ESERCIZIO 1

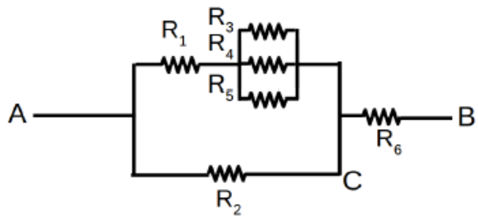
Le resistenze del circuito in figura hanno valori R_1= 3 Ω, R_2= 20 Ω, R_3= 12 Ω, R_4= 6 Ω, R_5= 4 Ω, R_6= 5 Ω e la d.d.p tra A e B è ΔV= 5.4 V.

Calcolare:

a) il valore della resistenza vista ai capi del circuito (A,B)

b) la corrente che circola in ciascuna resistenza

c) la d.d.p. su ciascuna resistenza



Ricordando le regole per combinare le resistenze in serie ed in parallelo

$$R_{serie} = R_1 + R_2 \qquad R^{-1}_{parall} = R_1^{-1} + R_2^{-2}$$

si ha

$$R_{eq} = R_6 + \left(\frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)^{-1}\right)^{-1} = 9\ \Omega$$

La corrente che passa complessivamente tra A e B sarà quindi

$$i_{TOT} = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = 0.6\ A$$

da cui si ricava, in modo sistematico

$$i_6 = i_{TOT} = 0.6\ A \qquad \Delta V_6 = R_6 i_6 = 3V$$

$$\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_6 = 2.4\ V \qquad i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = 0.12\ A$$

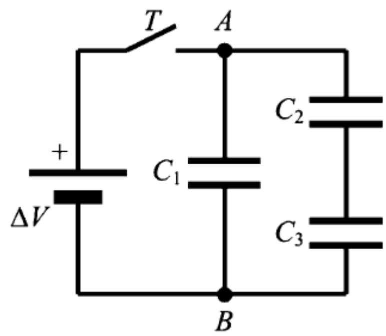
$$i_1 = i_{TOT} - i_2 = 0.48\ A \qquad \Delta V_1 = i_1 R_1 = 1.44\ V$$

$$\Delta V_3 = \Delta V_4 = \Delta V_5 = \Delta V - \Delta V_6 - \Delta V_1 = 0.96\ V$$

$$i_3 = \frac{\Delta V_3}{R_3} = 0.08\ A \qquad i_4 = \frac{\Delta V_4}{R_4} = 0.16\ A \qquad i_4 = \frac{\Delta V_4}{R_4} = 0.24\ A$$

ESERCIZIO 2

Tre condensatori, di capacità $C_1 = 0.5\ \mu$F, $C_2 = 1\ \mu$F, $C_3 = 1.5\ \mu$F, sono collegati come mostrato in figura. Inizialmente fra i morsetti A e B viene imposta una differenza di potenziale $\Delta V = 5$ V per mezzo di un opportuno generatore. Successivamente l'interruttore T viene aperto e il sistema rimane isolato. A questo punto il condensatore C_2 viene completamente riempito con una lastra di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$. Si calcolino le cariche presenti sulle armature dei tre condensatori nello stato finale e la variazione di energia elettrostatica del sistema.



Situazione iniziale: l'interruttore T è chiuso i condensatori C_2 e C_3 sono collegati in serie, la loro capacità equivalente che è in parallelo con C_1 è la seguente:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad \Rightarrow \qquad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 0.6\ \mu\text{F}$$

$$C = C_1 + C_{23} = 1.1\ \mu\text{F}$$

La carica totale Q presente sul condensatore equivalente è

$$Q = C\Delta V = 5.5\ \mu\text{C}$$

e si distribuisce sulle armature superiori di C_1 e di C_2. Si ha quindi: $Q = Q_1 + Q_2$, dove $Q_1 = C_1\Delta V$ e $Q_2 = C_{23}\Delta V$. La carica presente sull'armatura superiore di C_3 è ovviamente pari a Q_2, essendo C_3 in serie a C_2.
L'energia elettrostatica iniziale è data da:

$$U_i = \frac{1}{2}\, C\ \Delta V^2 = 13.75\ \mu\text{J}$$

Successivamente l'interruttore è aperto, il sistema è isolato e la capacità C2 è modificata dall'inserimento del dielettrico:

$$C_{2d} = \epsilon_r C_2 = 4\ \mu\text{F}$$

La capacità del condensatore equivalente alla serie del condensatore 2 (riempito di dielettrico) e del condensatore 3 (vuoto) è:

$$C_{23,d} = \frac{C_{2d}C_3}{C_{2d} + C_3} = 1.1\ \mu\text{F}$$

Indicando con ΔV_d la nuova differenza di potenziale fra i morsetti A e B, e con Q_{1d} e Q_{2d} le cariche presenti, rispettivamente, sulle armature superiori dei condensatori 1 e 2, si ottiene:

$$Q_{1d} = C_1\ \Delta V_d, \qquad Q_{2d} = C_{23,d}\ \Delta V_d$$

Poichè il sistema è isolato, la carica si conserva, quindi

$$Q_{1d} + Q_{2d} = Q,$$

cioè:

$$C_d\ \Delta V_d = C\ \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta V_d = \frac{C}{C_d}\ \Delta V = 3.44\ \text{V}$$

Quindi possono essere calcolate le nuove cariche che si sono distribuite sulle armature e l'energia fianle risulta:

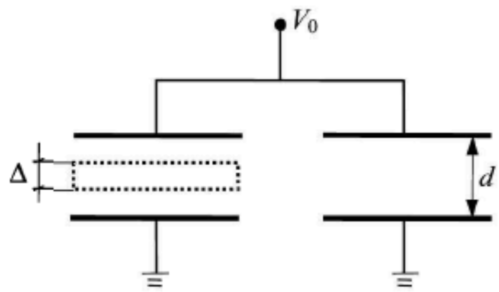
$$U_f = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C_d}$$

Quindi la variazione di energia elettrostatica del sistema è pari a:

$$\Delta U = U_f - U_i = -4.3\ \mu\text{J}.$$

ESERCIZIO 3

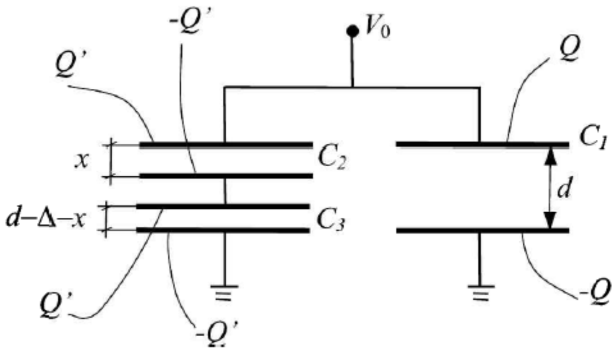
Due condensatori piani uguali, costituiti da due armature circolari di raggio R poste a distanza d in vuoto ($d \ll R$), sono collegati in parallelo, come mostrato in figura, e connessi ad un generatore che stabilisce una differenza di potenziale V_0 tra le armature dei condensatori. Si calcolino le espressioni delle cariche elettriche presenti sulle armature dei condensatori. Un disco conduttore, a facce piane e parallele di spessore $\Delta < d$, viene successivamente inserito internamente ad uno dei condensatori. Sapendo che i due condensatori restano collegati al generatore esterno, si calcolino le espressioni delle cariche elettriche indotte sulle facce della lastra conduttrice e sulle armature dei due condensatori ad equilibrio raggiunto.



La carica presente sulle armature dei due condensatori varrà:

$$Q = CV_0 = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V_0}{d}$$

essendo C la capacità dei condensatori. Quando in uno dei due condensatori viene inserito il disco metallico, la situazione è quella indicata nelle figura che segue:



in questa situazione si osserva il formarsi di un sistema di 3 condensatori:

$$C_1 = C,\, C_2 = \epsilon_0 \pi R^2/x \text{ e } C_3 = \epsilon_0 \pi R^2/(d - \Delta - x)$$

I condensatori 2 e 3 costituiscono una serie di condensatori di capacità equivalente

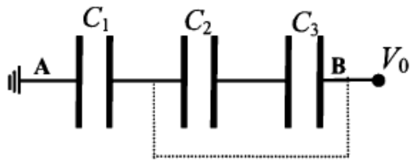
$$C_{eq} = 1/(1/C_1 + 1/C_2) = \epsilon_0 \pi R^2/(d - \Delta)$$

la distribuzione della carica è quella indicata in figura, dove Q non è cambiato, mentre il valore della carica Q' è

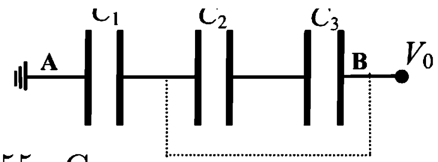
$$Q^{'} = C_{eq} V_0 = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V_0}{d - \Delta}$$

ESERCIZIO 4

Tre condensatori in serie hanno capacitá $C_1 = 0.5\ \mu$F, $C_2 = 0.8\ \mu$F e $C_3 = 0.1\ \mu$F. Si calcoli la carica elettrica presente sulle armature di ciascun condensatore quando fra i morsetti A e B viene applicata una differenza di potenziale $V_0 = 100$ V. Successivamente i condensatori vengono scollegati dal generatore ed il morsetto B viene collegato ad un punto del conduttore che unisce C_1 e C_2 (vedi figura). Si calcolino le cariche elettriche presenti sulle armature dei condensatori dopo il collegamento e l'energia dissipata in tale processo.



