol{\alpha} = {}^t(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ *rispetto alla base* $\mathcal{A}$*, allora il vettore* $\boldsymbol{\beta}$ *delle coordinate di* $\boldsymbol{v}$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *è* $\boldsymbol{\beta} = A\boldsymbol{\alpha}$*.*

Dim. Siano $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ e $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$. Per definizione di matrice di cambio di base, $\boldsymbol{v}_i = a_{1i}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{u}_n$. Ma $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$ e quindi

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i a_{ji} \boldsymbol{u}_j$$

Quindi, la coordinata j-esima di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ è $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\alpha_i$ ovvero l'entrata j-esima di $A\boldsymbol{\alpha}$, come volevasi dimostrare. ∎

Corollario 3.36 *Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale con basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, W un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale con basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Sia $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Allora*

$${}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{A}}(f) = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_W)\, {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)\, {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}_V)$$

Dim. Usando la proposizione 3.34 calcoliamo

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_W)\, {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)\, {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}_V) &= {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_W)\, {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{A}}(f \circ \mathrm{Id}_V) = \\ &= {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}_W \circ f \circ \mathrm{Id}_V) = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{A}}(f) \end{aligned}$$

∎

Proposizione 3.37 *Siano V, W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali e sia $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ con $\dim V = n$, $\dim W = h$ e $\dim \mathrm{Im}\, f = r$. Allora esiste una base $\mathcal{A}$ di V e una base $\mathcal{B}$ di W tale che:*

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times n-r} \\ 0_{h-r\times r} & 0_{h-r\times n-r} \end{pmatrix} \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$$

dove

$$0_{a\times b} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{a\times b}(\mathbb{K}).$$

Dim. Procediamo analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema di nullità più rango. Sia $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{c}_n\}$ una base di $\ker f$, la completiamo ad una base $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n\}$ di V. Come nella dimostrazione del teorema di nullità più rango si verifica che $\{\boldsymbol{z}_1 := f(\boldsymbol{c}_1), \dots, z_r := f(\boldsymbol{c}_r)\}$ è base di $\mathrm{Im}\, f$. La completiamo ad una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_h\}$ di W. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1 &\mapsto f(\boldsymbol{c}_1) = \boldsymbol{z}_1 \\ &\dots \\ \boldsymbol{c}_r &\mapsto f(\boldsymbol{c}_r) = \boldsymbol{z}_r \\ &\dots \\ \boldsymbol{c}_{r+1} &\mapsto f(\boldsymbol{c}_{r+1}) = \mathbf{0} \\ &\dots \end{aligned}$$

Concludiamo dunque che:

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times n-r} \\ 0_{h-r\times r} & 0_{h-r\times n-r} \end{pmatrix} \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$$

∎

3.8 Isomorfismi e Matrici invertibili

3.8.1 Isomorfismi

Definizione 3.38 *Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali. Un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ biettiva è detta* **isomorfismo di $\mathbb{K}-$spazi vettoriali.**

Ricordiamo:

i) Una funzione $f\colon V \to W$ è detta **invertibile** se esiste $G\colon W \to V$ tale che $f \circ G = \mathrm{Id}_W$ e $G \circ f = \mathrm{Id}_V$. G è detta **inversa** di f

ii) Se f ammette un'inversa, essa è unica ed è denotata f^{-1}. Infatti, dette G_1 e G_2 le inverse di f, risulta

$$G_1 = G_1 \circ \mathrm{Id}_W = G_1 \circ (f \circ G_2) = (G_1 \circ f) \circ G_2 = \mathrm{Id}_V \circ G_2 = G_2.$$

iii) Un funzione f ammette un'inversa se e solo se è biettiva e la sua inversa f^{-1} soddisfa

$f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$ se e solo se $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$.

