Applicazioni lineari

maurizio candilera

October 1, 2018

Definizione di applicazione lineare

Le applicazioni lineari (dette anche *omomorfismi di spazi vettoriali*) sono le applicazioni *naturali* tra gli spazi vettoriali, ovvero quelle che rispettano le operazioni tra i vettori.

Definizione

Siano V e W spazi vettoriali su K. Un'*applicazione* $\phi : V \to W$ si dice *lineare* se, per ogni coppia di vettori v_1, v_2 in V e ogni coppia di scalari a_1, a_2 in K, si ha $\phi(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 \phi(v_1) + a_2 \phi(v_2)$.
Un'applicazione lineare biiettiva è un *isomorfismo* di spazi vettoriali.

Si verifica facilmente che, date due applicazioni K-lineari $\phi : V \to W$ e $\psi : V \to W$, la loro somma è un'applicazione lineare, così come lo è $a\phi$ per $a \in K$. Dunque l'insieme $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ di tutte le applicazioni lineari di V su W è uno spazio vettoriale su K.
Per ogni K-spazio vettoriale, V, l'applicazione identica $\mathrm{id}_V : V \to V$, definita da $\mathrm{id}_V(v) = v$ per ogni $v \in V$, è un'applicazione lineare e, se $\psi : U \to V$ e $\phi : V \to W$ sono applicazioni lineari, anche l'applicazione composta $\phi \circ \psi$ è lineare.
Infine, se un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ è biiettiva, l'applicazione inversa $\phi^{-1} : W \to V$ è anch'essa lineare.

Vediamo alcuni esempi di applicazioni lineari.

- Sia $D : K[X] \to K[X]$ l'applicazione che ad ogni polinomio $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ associa la sua derivata, $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$. Si tratta di un'applicazione lineare, infatti $D(aP + bQ) = aD(P) + bD(Q)$, come si verifica facilmente dalla definizione data.
- Sia $\phi : K[X] \to \mathscr{F}(K, K)$ l'applicazione che ad ogni polinomio $P(X)$ associa la funzione $x \mapsto P(x)$, al variare di $x \in K$. Si tratta di un'applicazione lineare. Se $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o, più in generale, è un campo con infiniti elementi, allora ϕ è un'applicazione iniettiva. Se $K = \mathbb{F}_q$, il campo con $q = p^h$ elementi, allora ϕ è suriettiva, ma non iniettiva: infatti $\phi(X^q - X) = 0 = \phi(0)$.
- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathbb{R}$-lineare, e sia $m = f(1)$; allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $x = x1$ e quindi $f(x) = xf(1) = mx$. Quindi tra le funzioni reali di una variabile reale, le funzioni lineari sono quelle il cui grafico è una retta per l'origine (non verticale); ovvero le funzioni il cui grafico è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

- In $\mathbb{R}^3$, siano $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x - 2y + z = 0 \right\}$ e $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. U è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 e $v_0 \notin U$. Preso un vettore generico $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, vogliamo calcolare l' "ombra" che v proietta su U parallelamente al vettore v_0. Vogliamo determinare la funzione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che a v associa $\pi(v) = v - cv_0$ ove la costante $c \in \mathbb{R}$ è determinata in modo che $\pi(v) \in U$.

$$v - cv_0 = \begin{pmatrix} x_1 - c \\ x_2 - 2c \\ x_3 - 2c \end{pmatrix} \in U \iff 3(x_1 - c) - 2(x_2 - 2c) + (x_3 - 2c) = 0$$
$$\iff c = 3x_1 - 2x_2 + x_3.$$

Dunque $\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -6x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ ed è un'applicazione lineare. Infatti

$$\pi \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ ax_3 + by_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(ax_1 + by_1) + 2(ax_2 + by_2) - (ax_3 + by_3) \\ -6(ax_1 + by_1) + 5(ax_2 + by_2) - 2(ax_3 + by_3) \\ -6(ax_1 + by_1) + 4(ax_2 + by_2) - (ax_3 + by_3) \end{pmatrix} =$$
$$= a \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -6x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2y_1 + 2y_2 - y_3 \\ -6y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ -6y_1 + 4y_2 - y_3 \end{pmatrix} = a\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b\pi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Nucleo e Immagine

Ad ogni applicazione lineare $\phi : V \to W$ di K-spazi vettoriali, restano associati due sottospazi, che saranno utili per caratterizzarla.

Definizione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali. Si definiscono i sottoinsiemi

$$\ker \phi = \{\, v \in V \mid \phi(v) = 0_W \,\} \qquad \text{il } \textit{nucleo} \text{ di } \phi$$
$$\operatorname{im} \phi = \{\, w \in W \mid w = \phi(v),\ v \in V \,\} \qquad \text{l'}\textit{immagine} \text{ di } \phi.$$

Le proprietà di nucleo e immagine sono descritte nella seguente

Proposizione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali. Allora

(a) $\ker \phi$ è un sottospazio vettoriale di V e $\operatorname{im} \phi$ è un sottospazio di W.

(b) ϕ è iniettiva se, e solo se, $\ker \phi = \langle 0_V \rangle$.

(c) ϕ è suriettiva se, e solo se, $\operatorname{im} \phi = W$.

dim. (*a*) Osserviamo che $\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0) + \phi(0)$; sommando ai due membri dell'uguaglianza $-\phi(0)$ si deduce che $\phi(0_V) = 0_W$. e quindi che $0 \in \ker \phi$. È quindi sufficiente verificare che vale una delle condizioni equivalenti che definiscono un sottospazio: dati v_1, v_2 in $\ker \phi$ e a_1, a_2 in K, si ha

$$\phi(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 \phi(v_1) + a_2 \phi(v_2) = 0 + 0 = 0$$

e quindi $a_1 v_1 + a_2 v_2 \in \ker \phi$ che è perciò un sottospazio.

dim. (*a*) Osserviamo che $\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0) + \phi(0)$; sommando ai due membri dell'uguaglianza $-\phi(0)$ si deduce che $\phi(0_V) = 0_W$. e quindi che $0 \in \ker\phi$. È quindi sufficiente verificare che vale una delle condizioni equivalenti che definiscono un sottospazio: dati v_1, v_2 in $\ker\phi$ e a_1, a_2 in K, si ha

$$\phi(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\phi(v_1) + a_2\phi(v_2) = 0 + 0 = 0$$

e quindi $a_1v_1 + a_2v_2 \in \ker\phi$ che è perciò un sottospazio.
Passando all'immagine, $0_W \in \operatorname{im}\phi$, e siano dati w_1, w_2 in $\operatorname{im}\phi$ e a_1, a_2 in K. Allora esistono v_1, v_2 in V tali che $w_1 = \phi(v_1)$ e $w_2 = \phi(v_2)$, per cui

$$a_1w_1 + a_2w_2 = a_1\phi(v_1) + a_2\phi(v_2) = \phi(a_1v_1 + a_2v_2) \in \operatorname{im}\phi,$$

che chiude la verifica che anche $\operatorname{im}\phi$ è un sottospazio.

