Geometria

Foglio di esercizi 3

1) Completare i vettori $\{(1,0,2,3),(1,1,0,-2)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

2) Nei seguenti casi, dire se i vettori sono linearmente dipendenti. In caso affermativo esibire una loro combinazione lineare nulla non banale, scriverne uno come combinazione lineare degli altri, trovare una base per il sottospazio vettoriale generato e infine completare tale base ad una base dello spazio ambiente:

   (a) $(1,4),\ (-3,1),\ (1,1) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $(1,1,1),\ (2,-1,0),\ (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $(2,i),\ (3-i,1) \in \mathbb{C}^2$;

   (d) $(i,0,-1),\ (1,1,1),\ (1+2i,1-2i,0) \in \mathbb{C}^3$;

   (e) $(3,1),\ (1,1),\ (1,2) \in \mathbb{Z}_5^2$;

   (f) $(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1) \in \mathbb{Z}_3^3$.

3) Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + 3e_2 - e_4 \\ u_2 &= 2e_1 + e_2 - e_3 \\ u_3 &= -2e_1 + 9e_2 + 3e_3 - 4e_4 \\ u_4 &= 5e_2 + e_3 - 2e_4, \end{aligned}$$

   dove (e_1,e_2,e_3,e_4) denota la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di $U = \mathrm{span}(u_1,u_2,u_3,u_4) \subset \mathbb{R}^4$. Verificare che $3e_1 - e_2 - 2e_3 + e_4 \in U$ e calcolarne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Infine completare la base $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

4) Risolvere il sistema omogeneo seguente trovando anche una base e la dimensione dello spazio delle soluzioni al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$