Sia infatti f invertibile. Se $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w})$ si ha che $\boldsymbol{v} = f^{-1} \circ f(\boldsymbol{v}) = f^{-1} \circ f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ e quindi $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, ossia f è iniettiva. Se $\boldsymbol{b} \in W$ si ha $f \circ f^{-1}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$, ossia ogni $\boldsymbol{b} \in W$ è immagine di un vettore di V. Quindi, f è quindi suriettiva.

Viceversa sia f biiettiva. Definiamo l'applicazione $G\colon W \to V$ che associa a $\boldsymbol{w} \in W$ l'unico vettore $\boldsymbol{v} \in V$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Allora, $f \circ G(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ per definizione. Inoltre, dato $\boldsymbol{v} \in V$ esso è l'unico vettore tale che $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ e quindi $G \circ f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, quindi f è invertibile e G è la sua inversa.

Proposizione 3.39 *Sia $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e supponiamo che f ammetta un'inversa G. Allora G è lineare.*

Dim. Supponiamo che f ammetta un'inversa G. Siano $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w} \in W$ ed α e $\beta \in \mathbb{K}$. Siano $\boldsymbol{a} = G(\boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{b} = G(\boldsymbol{w})$. Allora

$$f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b}) = \alpha f\big(G(\boldsymbol{v})\big) + \beta f\big(G(\boldsymbol{w})\big) = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$$

Quindi, $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ è l'unico vettore la cui immagine tramite f sia $\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}$. Quindi, $G\big(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}\big) = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ alla luce del precedente richiamo. ■

Proposizione 3.40 *Siano V e W due $\mathbb{K}-$spazi vettoriali finitamente generati. Allora, esiste un isomorfismo $f\colon V \to W$ se e solo se V e W hanno uguale dimensione.*

Dim. L'implicazione diretta segue da 3.12. Viceversa, supponiamo che V e W abbiano uguale dimensione. Sia $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V e sia $\mathcal{B} := \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$ una base di W. Per il Teorema di esistenza e unicità 3.25 esiste (unica) l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$, per ogni i $1 \leq i \leq n$, ed è un isomorfismo per il Cor.3.10 perchè manda basi in basi. ■

3.8.2 Inversa dell'applicazione delle coordinate e di ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}$

Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale. Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V. Sia $F_{\mathcal{B}}$ l'applicazione delle coordinate definita in §3.2.1. Risulta che $F_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo (cioè invertibile) e la sua inversa è:

$$\begin{array}{rccc} F_{\mathcal{B}}^{-1}\colon & \mathbb{K}^n & \to & V \\ & {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \mapsto & \sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i \end{array}$$

Siano V e W $\mathbb{K}-$spazi vettoriali di dimensioni n ed m rispettivamente e con basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. L'applicazione ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}\colon \operatorname{Hom}(V, W) \to M_{n\times m}(\mathbb{K})$ è un isomorfismo per la Prop.3.29. L'inversa è l' applicazione

$$\begin{array}{rccc} {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}{}^{-1}\colon & M_{n\times m}(\mathbb{K}) & \to & \operatorname{Hom}(V, W) \\ & A & \mapsto & F_{\mathcal{C}}^{-1} \circ L_A \circ F_{\mathcal{B}}\ . \end{array}$$

Osservazione 3.41 *Siano V e W due $\mathbb{K}-$spazi vettoriali finitamente generati della stessa dimensione n. Siano $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V, $\mathcal{B} := \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ una base di W e $f\colon V \to W$ l'isomorfismo definito da $f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$, per ogni i $1 \le i \le n$, della Prop.3.40. Si noti che ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(f) = I_n$ e che f è la composta dell'applicazione delle coordinate $F_{\mathcal{A}}\colon V \to \mathbb{K}^n$ e dell' inversa $F_{\mathcal{B}}^{-1}\colon \mathbb{K}^n \to W$.*

3.8.3 Matrici invertibili

Definizione 3.42 *Sia $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice quadrata ($n \in \mathbb{N}$). La matrice M è detta* ***invertibile*** *se esiste $N \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tale che $M\,N = I_n = N\,M$. La matrice N è detta* ***inversa*** *di M e si scrive $N = M^{-1}$.*