dim. (*a*) Osserviamo che $\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0) + \phi(0)$; sommando ai due membri dell'uguaglianza $-\phi(0)$ si deduce che $\phi(0_V) = 0_W$. e quindi che $0 \in \ker \phi$. È quindi sufficiente verificare che vale una delle condizioni equivalenti che definiscono un sottospazio: dati v_1, v_2 in $\ker \phi$ e a_1, a_2 in K, si ha

$$\phi(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 \phi(v_1) + a_2 \phi(v_2) = 0 + 0 = 0$$

e quindi $a_1 v_1 + a_2 v_2 \in \ker \phi$ che è perciò un sottospazio.
Passando all'immagine, $0_W \in \operatorname{im} \phi$, e siano dati w_1, w_2 in $\operatorname{im} \phi$ e a_1, a_2 in K. Allora esistono v_1, v_2 in V tali che $w_1 = \phi(v_1)$ e $w_2 = \phi(v_2)$, per cui

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 = a_1 \phi(v_1) + a_2 \phi(v_2) = \phi(a_1 v_1 + a_2 v_2) \in \operatorname{im} \phi,$$

che chiude la verifica che anche $\operatorname{im} \phi$ è un sottospazio.

(*b*) Essendo $\phi(0) = 0$, se ϕ è iniettiva, si ha $\phi(v) \neq 0$ per ogni $v \neq 0$ e quindi $\ker \phi = \langle 0 \rangle$. Viceversa, se $\ker \phi = \langle 0 \rangle$ e $\phi(v_1) = \phi(v_2)$, allora

$$\phi(v_1 - v_2) = \phi(v_1) - \phi(v_2) = 0, \qquad \text{per cui } v_1 - v_2 \in \ker \phi = \langle 0 \rangle\,,$$

ovvero $v_1 - v_2 = 0$ e quindi $v_1 = v_2$. Dunque ϕ è iniettiva.

(*c*) Non c'entra l'algebra lineare: è la definizione di applicazione suriettiva. □

La verifica di iniettività o suriettività di un'applicazione lineare si può quindi ridurre al calcolo delle dimensioni di nucleo ed immagine. Un risultato utile è la seguente

Proposizione (Formula delle dimensioni)

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali di dimensione finita. Allora

$$\dim_K V = \dim_K \ker\phi + \dim_K \operatorname{im}\phi.$$

La verifica di iniettività o suriettività di un'applicazione lineare si può quindi ridurre al calcolo delle dimensioni di nucleo ed immagine. Un risultato utile è la seguente

Proposizione (Formula delle dimensioni)

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali di dimensione finita. Allora

$$\dim_K V = \dim_K \ker \phi + \dim_K \mathrm{im}\, \phi.$$

dim. Sia $v_1, \dots, v_k$ una base di $\ker \phi$ (nessun vettore se $\ker \phi = \langle 0 \rangle$) e completiamola ad una base $v_1, \dots, v_n$ di V. Per concludere è sufficiente mostrare che

$$\boxed{\text{i vettori } w_{k+1} = \phi(v_{k+1}), \dots, w_n = \phi(v_n) \text{ sono una base di } \mathrm{im}\, \phi.}$$

Sia $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ in V e $w = \phi(v) \in \mathrm{im}\, \phi$; essendo $v_1, \dots, v_k \in \ker \phi$, si ha

$$w = \phi(v) = x_{k+1}\phi(v_{k+1}) + \cdots + x_n \phi(v_n) = x_{k+1} w_{k+1} + \cdots + x_n w_n,$$

e $\mathrm{im}\, \phi = \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle$. Se poi $a_{k+1} w_{k+1} + \cdots + a_n w_n = 0$, allora $a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n \in \ker \phi$ e perciò si scrive come $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$, perché $v_1, \dots, v_k$ è una base di $\ker \phi$. Dunque

$$(a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k) - (a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n) = 0,$$

da cui si deduce che $a_1 = \cdots = a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$ perché i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Definizione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali di dimensione finita. Si chiama *rango* di ϕ il numero intero $\operatorname{rk}\phi = \dim_K \operatorname{im}\phi$.
Si chiama *nullità* di ϕ il numero intero $\operatorname{null}\phi = \dim_K \ker\phi$.

Date due applicazioni lineari, dalla Formula delle dimensioni si ricava una relazione tra i ranghi delle due applicazioni e il rango dell'applicazione composta, ovvero

Proposizione

Siano $\psi : U \to V$ e $\phi : V \to W$ due applicazioni lineari. Allora $\operatorname{rk}(\phi\circ\psi) \leq \min\{\operatorname{rk}\psi, \operatorname{rk}\phi\}$ e vale l'uguaglianza se una delle due è invertibile.

dim. Si ha $\operatorname{im}(\phi\circ\psi) \subseteq \operatorname{im}\phi$ e quindi $\operatorname{rk}(\phi\circ\psi) \leq \operatorname{rk}\phi$. Inoltre, $\operatorname{im}(\phi\circ\psi) = \operatorname{im}(\phi_{|\operatorname{im}\psi})$, ovvero è l'immagine della restrizione di ϕ al sottospazio $\operatorname{im}\psi$. Per la formula delle dimensioni,

$$\operatorname{rk}\phi_{|\operatorname{im}\psi} = \dim\operatorname{im}\psi - \dim\ker(\phi_{|\operatorname{im}\psi}) \leq \dim\operatorname{im}\psi = \operatorname{rk}\psi;$$

e prova la disuguaglianza. Inoltre $\ker(\phi_{|\operatorname{im}\psi}) = \ker\phi \cap \operatorname{im}\psi$; per cui, se ϕ è invertibile, $\ker\phi = \langle 0\rangle$ e $\dim\operatorname{im}(\phi_{|\operatorname{im}\psi}) = \dim\operatorname{im}\psi = \operatorname{rk}\psi \leq \dim V = \operatorname{rk}\phi$.

Infine, se ψ ìnvertibile, è suriettiva, per cui $\operatorname{im}\phi_{|\operatorname{im}\psi} = \operatorname{im}\phi$ e $\operatorname{rk}(\phi_{|\operatorname{im}\psi}) = \operatorname{rk}\phi \leq \dim V = \operatorname{rk}\psi$. $\square$

Controimmagine di un vettore

Definizione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali. Fissato un vettore $w_0 \in W$ la *controimmagine* di w_0 è il sottoinsieme

$$\phi^{-1}(w_0) = \{ v \in V \mid \phi(v) = w_0 \}.$$

La notazione è ambigua, perché potrebbe far pensare alla funzione inversa di ϕ (che **può non esistere**) ma la utilizziamo perché è quella comunemente usata. In generale, la controimmagine è un sottoinsieme di V, ma in un caso particolare è un sottospazio vettoriale: $\phi^{-1}(0_W) = \ker \phi$.

Controimmagine di un vettore

Definizione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali. Fissato un vettore $w_0 \in W$ la *controimmagine* di w_0 è il sottoinsieme

$$\phi^{-1}(w_0) = \{ \, v \in V \mid \phi(v) = w_0 \, \} \, .$$

La notazione è ambigua, perché potrebbe far pensare alla funzione inversa di ϕ (che **può non esistere**) ma la utilizziamo perché è quella comunemente usata. In generale, la controimmagine è un sottoinsieme di V, ma in un caso particolare è un sottospazio vettoriale: $\phi^{-1}(0_W) = \ker \phi$.

