Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Se $\dim V < \infty$ allora

$$\dim U \leq \dim V.$$

Inoltre vale l'uguale $\Leftrightarrow U = V$.

Dim 1° caso. $U = \{0_V\} \Rightarrow \dim U = 0$ e vale l'enunciato.

2° caso. $U \neq \{0_V\} \Rightarrow \exists\, u \in U$ con $u \neq 0_V \Rightarrow u$ lin. indip.

Sia ora $k \in \mathbb{N}$ il massimo numero di vettori di U linearmente indipendenti. $\{0_V\} \neq U \subset V \Rightarrow 1 \leq k \leq n$.

Scegliamo k vettori $u_1, \dots, u_k \in U$ lin. indip.

$\forall\, u \in U$ i $k+1$ vettori $u, u_1, \dots, u_k$ sono lin. dip. $\Rightarrow$

$\exists\, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c.

$$\beta u + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0_V$$

$\Rightarrow \beta \neq 0$ perché $u_1, \dots, u_k$ lin. indip. $\Rightarrow$

$$u = -\beta^{-1}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k)$$

$\Rightarrow U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k) \Rightarrow (u_1, \dots, u_k)$ base per U

$\Rightarrow \dim U = k \leq n = \dim V$.

Mostriamo che $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $u_1, \dots, u_n \in U \subset V$ lin. indip. $\underset{\text{Teorema}}{\Rightarrow} u_1, \dots, u_n$ base per $V \Rightarrow U = V$.

$\boxed{\Leftarrow}$ evidente.

Sistemi lineari omogenei e dimensione

Consideriamo un sistema lin. omogeneo di m equazioni e n incognite

$$S : AX = 0_{\mathbb{K}^m}, \quad \text{con } A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Sappiamo che lo spazio delle soluzioni $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Vogliamo calcolare $\dim \Sigma_S$.

Con Gauss riduciamo S in $S' : A'X = 0$ a gradini.
Supponiamo che vi siano k pivot, con $0 \leq k \leq n$.

- Se $k = n$ non vi sono parametri liberi e il sistema ammette soltanto la soluzione nulla: $\Sigma_S = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
$\Rightarrow \dim \Sigma_S = 0$.
- Se $k < n$ avremo $h := n - k$ parametri liberi $t_1, \dots, t_h$ corrispondenti a h incognite $x_{i_1}, \dots, x_{i_h}$ con
$$1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n.$$

La soluzione generale sarà del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11} t_1 + \dots + b_{1h} t_h \\ \dots \\ x_n = b_{n1} t_1 + \dots + b_{nh} t_h \end{cases} \quad \text{cioè} \quad X = BT$$

$$B = (b_{ij}) \in M_{n,h}(\mathbb{K}), \quad \forall\, T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_h \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^h$$

Avremo anche

$$\begin{cases} x_{i_1} = t_1 \\ \vdots \\ x_{i_h} = t_h \end{cases} \Rightarrow B^{(i_p)} = (0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } p}}{1} 0 \dots 0) = e_j \in \mathbb{K}^h$$

Teorema Le colonne di B sono base per Σ_S $\Rightarrow \dim \Sigma_S = n - k$.

Dim $X = t_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \dots + t_h \begin{pmatrix} b_{1h} \\ \\ b_{nh} \end{pmatrix} = t_1 B_{(1)} + \dots + t_h B_{(h)}$

è la soluzione generale, $\forall\, t_1, \dots, t_h \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \Sigma_S = \text{Span}\left(B_{(1)}, \dots, B_{(h)}\right)$.

$y_1 B_{(1)} + \dots + y_h B_{(h)} = 0_{\mathbb{K}^n}$

La riga i_p dice $y_p = 0 \quad \forall\, p = 1, \dots, h$

$\Rightarrow B_{(1)}, \dots, B_{(h)}$ linearmente indipendenti.

Quindi sono base e $\dim \Sigma_S = h = n - k$.

Oss 1) $\dim \Sigma_S$ è il numero di parametri liberi.

2) $B_{(j)}$ è la soluzione di S che corrisponde a

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ \vdots \\ t_j = 1 \\ \vdots \\ t_h = 0 \end{cases}$$