Lemma 3.43 *Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale non banale di dimensione finita ed $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ basi di V. Allora, la matrice di cambiamento di base ${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ è invertibile con inversa ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id})$.*

Dim. Calcoliamo:

$${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})\,{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}) = {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}) = I_n \qquad {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id})\,{}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = I_n$$

■

Corollario 3.44 *Sia $A \in M_{h\times n}(\mathbb{K})$ una matrice di rango r. Esistono allora matrici invertibili $B \in M_{h\times h}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tali che*

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times n-r} \\ 0_{h-r\times r} & 0_{h-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

Dim. Grazie all' Osservazione 3.37 esistono una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{K}^n$ e una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^h$ tale che ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(L_A)$ ha la forma cercata. Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{K}^h$ e $\mathcal{D}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Allora le matrici di cambiamento di base $B := {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$ e $C := {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id})$ sono invertibili e, per 3.36:

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(L_A) = B \cdot {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{D}}(L_A) \cdot C = B \cdot A \cdot C$$

■

Proposizione 3.45 *Sia $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) M è invertibile;

ii) l'applicazione lineare $L_M \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo;

iii) M ha rango n (vedere la Definizione 3.13);

iv) M ha nullità 0 (vedere la Definizione 3.13);

Se una di tale affermazioni vale, allora l'inversa di M è unica.

Dim. L'equivalenza di (ii), (iii) e (iv) segue dall' Osservazione 3.15.

Sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Osserviamo che ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(L_M) = M$ come mostrato nell'Esempio 3.27. Se L_M è un isomorfismo allora ammette un'inversa G. Sia $N := {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(G)$. Allora

$$M \cdot N = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(L_M){}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(G) = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(L_M \circ G) = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$$

Quest'ultima matrice coincide con I_n. Analogamente

$$N \cdot M = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(G){}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(L_M) = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(G \circ L_M) = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}) = I_n$$

Questo mostra che (ii) implica (i).

Supponiamo ora che valga (i) e sia N un'inversa di M. Sia $G := L_N \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Allora $L_M \circ L_N = L_{M\cdot N}$ per l'associatività del prodotto di matrici (vedere 3.32). Ma $L_{M\cdot N} = L_{I_n} = \mathrm{Id}$. Similmente $L_N \circ L_M = \mathrm{Id}$. Quindi L_M è invertibile ovvero un isomorfismo.

L'unicità si mostra come per la dimostrazione dell'unicità dell'inversa di un isomorfismo di spazi vettoriali. ■

Corollario 3.46 *Sia V un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale di dimensione finita n. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ basi di V. Sia $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Allora ${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile se e solo se f è un isomorfismo.*

Dim. Supponiamo che f ammetta un'inversa g. Allora

$${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(f)\,{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(g) = {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{A}}(f \circ g) = {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}) = I_n$$

grazie alla Proposizione 3.34. Similmente,

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}}(g)\,{}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(g \circ f) ={}_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = I_n$$

Quindi, ${}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile.

Viceversa, supponiamo che $A = {}_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}(f)$ sia invertibile. Segue dalla Proposizione 3.45 che L_A è un isomorfismo. Allora, $f = F_{\mathcal{A}}^{-1} L_A F_{\mathcal{B}}$ grazie al Lemma 3.28 ed è un isomorfismo in quanto composizione degli isomorfismi $F_{\mathcal{A}}^{-1}$, L_A e $F_{\mathcal{B}}$. ■

Osservazione 3.47 *Sia $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice invertibile. Allora, M è la matrice ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(L_M)$ associata all'isomorfismo $L_M \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{K}^n$.*

Possiamo anche vedere M come una matrice di cambiamento di base. Sia infatti $\mathcal{A}$ l'insieme delle colonne di M viste come vettori di $\mathbb{K}^n$. Poichè M ha rango n per 3.45, allora $\mathcal{A}$ costituisce una base di $\mathbb{K}^n$. Si calcola che $M = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id})$.