Osservazione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali e $w_0 \in W$. Allora

$$\phi^{-1}(w_0) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } w_0 \notin \operatorname{im} \phi \\ v_0 + \ker \phi & \text{se } \exists v_0 \in V \mid \phi(v_0) = w_0 \end{cases} .$$

dim. Per definizione, $w_0 \in \operatorname{im}\phi$ se, e solo se, esiste un vettore $v_0 \in V$ tale che $\phi(v_0) = w_0$; quindi è chiaro che $\phi^{-1}(w_0) = \varnothing$ se $w_0 \notin \operatorname{im}\phi$.
Supponiamo quindi che esista un vettore $v_0 \in V$ tale che $\phi(v_0) = w_0$ e mostriamo che

$$\phi^{-1}(w_0) = \{\, v \in V \mid \phi(v) = w_0 \,\} = v_0 + \ker\phi = \{\, v_0 + u \mid u \in \ker\phi \,\}\,.$$

Preso comunque $u \in \ker\phi$, si ha $\phi(v_0 + u) = \phi(v_0) + \phi(u) = w_0$ e quindi $v_0 + \ker\phi \subseteq \phi^{-1}(w_0)$.
Viceversa, se $v \in \phi^{-1}(w_0)$, allora $v = v_0 + (v - v_0)$ e

$$\phi(v - v_0) = \phi(v) - \phi(v_0) = w_0 - w_0 = 0, \quad \text{ovvero} \quad v - v_0 \in \ker\phi,$$

da cui si ha $\phi^{-1}(w_0) \subseteq v_0 + \ker\phi$ e quindi l'uguaglianza. $\square$

dim. Per definizione, $w_0 \in \operatorname{im}\phi$ se, e solo se, esiste un vettore $v_0 \in V$ tale che $\phi(v_0) = w_0$; quindi è chiaro che $\phi^{-1}(w_0) = \varnothing$ se $w_0 \notin \operatorname{im}\phi$.
Supponiamo quindi che esista un vettore $v_0 \in V$ tale che $\phi(v_0) = w_0$ e mostriamo che

$$\phi^{-1}(w_0) = \{\, v \in V \mid \phi(v) = w_0 \,\} = v_0 + \ker\phi = \{\, v_0 + u \mid u \in \ker\phi \,\}\,.$$

Preso comunque $u \in \ker\phi$, si ha $\phi(v_0 + u) = \phi(v_0) + \phi(u) = w_0$ e quindi $v_0 + \ker\phi \subseteq \phi^{-1}(w_0)$.
Viceversa, se $v \in \phi^{-1}(w_0)$, allora $v = v_0 + (v - v_0)$ e

$$\phi(v - v_0) = \phi(v) - \phi(v_0) = w_0 - w_0 = 0, \quad \text{ovvero} \quad v - v_0 \in \ker\phi,$$

da cui si ha $\phi^{-1}(w_0) \subseteq v_0 + \ker\phi$ e quindi l'uguaglianza. □

Esempio: Se $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la proiezione $\pi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1+2x_2-x_3 \\ -6x_1+5x_2-2x_3 \\ -6x_1+4x_2-x_3 \end{pmatrix}$, la controimmagine del vettore $w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è data dalle soluzioni del sistema lineare (non-omogeneo) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

equivalente a $\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 1 \\ x_3 = 2x_1 + 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$ ovvero $\pi^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \\ 2x+1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Applicazioni lineari e basi

Un'applicazione lineare è determinata dall'immagine di una base. Diamo una prima espressione di questo fatto.

Osservazione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora

(a) ϕ è iniettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W.

(b) ϕ è suriettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ generano W.

(c) ϕ è biiettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono una base W.

Applicazioni lineari e basi

Un'applicazione lineare è determinata dall'immagine di una base. Diamo una prima espressione di questo fatto.

Osservazione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora

(a) ϕ è iniettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W.

(b) ϕ è suriettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ generano W.

(c) ϕ è biiettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono una base W.

dim. (*a*) Se $a_1\phi(v_1) + \cdots + a_n\phi(v_n) = 0$, allora $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in \ker\phi$. Dunque, $\ker\phi = \langle 0\rangle$ se, e solo se, $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

(*b*) I vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ generano $\operatorname{im}\phi$ e ϕ è suriettiva se, e solo se, $\operatorname{im}\phi = W$.

(*c*) È conseguenza diretta di (*a*) e (*b*). □

Dal punto (c) dell'enunciato discende che è possibile avere un isomorfismo *solo* tra spazi vettoriali della stessa dimensione.

In realtà un'applicazione lineare è completamente determinata dalla conoscenza dell'immagine di una base del dominio. Più precisamente vale il seguente

Teorema (struttura degli omomorfismi)

Siano V e W spazi vettoriali su K e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora, fissati arbitrariamente dei vettori $w_1, \dots, w_n$ in W, *esiste* un'*unica* applicazione lineare $\phi : V \to W$ tale che $\phi(v_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$.

In realtà un'applicazione lineare è completamente determinata dalla conoscenza dell'immagine di una base del dominio. Più precisamente vale il seguente

Teorema (struttura degli omomorfismi)

Siano V e W spazi vettoriali su K e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora, fissati arbitrariamente dei vettori $w_1, \dots, w_n$ in W, *esiste* un'*unica* applicazione lineare $\phi : V \to W$ tale che $\phi(v_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$.

dim. Abbiamo osservato che la scelta della base $\mathcal{V}$ determina un *isomorfismo* $\alpha_{\mathcal{V}} : K^n \to V$, che associa alla n-upla di coordinate $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vettore $\alpha_{\mathcal{V}}(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Dunque, definiamo $\phi : V \to W$, ponendo $\phi(v) = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n$ se $v = \alpha_{\mathcal{V}}(x)$.
Verifichiamo che si tratta di un'applicazione lineare. Se $v = \alpha_{\mathcal{V}}(x)$, $u = \alpha_{\mathcal{V}}(y)$ e $a, b \in K$, allora $av + bu = \alpha_{\mathcal{V}}(ax + by)$ perché $\alpha_{\mathcal{V}}$ è isomorfismo. Dunque,

$$\phi(av + bu) = (ax_1 + by_1)w_1 + \cdots + (ax_n + by_n)w_n = a\phi(v) + b\phi(u).$$

Inoltre, se $\psi : V \to W$ fosse un'applicazione lineare tale che $\psi(v_i) = w_i$ per $i = 1, \dots, n$, allora, se $v = \alpha_{\mathcal{V}}(x)$, per linearità si ha

$$\psi(v) = x_1\psi(v_1) + \cdots + x_n\psi(v_n) = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n = \phi(v);$$

e dunque $\psi(v) = \phi(v)$ per ogni $v \in V$. □

Matrice associata a un'applicazione lineare

Nella sezione sugli Spazi vettoriali abbiamo introdotto lo spazio vettoriale delle matrici $M_{m\times n}(K)$. Ad ogni applicazione lineare può essere associata una matrice che codifica tutte le proprietà dell'applicazione lineare.

