Geometria 3 — Topologia

Foglio di esercizi 6

1) Dimostrare che $[0,1] \times [0,1] \cong B^2$, cioè che il quadrato è omeomorfo al disco.

2) Dimostrare che $[0,1]^n \cong B^n$.

3) Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la distanza $d\colon X \times X \to R$ è continua.

4) Dimostrare l'unicità del limite di successioni in spazi di Hausdorff.

5) Scrivere esplicitamente la proiezione stereografica

$$\phi\colon S^n - \{a\} \to R^n$$

e la sua inversa, con $a = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$. Dedurre che ϕ è un omeomorfismo e che $\widehat{R}^n \cong S^n$.

6) Dimostrare gli omeomorfismi:

   (a) $\widehat{[0,1[} \cong [0,1]$.

   (b) $\widehat{[0,+\infty[} \cong [0,1]$.

   (c) $\widehat{]0,1[} \cong S^1$.

7) Mostrare che $R^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_n \geq 0\} \cong B^n - \{a\}$, con $a = (0, \ldots, 0, 1) \in B^n$. Dedurre che $\widehat{R}^n_+ \cong B^n$. Suggerimento: definire una proiezione stereografica sul disco.

8) Dimostrare che $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono compatti, mentre $\mathrm{GL}_n(R)$ e $\mathrm{SL}_n(R)$ non lo sono (quest'ultimo se $n \geq 2$).

9) Dimostrare che $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono compatti, mentre $\mathrm{SL}_n(C)$ non lo è. Lo spazio delle matrici complesse $M_n(C) \cong C^{n^2}$ ha la topologia Euclidea.

10) Dimostrare che $\mathrm{SO}(n)$ si immerge in $(S^{n-1})^n = S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}$ (n volte).