3.9 Appendice

3.9.1 Prodotto e somma di sottospazi

Siano U e W sottospazi di V $\mathbb{K}-$spazio vettoriale e sia $U \times W$ lo spazio prodotto come è stato definito nella (1.2.6). Allora l'applicazione:

$$\begin{array}{rccc} f: & U \times W & \to & V \\ & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & \mapsto & \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \end{array}$$

è lineare.

i) Compatibilità con $+$:
$\forall\, \boldsymbol{a},\boldsymbol{u} \in U$, $\forall\, \boldsymbol{b},\boldsymbol{w} \in W$ abbiamo che $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{w})$. Risulta inoltre:

$$f((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})) = f((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$$

ii) Compatibilità con $\cdot$:
$\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall\, (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in U \times W$ abbiamo che

$$f(\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})) = f(\alpha\boldsymbol{a},\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

■

In generale, siano $W_1, \ldots, W_h$ sottospazi vettoriali di V. Allora, l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f\colon & W_1 \times \cdots \times W_h & \to & V \\ & (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_h) & \mapsto & \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_h \end{array}$$

è lineare.

Lemma 3.48 *Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale V. L'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & U \times W & \to & V \\ & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \mapsto & \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{array}$$

è suriettiva se e solo se $V = U + W$, è iniettiva se e solo se U e W sono in somma diretta ed è un isomorfismo se e solo se $V = U \oplus W$.

In generale, siano dati $W_1, \ldots, W_h$ sottospazi vettoriali di V. Allora, l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f\colon & W_1 \times \cdots \times W_h & \to & V \\ & (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_h) & \mapsto & \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_h \end{array}$$

è suriettiva se e solo se $V = W_1 + \cdots + W_h$, è iniettiva se e solo se $W_1, \ldots, W_h$ sono in somma diretta ed è un isomorfismo se e solo se $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_h$.

Dim. Notiamo subito che $\operatorname{Im} f = U + W$. Quindi, f è suriettiva se e solo se $U + W = V$. Inoltre

$$\ker f = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in U \times W \ : \ \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{w}\} = \{(\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{u}) \text{ con } \boldsymbol{u} \in U \cap W\}.$$

Quindi, f è iniettiva se e solo se $\ker f = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$ e dunque se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ ovvero se e solo se U e W sono in somma diretta.

Nel caso generale è chiaro che $\operatorname{Im} f = W_1 + \ldots + W_h$. Inoltre, $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$ se e solo se esistono $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_h \in W_h$ non tutti nulli tali che $\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_h = \mathbf{0}$. Sia $1 \leq i \leq h$ tale che $\boldsymbol{w}_i \neq \mathbf{0}$. Allora

$$W_i \ni -\boldsymbol{w}_i = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{w}_j \in \sum_{j \neq i} W_j$$

e quindi i W_i non sono in somma diretta. ■

Osservazione 3.49 *In questa osservazione vogliamo dedurre la formula di Grassman dal teorema di nullità più rango. Siano U e $W \subset V$ sottospazi vettoriali. Sia f definita come nell'Esempio 3.9.1. Dal Lemma 3.48 sappiamo che* $\operatorname{Im} f = U + W$. *Risulta dal teorema di nullità più rango 3.11 applicato ad f*

$$\dim U + \dim W = \dim U \times W = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(U \cap W) + \dim U + W.$$

La prima uguaglianza segue dalla §2.2.4. Consideriamo l'applicazione $g\colon U \cap W \to U \times W$, definita da $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{u})$. Si verifica facilmente che tale applicazione è lineare ed iniettiva. Segue dalla dimostrzaione del Lemma 3.48 che $\operatorname{Im} g = \ker f$. *Applicando il teorema di nullità più rango 3.11 a g e usando che* $\dim \ker g = \dim\{\mathbf{0}\} = 0$ *otteniamo allora che*

$$\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} g = \dim U \cap W.$$

Mettendo insieme i due risultati otteniamo la formula di Grassman:

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U + W.$$

■