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali e siano date una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W. Per ogni indice $j = 1, \dots, n$ il vettore $\phi(v_j)$ si scrive come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{W}$. Dunque

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ \phi(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m \end{aligned} \quad \text{e si pone} \quad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(K)$ è la *matrice di ϕ nelle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$*.

N.B.: Le n colonne di A sono le coordinate nella base $\mathcal{W}$ dei vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$.

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di K-spazi vettoriali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W.

Se $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, si ha $\phi(v_j) = \alpha_{\mathcal{W}} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, per $j = 1, \dots, n$.

Dato $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, sia $v = \alpha_{\mathcal{V}}(x) \in V$, e $\phi(v) = x_1\phi(v_1) + \dots + x_n\phi(v_n)$. Le sue coordinate nella base $\mathcal{W}$ sono date da

$$\boxed{\phi(v) = \alpha_{\mathcal{W}} \left(x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) = \alpha_{\mathcal{W}} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}$$

Tramite questa osservazione, possiamo definire il prodotto di una matrice $A \in M_{m \times n}(K)$ per una colonna $x \in K^n$, in modo che il prodotto $y = Ax \in K^m$ rappresenti proprio le coordinate del vettore $\phi(v)$ nella base $\mathcal{W}$ quando x sono le coordinate di v nella base $\mathcal{V}$ e $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.
Nella prossima slide definiremo di conseguenza il prodotto della matrice A per la colonna x.

Definizione

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m \times n}(K)$ e $x \in K^n$. Il *prodotto della matrice A per la colonna x* è uguale alla colonna $y \in K^m$, ove $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, per $i = 1, \dots, m$, ovvero $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$.

La definizione si estende per definire il *prodotto riga per colonna* tra matrici.

Definizione

Siano $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m \times n}(K)$ e $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \in M_{n \times k}(K)$. Il *prodotto AB della matrice A per la matrice B* (nell'ordine) è la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le k}} \in M_{m \times k}(K)$, le cui colonne si ottengono moltiplicando la matrice A per le rispettive colonne di B. Ovvero

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}, \quad \text{per } i = 1, \dots, m, \text{ e } j = 1, \dots, k.$$

Esempio : In un esempio iniziale, abbiamo incontrato l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni vettore v la sua proiezione ("l'ombra") sul sottospazio U, parallelamente alla direzione $\langle v_0 \rangle$; ove $U : 3x - 2y + z = 0$ e $v_0 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ (e $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$). Con calcoli diretti abbiamo ricavato

$$\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1+2x_2-x_3 \\ -6x_1+5x_2-2x_3 \\ -6x_1+4x_2-x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ciò significa

$$\pi(e_1) = \pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \pi(e_2) = \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \pi(e_3) = \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, la matrice di π nelle basi canoniche è $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Le coordinate (in base canonica) dell'immagine del vettore $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ si ottengono dal prodotto Ax, ovvero

$$Ax = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Continua : Risolvendo l'equazione cartesiana possiamo ricavare una base di U, $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Inoltre, le coordinate di $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ non soddisfano l'equazione di U e quindi $U \cap \langle v_0 \rangle = \langle 0 \rangle$, da cui, per motivi di dimensione, si deduce $\mathbb{R}^3 = U \oplus \langle v_0 \rangle$. Quindi, posto $u_3 = v_0$, si ha una base $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Andiamo a calcolare la matrice di π rispetto alle possibili coppie di basi.

$$\pi(u_1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2$ e $\pi(u_3) = 0$.
Osserviamo infine che, con calcoli diretti, si ha, $\pi(e_1) = -u_1 - 3u_2$, $\pi(e_2) = u_1 + 2u_2$ e $\pi(e_3) = -\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$.
Possiamo quindi scrivere le matrici

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1/2 \\ -3 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come si può notare, le matrici di una stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse possono cambiare, perché uno stesso vettore (non nullo) ha coordinate diverse rispetto a basi diverse.

Continua : Da ciascuna delle diverse matrici possiamo leggere le proprietà dell'applicazione lineare π, tenendo presente le basi rispetto a cui viene scritta. Ad esempio, il vettore $v_0 = u_3$ è una base del nucleo di π. L'informazione è evidente nelle matrici $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(\pi)$ e $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi)$, ma poteva essere ricavata da $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, risolvendo il sistema $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Richiamando la metafora dell'ombra: quando il bastoncino, applicato nell'origine, è parallelo ai raggi del sole è naturale che l'ombra si riduca al punto di applicazione.
Ugualmente, l'immagine è generata dalle immagini dei vettori di una qualunque base, ed è quindi $U = \langle u_1, u_2 \rangle = \operatorname{im}\pi$. Anche questo è coerente con la metafora, ovvero che tutte le ombre vadano a finire sullo "schermo" U.
In ogni caso, le coordinate nella base d'arrivo delle immagini di una base sono le colonne della matrice e quindi possiamo scrivere

$$\operatorname{im}\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{in base } \mathcal{E},$$

$$\operatorname{im}\pi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{in base } \mathcal{U}.$$

Prodotto di matrici e composizione di omomorfismi

Siano date due applicazioni lineari $\psi : U \to V$ e $\phi : V \to W$ di K-spazi vettoriali e siano $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi dei rispettivi spazi. L'applicazione composta $\phi \circ \psi : U \to W$ è un'applicazione lineare e c'è una relazione fondamentale tra le matrici di queste applicazioni. Precisamente

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi \circ \psi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)\, \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi)}$$

Infatti, per $j = 1, \dots, k$, la j-esima colonna di $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi \circ \psi)$ contiene le coordinate in base $\mathcal{W}$ del vettore $\phi(\psi(u_j))$. Per quanto visto sul prodotto di matrici per colonne, le coordinate cercate si possono ottenere moltiplicando la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per la colonna delle coordinate in base $\mathcal{V}$ del vettore $\psi(u_j)$, ovvero per la j-esima colonna della matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi)$. Questo è proprio il prodotto tra matrici definito sopra.

Facciamo il punto sul prodotto di matrici.

Le matrici in $M_{m\times n}(K)$ formano un K-spazio vettoriale, quindi l'operazione di somma gode delle usuali proprietà: associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro e dell'opposto. Abbiamo poi introdotto il prodotto riga per colonna

$$M_{m\times n}(K) \times M_{n\times k}(K) \to M_{m\times k}(K),$$
$$(A, B) \mapsto AB$$

e vogliamo passare in rassegna brevemente alcune delle sue proprietà.

- Per poter fare il prodotto AB, il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B.

Facciamo il punto sul prodotto di matrici.

Le matrici in $M_{m\times n}(K)$ formano un K-spazio vettoriale, quindi l'operazione di somma gode delle usuali proprietà: associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro e dell'opposto. Abbiamo poi introdotto il prodotto riga per colonna

$$\begin{aligned} M_{m\times n}(K) \times M_{n\times k}(K) &\to M_{m\times k}(K), \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

e vogliamo passare in rassegna brevemente alcune delle sue proprietà.