I tre condensatori sono in serie, per cui, detta Q la carica presente sulle armature dei condensatori, deve aversi:



$$Q = V_0 C = \frac{V_0}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \simeq 7.55\ \mu\text{C},$$

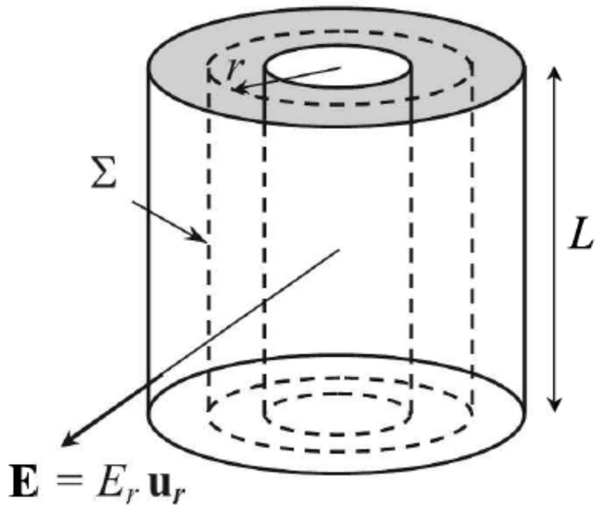
dove $C = (1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3)^{-1} \simeq 0.0755\ \mu$F è la capacità equivalente dei tre condensatori in serie. Se i condensatori di capacità C_2 e C_3 vengono collegati come in figura, la carica sulle armature di essi si porterà a zero, mentre la carica presente sulle armature del condensatore di capacità C_1 resterà invariata. La energia dissipata U_{diss} nel processo sarà perciò uguale all'energia inizialmente immagazzinata nei condensatori di capacità C_2 e C_3, e cioè:

$$U_{diss} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_3} \simeq 320\ \mu\text{J}$$

ESERCIZIO 5

Si calcoli la capacità di un condensatore cilindrico, costituito da due armature metalliche coassiali di altezza L, raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, assumendo $L \gg R_2$.

Per la simmetria cilindrica del problema e trascurando effetti di bordo, il campo elettrico fra le armature del condensatore ha linee di forza radiali e la sua intensità dipende solo dalla distanza r dall'asse del condensatore, cioè $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{u}_r$, dove $\mathbf{u}_r$ è il versore radiale in coordinate cilindriche. Per il calcolo di $E_r(r)$ si applichi il teorema di Gauss assumendo come superficie Gaussiana Σ una superficie cilindrica coassiale al condensatore, di altezza L e raggio r, con $R_1 < r < R_2$ (vedi figura). Se Q è la carica elettrica presente sull'armatura interna ($r = R_1$) del condensatore (e quindi, per induzione completa, $-Q$ la carica presente sull'armature esterna $r = R_2$), si avrà perciò:



$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 2\pi r L E_r = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}.$$

La d.d.p. fra l'armatura interna ed esterna del condensatore vale:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E_r(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

e quindi al sua capacità:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

ESERCIZIO 6

La famiglia Rossi ha decorato l'albero di Natale con un set di 100 luci a incandescenza collegate a un trasformatore da 24 V. I collegamenti sono fatti in modo da avere in parallelo 5 serie da 20 luci, in modo da poter generare diversi effetti luminosi alternando opportunamente l'accensione delle varie serie di lampadine. Ciascuna lampadina è fatta da un resistore ohmico e presenta una resistenza $R = 10\ \Omega$.

- Calcola la potenza P dissipata sull'intero set di luci.

Durante il periodo natalizio uno sbalzo di tensione causa un problema su una singola lampadina e a seguito di questo la potenza dissipata vale P'. Determina il rapporto P'/P nel caso in cui il danno causato sia:

- una lampadina fulminata (cioè, il filamento è rotto);
- una lampadina cortocircuitata (cioè, i fili ai capi della resistenza si toccano bypassando R).

[14,4 W; 4/5; 96/95]