

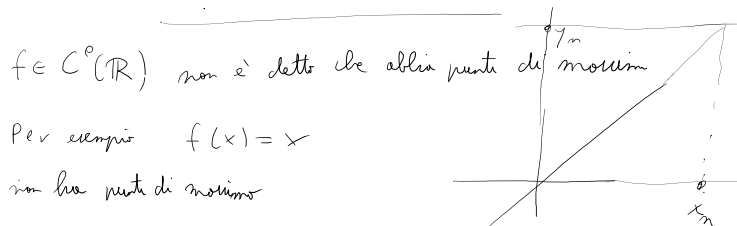
11 novembre

$f \in C^0([a, b]) \Rightarrow \exists$ un punto di massimo, cioè un punto
 $x_0 \in [a, b]$ t.c. $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in [a, b]$.

Questo è equivalente a dire che l'insieme

$$f([a, b]) := \{f(x) : x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}$$

ha un massimo



In generale se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ non puoi cercar un punto di massimo.

$$\Downarrow$$
$$\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$$

1) Esercizio Dimostrare che se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ e se $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) > 0$ allora esiste un punto di massimo

2) Esercizio $f \in C^0(\mathbb{R})$ t.c. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, dimostrare che esiste un punto di massimo



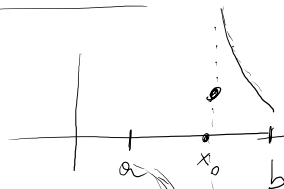
3)

$$f(x) = \underbrace{[x]^3 + [x]^2 + 1}_{1 + [x]^4} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

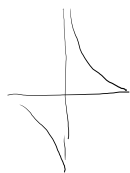
$$: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Questo ha punti di minimo e punti di massimo in $\mathbb{R}$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

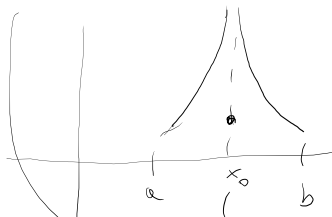


$$x_0 \in (a, b)$$



$$\frac{1}{x}$$

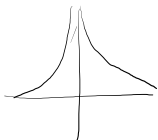
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-x_0} & \text{per } x \neq x_0 \\ 1 & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$



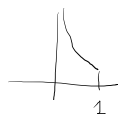
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-x_0)^2} & x \neq x_0 \\ 1 & x = x_0 \end{cases}$$

$$[a, b]$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$



$$\frac{1}{x} \in C^0((0, 1])$$



Teorema degli zeri Sia $f \in C^0([a, b])$ t.c.
 $f(a) f(b) < 0$. Allora $\exists c \in]a, b[$ t.c. $f(c) = 0$.

Dim Si definisce una successione di intervalli derivati.
 1^a operazione ibo $f(a) < 0 < f(b)$.

$$[a_0, b_0] = [a, b]$$

$$\text{Se } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = 0 \text{ poniamo } c = \frac{a_0+b_0}{2}$$

Altrimenti, rivediamo il segno di $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$



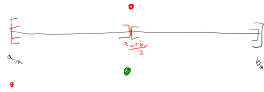
In generale, supponiamo di avere una successione progressiva

$$[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n] \text{ con } f(a_j) < 0 < f(b_j) \quad \forall j=0, \dots, n$$

$$\text{Se considero } \frac{a_n+b_n}{2}, \text{ se } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0 \text{ si pone } c = \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$\text{Se } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0, \text{ si sceglie } [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$$

$$\text{Se } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \text{ si sceglie } [a_{n+1}, b_{n+1}] = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$$



$$\exists c \in [a, b] \text{ tale che } c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Situate di derivata che $f(c) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \quad \text{e} \quad f \in C^0([a, b]) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$$

$$f(c) = 0$$

Esercizio Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$, f è continua in x_0

e se $\{x_n\}$ è una successione in $[a, b]$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, dimostrare

$$\text{che } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Soluzione Se $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_0$ $a_{2n+1} \neq 0$

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } P(x_0) = 0.$$

Dim Non è sufficiente assumere $a_{2n+1} > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = +\infty \Rightarrow \exists x > 0 \text{ t.c. } P(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = -\infty \Rightarrow \exists x < 0 \text{ t.c. } P(x) < 0$$



$P \in C^0([a, b])$ in $P(a) < 0 < P(b)$, Per il teo degli zeri

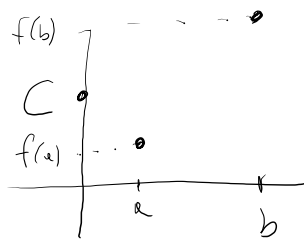
$$\exists c \in]a, b[\text{ t.c. } P(c) = 0$$

Corollario (teor. valori intermedi)

Sia $f \in C^0([a, b])$ e sia C un numero compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$

Allora $\exists c \in [a, b]$ t.c.

$$f(c) = C$$



Dim Se $f(a) = f(b) = C$

$$c = a \text{ o } b$$

L'unico caso interessante è quando $f(a) \neq f(b)$ e C non è uguale ad uno dei due. Introduzione

$$g(x) = f(x) - C \quad g \in C^0([a, b])$$

$$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - C) (f(b) - C) < 0$$

Applico il teor degli zeri e concludo che $\exists c \in (a, b)$

$$\text{t.c. } g(c) = 0 = f(c) - C \iff f(c) = C$$



Esercizio Se P è un polinomio di grado dispari $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e' una funzione suriettiva

Esercizio Dimostrare che se p è un polinomio di grado pari, allora $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è né suriettiva né iniettiva