- Per poter fare il prodotto AB, il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B.
- Il prodotto è associativo: $(AB)C = A(BC)$.

Facciamo il punto sul prodotto di matrici.

Le matrici in $M_{m\times n}(K)$ formano un K-spazio vettoriale, quindi l'operazione di somma gode delle usuali proprietà: associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro e dell'opposto. Abbiamo poi introdotto il prodotto riga per colonna

$$M_{m\times n}(K) \times M_{n\times k}(K) \to M_{m\times k}(K),$$
$$(A, B) \mapsto AB$$

e vogliamo passare in rassegna brevemente alcune delle sue proprietà.

- Per poter fare il prodotto AB, il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B.
- Il prodotto è associativo: $(AB)C = A(BC)$.
- Il prodotto è distributivo: $(D + E)F = DF + EF$ e $D(F + G) = DF + DG$.

Facciamo il punto sul prodotto di matrici.

Le matrici in $M_{m\times n}(K)$ formano un K-spazio vettoriale, quindi l'operazione di somma gode delle usuali proprietà: associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro e dell'opposto. Abbiamo poi introdotto il prodotto riga per colonna

$$\begin{gathered} M_{m\times n}(K) \times M_{n\times k}(K) \to M_{m\times k}(K), \\ (A, B) \mapsto AB \end{gathered}$$

e vogliamo passare in rassegna brevemente alcune delle sue proprietà.

- Per poter fare il prodotto AB, il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B.
- Il prodotto è associativo: $(AB)C = A(BC)$.
- Il prodotto è distributivo: $(D + E)F = DF + EF$ e $D(F + G) = DF + DG$.
- Esistono elementi neutri: Fissato $1 \le k \in \mathbb{Z}$, sia $\mathbf{1}_k = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le k} \in M_k(K)$, ove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Allora $\mathbf{1}_m A = A = A\mathbf{1}_n$, per ogni $A \in M_{m\times n}(K)$.

Facciamo il punto sul prodotto di matrici.

Le matrici in $M_{m\times n}(K)$ formano un K-spazio vettoriale, quindi l'operazione di somma gode delle usuali proprietà: associativa, commutativa, esistenza dell'elemento neutro e dell'opposto. Abbiamo poi introdotto il prodotto riga per colonna

$$M_{m\times n}(K) \times M_{n\times k}(K) \to M_{m\times k}(K),$$
$$(A, B) \mapsto AB$$

e vogliamo passare in rassegna brevemente alcune delle sue proprietà.

- Per poter fare il prodotto AB, il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B.
- Il prodotto è associativo: $(AB)C = A(BC)$.
- Il prodotto è distributivo: $(D + E)F = DF + EF$ e $D(F + G) = DF + DG$.
- Esistono elementi neutri: Fissato $1 \le k \in \mathbb{Z}$, sia $\mathbf{1}_k = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le k} \in M_k(K)$, ove $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Allora $\mathbf{1}_m A = A = A\mathbf{1}_n$, per ogni $A \in M_{m\times n}(K)$.
- il prodotto non è commutativo: ad esempio
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qualche verifica e qualche esempio: Prendiamo le matrici $A \in M_{2\times 4}(\mathbb{Q})$ e $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{Q})$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q}),$$

ma non si può fare il prodotto BA.

Qualche verifica e qualche esempio : Prendiamo le matrici $A \in M_{2\times 4}(\mathbb{Q})$ e $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{Q})$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q}),$$

ma non si può fare il prodotto BA.

Verificare l'associatività del prodotto corrisponde a spostare l'ordine di due sommatorie (utilizzando le proprietà delle operazioni tra scalari). Siano

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(K),\ B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} \in M_{n\times k}(K),\ C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le h}} \in M_{k\times h}(K)$$

L'elemento di posto (i,j) del prodotto $(AB)C$ è

$$\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}\right)c_{rj} = \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{k} a_{is}b_{sr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{r=1}^{k} b_{sr}c_{rj}\right)$$

e quest'ultimo è l'elemento di posto (i,j) del prodotto $A(BC)$.

continua : La verifica delle due proprietà distributive è simile alla verifica precedente; ne scriviamo una lasciando l'altra al lettore. Siano

$$D = (d_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \ E = (e_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \text{ in } M_{m \times n}(K) \quad \text{e} \quad F = (f_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M_{n \times k}(K),$$

L'elemento di posto (i, j) del prodotto $(D + E)F$ è

$$\sum_{s=1}^{n} (d_{is} + e_{is}) f_{sj} = \sum_{s=1}^{n} (d_{is} f_{sj} + e_{is} f_{sj}) = \sum_{s=1}^{n} d_{is} f_{sj} + \sum_{s=1}^{n} e_{is} f_{sj}$$

e quest'ultimo è l'elemento di posto (i, j) della somma $DF + EF$.

continua : La verifica delle due proprietà distributive è simile alla verifica precedente; ne scriviamo una lasciando l'altra al lettore. Siano

$$D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},\ E = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ in } M_{m \times n}(K) \quad \text{e} \quad F = (f_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{n \times k}(K),$$

L'elemento di posto (i, j) del prodotto $(D + E)F$ è

$$\sum_{s=1}^{n}(d_{is} + e_{is})f_{sj} = \sum_{s=1}^{n}(d_{is}f_{sj} + e_{is}f_{sj}) = \sum_{s=1}^{n} d_{is}f_{sj} + \sum_{s=1}^{n} e_{is}f_{sj}$$

e quest'ultimo è l'elemento di posto (i, j) della somma $DF + EF$.

Per quanto riguarda l'elemento neutro: l'elemento di posto (i, j) del prodotto $\mathbf{1}_m A$ è

$$\sum_{s=1}^{m} \delta_{is}a_{sj} = a_{ij}, \qquad \text{perché } \delta_{is} = 0 \text{ per } s \neq i.$$

Analogamente si verifica che $A\mathbf{1}_n = A$.

NOTA BENE: Se V e W sono spazi vettoriali su K e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ delle basi, associare ad ogni applicazione lineare $\phi : V \to W$ la sua matrice (nelle basi fissate), determina un isomorfismo di spazi vettoriali

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to M_{m\times n}(K).$$

Useremo questo isomorfismo in entrambi i sensi: sia per dedurre le proprietà di un'applicazione lineare dalla sua matrice, sia per ottenere proprietà di alcune matrici dalle applicazioni lineari ad esse associate.

Esempio: Ricordando la definizione di rango di un'applicazione lineare, definiamo il rango di una matrice A (in simboli $\operatorname{rk} A$) come il massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti. Se $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, le colonne di A sono le coordinate (in base $\mathcal{W}$) dei vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ che *generano* $\operatorname{im} \phi$. Dunque, poiché da ogni insieme di generatori si può estrarre una base, il massimo numero di colonne indipendenti è proprio la dimensione dell'immagine di ϕ. Abbiamo dimostrato:

Osservazione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Prese comunque le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W, e posto $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, si ha $\operatorname{rk} \phi = \operatorname{rk} A$.

Matrice trasposta

Data una matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(K)$, la trasposta di A è la matrice ${}^tA \in M_{n\times m}(K)$ che si ottiene scambiando le righe di A con le colonne; ovvero, l'elemento di posto (i,j) di ${}^tA$ è a_{ji}, per ogni i e j, con $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$.

Ad esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ e ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{Q})$.

È chiaro che $\boxed{{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB}$ e $\boxed{{}^t(cA) = c\,{}^tA}$, per ogni $A, B \in M_{m\times n}(K)$ e ogni $c \in K$. Quindi si ha un'applicazione lineare $\tau : M_{m\times n}(K) \to M_{n\times m}(K)$ definita da $\tau(A) = {}^tA$. Inoltre, essendo $\boxed{{}^t({}^tA) = A, \text{ per ogni } A \in M_{m\times n}(K)}$, τ è un isomorfismo che coincide con la sua applicazione inversa.

Si ha inoltre $\boxed{{}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)}$. Infatti, l'elemento di posto (i,j) di ${}^t(AB)$ è $\sum_{h=1}^{n} a_{jh} b_{hi}$, ed è proprio il prodotto della riga i di ${}^tB$ per la colonna j di ${}^tA$.

Vedremo nel seguito che $\boxed{\operatorname{rk}{}^tA = \operatorname{rk} A \text{ per ogni matrice } A \in M_{m\times n}(K)}$.

Matrici invertibili

Ricordando la relazione tra prodotto di matrici e composizione di applicazioni lineari, possiamo dedurre che, per ogni coppia di fattori, si ha $\boxed{\operatorname{rk}(AB) \le \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}}$ e vale l'uguale se una delle due matrici è invertibile.

Si osservi inoltre, che $\boxed{\text{se } A \in M_{m\times n}(K), \text{ allora } \operatorname{rk} A \le \min\{m, n\}}$. Infatti, se $n \le m$, il rango non può superare n, visto che A ha n colonne in tutto. Se, $m \le n$, il rango non può superare m, perché tutte le colonne di A appartengono a K^m e un sottospazio non può avere dimensione maggiore di tutto lo spazio.

Definizione

Una matrice $A \in M_{m\times n}(K)$ si dice

- *invertibile a destra* se esiste una matrice $B \in M_{n\times m}(K)$ tale che $AB = \mathbf{1}_m$;
- *invertibile a sinistra* se esiste una matrice $C \in M_{n\times m}(K)$ tale che $CA = \mathbf{1}_n$;
- *invertibile* se è invertibile sia a destra che a sinistra.

Dalle osservazioni precedenti, discende che A non può essere invertibile se $m \ne n$. Se $m < n$ e A fosse invertibile a sinistra, si avrebbe $n = \operatorname{rk} \mathbf{1}_n \le \operatorname{rk} A \le m < n$, che è assurdo (si ragiona analogamente se $n < m$).

Si osservi, inoltre, che se $A \in M_n(K)$ è invertibile, e $AB = \mathbf{1}_n = CA$, allora

$$C = C\mathbf{1}_n = C(AB) = (CA)B = \mathbf{1}_n B = B.$$

In tal caso si scrive A^{-1} per indicare l'unica inversa di A.

Potremmo rafforzare le condizioni sul rango per l'invertibilità, ma possiamo affrontare meglio il problema di determinare le matrici invertibili, a destra o a sinistra, *traducendolo* in termini di applicazioni lineari.

Proposizione

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra K-spazi vettoriali di dimensione finita. Allora

(a) esiste un'applicazione lineare $\psi : W \to V$ tale che $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ se, e solo se, ϕ è suriettiva.

(b) esiste un'applicazione lineare $\chi : W \to V$ tale che $\chi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ se, e solo se, ϕ è iniettiva.

(c) esiste un'applicazione lineare $\phi^{-1} : W \to V$ tale che $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_W$ e $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_V$ se, e solo se, ϕ è biiettiva.

dim. (*a*) Se una tale ψ esiste, allora, per ogni $w \in W$, si ha $w = \phi(\psi(w))$, e quindi $W = \operatorname{im} \phi$. Viceversa, sia ϕ suriettiva e sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Per definire un'applicazione lineare $\psi : W \to V$ è sufficiente determinare $\psi(w_1), \dots, \psi(w_m)$ (Teorema di struttura degli omomorfismi). Per ogni $i = 1, \dots, m$, scegliamo un vettore $v_i \in \phi^{-1}(w_i) \neq \varnothing$ (ϕ è suriettiva). Allora, per costruzione, si ha

$$\phi(\psi(w_i)) = \phi(v_i) = w_i = \mathrm{id}_W(w_i) \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Dunque, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ perché le due applicazioni lineari coincidono su una base di W.

(*b*) Se una tale χ esiste, allora, per ogni $v \in V$, $v \neq 0$, si ha $0 \neq v = \chi(\phi(v))$, per cui $\phi(v) \neq 0$; quindi $\ker \phi = \langle 0 \rangle$. Viceversa, sia ϕ iniettiva e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora i vettori $w_1 = \phi(v_1), \dots, w_n = \phi(v_n)$, sono linearmente indipendenti in W e posso quindi completarli a una base $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W. Allora possiamo definire $\chi : W \to V$ ponendo $\chi(w_1) = v_1, \dots, \chi(w_n) = v_n$ e scegliendo arbitrariamente in V i vettori $\chi(w_{n+1}), \dots, \chi(w_m)$. Come prima, per costruzione,

$$\chi(\phi(v_i)) = \chi(w_i) = v_i = \mathrm{id}_V(v_i) \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Dunque, $\chi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ perché le due applicazioni lineari coincidono su una base di V.

(*c*) Per quanto visto nei punti precedenti, ϕ è biiettiva se, e solo se, esistono delle applicazioni lineari $\psi : W \to V$ e $\chi : W \to V$ tali che $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ e $\chi \circ \phi = \mathrm{id}_V$. Vogliamo vedere che ψ e χ coincidono. Fissata una base $\{V_1, \dots, V_v\}n$ di V, i vettori $w_1 = \phi(v_1), \dots, w_n = \phi(v_n)$, sono una base di W e, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha

$$\chi(w_i) = \chi(\phi(v_i) = v_i \qquad \text{e} \qquad \phi(\psi(w_i) = \phi(v_i) = w_i = \phi(v_i), \text{ per cui } \psi(w_i) = v_i$$

perché ϕ è iniettiva. Allora $\psi = \chi$, perché coincidono su una base di W. □

Possiamo tradurre nel linguaggio delle matrici la Proposizione precedente, ovvero

Proposizione

Sia $A \in M_{m\times n}(K)$. Allora

(a) A è invertibile a destra se, e solo se, $\mathrm{rk}\, A = m \leq n$.

(b) A è invertibile a sinistra se, e solo se, $\mathrm{rk}\, A = n \leq m$.

(c) A è invertibile se, e solo se, $\mathrm{rk}\, A = n = m$. In tal caso l'inversa A^{-1} è unica.

Rivedendo con cura la dimostrazione fatta, il lettore può convincersi che, per $n \neq m$, le eventuali inverse destre o sinistre *non* sono uniche.

Fissato uno spazio vettoriale V su K, le applicazioni lineari invertibili (biiettive) $\phi : V \to V$ formano un gruppo rispetto all'operazione di composizione di funzioni. Indicheremo con il simbolo $\mathrm{GL}(V)$ questo gruppo, ovvero

$$\mathrm{GL}(V) = \{\, \phi \in \mathsf{Hom}_K(V, V) \mid \phi \text{ è invertibile} \,\}.$$

Fissata una base $\mathcal{V}$ di V, l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \mathsf{Hom}_K(V, V) \to M_n(K)$ identifica $\mathrm{GL}(V)$ con il gruppo delle matrici invertibili di ordine n (l'operazione è il prodotto riga per colonna), detto anche il *gruppo lineare (generale)* di ordine n

$$\mathrm{GL}(n, K) = \{\, A \in M_n(K) \mid A \text{ è invertibile} \,\}.$$

Matrici di cambiamento di base

Le matrici invertibili sono matrici di applicazioni lineari invertibili, ma c'è un altro modo di pensare a queste matrici che può rivelarsi utile: pensarle come *matrici di cambiamento di base*; ovvero matrici dell'applicazione identica.

Proposizione

Siano V uno spazio vettoriale su K e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ basi di V. Si chiamano *matrici di cambiamento di base* le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)$ e $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$.

Se $x \in K^n$ è la colonna di coordinate del vettore v nella base $\mathcal{V}$ ($v = \alpha_{\mathcal{V}}(x)$), allora $y = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)x$ è la colonna di coordinate dello stesso v in base $\mathcal{W}$ ($v = \alpha_{\mathcal{W}}(y)$).

Osserviamo che, in base alle definizioni, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{1}_n = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)$ e, ricordando la relazione tra prodotto di matrici e composizione di funzioni, si ricava che

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{1}_n$$

e, analogamente, $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{1}_n$, per cui le due matrici di cambiamento di base sono invertibili e $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)^{-1}$.
Abbiamo visto che una matrice $A \in M_n(K)$ è invertibile se, e solo se, ha rango n, ovvero se, e solo se le sue colonne sono una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di K^n. Dunque $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{K^n})$ e ogni matrice invertibile è una matrice di cambiamento di base.

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ due basi.

(a) Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ dell'omomorfismo $\phi\colon V \to W$, definito ponendo

$$\phi(v_1 - 2v_2) = w_1 - w_2, \qquad \phi(v_2 + v_4) = 2w_2 - 6w_3,$$
$$\phi(-2v_1 + 4v_2 + v_4) = -2w_1 + 2w_2, \qquad \phi(v_3 + 2v_4) = w_2 - 3w_3.$$

(b) Si determinino dimensioni e basi per $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$.

(c) Si determini l'insieme $\phi^{-1}(w_1 - 3w_3)$.

Svolg.: (*a*) I quattro vettori $v_1' = v_1 - 2v_2$, $v_2' = v_2 + v_4$, $v_3' = -2v_1 + 4v_2 + v_4$, $v_4' = v_3 + 2v_4$, sono una base $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_4'\}$ di V [fare la verifica!] e le condizioni date permettono di scrivere la matrice $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}}(\phi)$. Ricordando che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}}(\phi)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{id}_V)$, dobbiamo determinare la matrice di cambiamento di base, ovvero esprimere i vettori della base $\mathcal{V}$ in funzione dei vettori di $\mathcal{V}'$. Con un calcolo diretto si ha

$$v_1 = -3v_1' + 2v_2' - 2v'3, \quad v_2 = -2v_1' + v_2' - v_3', \quad v_3 = -4v_1' - 2v_3' + v_4', \quad v_4 = 2v_1' + v_3';$$

dunque

$$\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -12 & -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

[segue]

Continua

(*b*) Guardando alle colonne delle matrici di ϕ, si vede che $\mathrm{im}\,\phi = \langle w_1 - w_2, w_2 - 3w_3 \rangle$ e i generatori sono una base. Tramite la Formula delle dimensioni si deduce che $\dim \ker \phi = 2$. Inoltre, le coordinate in base $\mathcal{V}$ dei vettori del nucleo sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -12x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{dunque} \qquad \ker \phi = \langle v_2 - 2v_3, v_4 \rangle\,.$$

(*c*) Per quanto visto nel punto precedente $w_1 - 3w_3 = (w_1 - w_2) + (w_2 - 3w_3) \in \mathrm{im}\,\phi$. Dunque la controimmagine del vettore non è vuota e, dalle condizioni date, si ricava

$$\phi(v_1 - 2v_2 + v_3 + 2v_4) = w_1 - w_3, \quad \text{per cui} \quad \phi^{-1}(w_1 - 3w_3) = (v_1 - 2v_2 + v_3 + 2v_4) + \ker \phi.$$

Era ugualmente possibile risolvere il sistema lineare $\begin{cases} x_1 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -12x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases}$. $\square$

Proiezioni e simmetrie

Possiamo generalizzare l'esempio dell'"ombra" di un vettore e parlare di proiezioni e simmetrie parallelamente a sottospazi fissati.

Definizione

Sia V un K-spazio vettoriale e siano dati due sottospazi U e W tali che $V = U \oplus W$. Si definiscono

- la *proiezione su U parallelamente a W* è l'omomorfismo $\pi : V \to V$ che manda $v \in V$ su quell'unico vettore $\pi(v) \in U$ tale che $v - \pi(v) \in W$.
- la *simmetria di asse U e direzione W* è l'omomorfismo $\sigma : V \to V$ che manda $v \in V$ su quell'unico vettore $\sigma(v) \in V$ tale che $v + \sigma(v) \in U$ e $v - \sigma(v) \in W$.

Ogni vettore $v \in V = U \oplus W$ si scrive *in modo unico* $v = u + w$. Si ha quindi $\pi(v) = u$ e, in particolare, $\pi(u) = u$ per ogni $u \in U$; da cui si deduce $\pi \circ \pi = \pi$. Inoltre, posto $v = u + w$ e $\sigma(v) = u' + w'$, si deduce che

$$v + \sigma(v) \in U \iff w + w' = 0 \qquad \text{e} \qquad v - \sigma(v) \in W \iff u - u' = 0.$$

Dunque, $\sigma(u + w) = u - w$ e, in particolare, si ha $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$.
Scambiando i ruoli di U e W, potremmo definire in modo analogo la proiezione su W parallelamente a U e la simmetria di asse W e direzione U. Indicate con π_U e π_W le due proiezioni, si ha

$$\pi_U + \pi_W = \mathrm{id}_V \qquad \text{e} \qquad \sigma_U = \pi_U - \pi_W = -\sigma_W = 2\pi_U - \mathrm{id}_V$$

ove σ_U è la simmetria di asse U e σ_W l'altra.

[. . . che succede se K ha caratteristica 2?]

Esercizio : Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{4} x_i v_i \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 = x_3 + x_4 \right\} \quad \text{e} \quad W = \langle v_1 + 2v_3, v_4 - v_2 \rangle .$$

(a) Si verifichi che $V = U \oplus W$ e si scriva la matrice A nella base $\mathcal{V}$ dell'applicazione lineare $\pi : V \to V$, ove $\pi = \pi_W^U$ è la proiezione su W parallelamente a U.

(b) Si determinino basi e dimensioni dei sottospazi $\ker \pi$ ed $\operatorname{im} \pi$ e si verifichi che $A^2 = A$.

(c) Siano $H_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $H_2 = \langle v_3, v_4 \rangle$. Si dimostri che $H_1 \cap U = \langle u_1 \rangle$ e $H_2 \cap U = \langle u_2 \rangle$ e si determinino due possibili vettori u_1, u_2. Indicati con $u_3 = v_1 + 2v_3$ e $u_4 = v_4 - v_2$, i generatori di W, è vero che $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ è una base di V?

(d) Nel caso in cui $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ sia una base di V si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi)$, $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\pi)$, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\pi)$ e le matrici di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$ e $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{id}_V)$. Che relazioni (algebriche) ci sono tra queste matrici?

Svolg.: (*a*) $U = \langle v_1 + v_2, v_3 - v_4 \rangle$ e quindi $\dim U = 2 = \dim W$. Inoltre, un vettore $w = a(v_1 + 2v_3) + b(v_4 - v_2)$ appartiene a $U \cap W$ se, e solo se $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$; e quindi $U \cap W = \langle 0 \rangle$.
Dunque $\dim\,(U \oplus W) = 4$ (formula di Grassmann) e perciò $U \oplus W = V$.

Il vettore $x = \sum_{i=1}^{4} x_i v_i$ ha proiezione $\pi(x) = a(v_1 + 2v_3) + b(v_4 - v_2)$, ove a e b sono determinati dalla condizione che $x - \pi(x)$ appartenga a U, ovvero

$$\begin{cases} a + b = x_1 - x_2 \\ 2a + b = x_3 + x_4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ b = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \end{cases} \quad ; \quad \text{dunque} \quad A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Si ha

$$\operatorname{im} \pi = \langle \pi(v_1), \pi(v_2), \pi(v_3), \pi(v_4) \rangle = \langle v_1 + 2v_2 + 2v_3 - 2v_4,\ v_1 + v_2 + 2v_3 - v_4 \rangle = W.$$

Inoltre, $\dim \ker \pi = \dim V - \dim \operatorname{im} \pi = 2$ e, $U = \langle v_1 + v_2, v_3 - v_4 \rangle \subseteq \ker \pi$. Dunque $\ker \pi = U$ e i due generatori indicati sono una base. Infine, poiché $\pi \circ \pi = \pi$, si ha

$$A^2 = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi \circ \pi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = A;$$

che si può verificare anche con un calcolo diretto.

(*c*) Si ha

$$u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = v_3 - v_4, \quad u_3 = v_1 + 2v_3, \quad u_4 = v_4 - v_2,$$

e i quattro vettori sono una base di V, ad esempio perché i primi due sono una base di U, gli altri due sono una base di W, e $V = U \oplus W$.

(*d*) Applicando la definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare, possiamo quindi scrivere

$$B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad C = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad D = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -1&1&1&1\\ 2&-2&-1&-1 \end{pmatrix}$$

$$P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 1&0&0&-1\\ 0&1&2&0\\ 0&-1&0&1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 2&-1&-1&-1\\ 2&-2&-1&-2\\ -1&1&1&1\\ 2&-2&-1&-1 \end{pmatrix}.$$

Le relazioni tra queste matrici sono molteplici e, in parte, dovute al fatto che $\pi \circ \pi = \pi$. Si ha infatti,

$PQ = QP = \mathbf{1}_4$, $A = PBQ$ (e quindi $B = QAP$), $C = AP = PB$ (e quindi $A = CQ$ e $B = QC$),

$D = BQ = QA$ (e quindi $A = PD$ e $B = DP$); inoltre, $A^2 = A = CD$, $B^2 = B = DC$,

$D = BD = DA$, $C = AC = CB$. Ce ne sono altre? □

Esercizio : Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $\pi, \sigma \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

(a) Si verifichi π è una proiezione se, e solo se, $\pi \circ \pi = \pi$.

(b) Se K ha caratteristica diversa da 2, si verifichi che σ è una simmetria se, e solo se, $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$.

Svolg.: (a) . Se π è una proiezione, abbiamo visto che $\pi \circ \pi = \pi$. Viceversa, preso comunque $v \in V$, si ha $v = \pi(v) + (v - \pi(v))$, ove $\pi(v) \in \operatorname{im} \pi$ e $\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi(\pi(v)) = 0$, perché $\pi \circ \pi = \pi$. Dunque $V = \operatorname{im} \pi + \ker \pi$ e la somma è diretta; infatti se $v \in \operatorname{im} \pi \cap \ker \pi$, allora esiste un vettore w tale che $v = \pi(w)$ e $v = \pi(w) = \pi(\pi(w)) = \pi(v) = 0$, perché $v \in \ker \pi$. Dunque π coincide con la proiezione su $\operatorname{im} \pi$ parallelamente a $\ker \pi$.

(b) . Abbiamo visto che, in ogni caso, se σ è una simmetria, allora $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. Viceversa, se K non ha caratteristica 2, possiamo considerare l'endomorfismo $\pi = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V + \sigma)$ e osservare che, da $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$, si deduce che $\pi \circ \pi = \pi$ e quindi $\pi : V \to V$ è una proiezione e dunque, $\sigma = 2\pi - \mathrm{id}_V$ è la simmetria di asse $\operatorname{im} \pi$ e direzione $\ker \pi$. $\square$

Esercizio: Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$. Se, per ogni matrice B in $M_n(K)$, si ha $AB = BA$, allora A è una matrice scalare, ovvero $A = c\mathbf{1}_n$, per qualche $c \in K$.

Svolg.: A commuta con ogni altra matrice se, e solo se, commuta con ogni matrice $\varepsilon(i,j)$ della base canonica di $M_n(K)$. Fissati due interi i e j, osserviamo che il prodotto $A\varepsilon(i,j)$ ha tutte le entrate nulle, ad eccezione al più della colonna j, ove ci sono, nell'ordine, gli elementi dell'i-esima colonna di A; mentre il prodotto $\varepsilon(i,j)A$ ha tutte le entrate nulle, ad eccezione al più della riga i, ove ci sono, nell'ordine, gli elementi della j-esima riga di A. Nel posto (i,j) dei due prodotti ci sono, rispettivamente, a_{ii} e a_{jj}.
Dalla relazione $A\varepsilon(i,j) = \varepsilon(i,j)A$ si ricava quindi che la i-esima colonna di A deve avere tutte le entrate nulle, eccetto, al più a_{ii} e, ugualmente, la riga j-esima di A deve essere tutta nulla, eccetto l'elemento $a_{jj} = a_{ii}$.
Dovendo valere per ogni coppia di indici (i,j), si conclude che gli unici elementi non nulli di A possono essere solo sulla diagonale principale e che devono essere tutti uguali tra loro. □