SUL NUMERO DI NEPERO

GUGLIELMO DI MEGLIO

Indice

Introduzione

Il cosiddetto *numero di Nepero* **e** è un numero matematicamente interessante. Infatti, esso non solo è *irrazionale* (come $\sqrt{2}$), ma è pure un numero *trascendente*[1]; inoltre, gode di diverse utili proprietà che lo rendono indispensabile nell'Analisi Matematica e nella Matematica Applicata.
In questi fogli, sono proposte tre differenti definizioni di **e** utilizzate in letteratura, nonché alcune proprietà legate alla possibilità di approssimare tale numero con successioni di numeri razionali.
Per altre notizie storiche e curiosità si possono consultare [C, OCR] o l'interessante volumetto [M].
I paragrafi contrassegnati con * possono essere omessi in prima lettura o se non si conoscono le nozioni basilari del *Calcolo Differenziale* ed *Integrale*.

1. Convergenza di una Certa Successione. Prima Definizione del Numero di Nepero

In prima battuta, non possiamo dir nulla sulla regolarità della successione di numeri razionali di termine generale:

$$E_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

poiché il limite $\lim_n E_n$ si presenta nella forma indeterminata 1^∞.
Tuttavia, usando strumenti di analisi un po' più sofisticati (ma comunque elementari) possiamo stabilire quanto segue:

Date: 28 dicembre 2017.

[1]Un numero reale t è detto trascendente se non esiste alcun polinomio $P(x)$ a coefficienti *interi* (o, ciò che è lo stesso, *razionali*) tale che $P(t) = 0$.

Teorema 1
La successione (1) *è strettamente crescente e limitata, pertanto essa è convergente. Inoltre, il suo limite è un numero che cade nell'intervallo* $]2,3[$.

Per dimostrare il Teorema 1 verrà usata come ingrediente principale la celeberrima *formula del binomio di Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k .$$

(cfr. Appendice A, teorema 6).

Dimostrazione. Per comodità di esposizione, dividiamo la dimostrazione in passi.

`Passo 1.` *La successione* (E_n) *è strettamente crescente.*
Usando la formula del binomio di Newton troviamo per E_n l'espressione estesa:

$$\begin{aligned}
E_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!\,n^k} \\
&= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2\,n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6\,n^3} \\
&\qquad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} + \cdots \\
&\qquad + \frac{n(n-1)\cdots 3\;2}{(n-1)!\,n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\cdots 2\;1}{n!\,n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{6}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{n(n-1)\cdot 3\;2}{n^{n-1}} + \frac{1}{n!}\,\frac{n!}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) ,
\end{aligned}$$

la quale, usando per comodità la notazione sintetica per somme e prodotti, si riscrive in maniera compatta:

$$E_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{h=1}^{k-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right) . \tag{2}$$

Dalla (2) discende immediatamente che la successione (E_n) cresce strettamente: invero, per ogni fissato indice $n \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
E_{n+1} &= 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{h=1}^{k-1} \left(1 - \frac{h}{n+1}\right) \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{h=1}^{k-1} \left(1 - \frac{h}{n+1}\right) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \prod_{h=1}^{n} \left(1 - \frac{h}{n+1}\right)}_{>0} \\
&> 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{h=1}^{k-1} \left(1 - \frac{h}{n+1}\right) \\
&> 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{h=1}^{k-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right) \\
&= E_n \,.
\end{aligned}$$

`Passo 2`. *La successione (E_n) è limitata.*
Dalla stretta monotonia segue immediatamente che (E_n) è limitata inferiormente: infatti, per ogni indice n risulta $E_n \geq E_1 = 2$. Pertanto rimane da provare solo che (E_n) è limitata superiormente.
Tenendo presente che per ogni $n \geq 2$ ed ogni $1 \leq k < n$ troviamo:

$$1 - \frac{h}{n} < 1 \qquad , \text{per } h = 1, 2, \ldots, k-1$$

e dalla (2) segue immediatamente che $E_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$, cioè che:

$$E_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}\right) \;; \tag{3}$$

dato che:

$$2 \cdot 3 > 2^2, \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^3, \quad \ldots, \quad 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n > \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-1 \text{ volte}} = 2^{n-1}$$

dalla (3) discende:

$$E_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \,.$$

Non è difficile constatare che:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$ [2]

e ciò implica che:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \,,$$

quindi otteniamo:

$$E_n < 1 + 2 = 3$$

per $n \geq 2$; ma la limitazione $E_n < 3$ è soddisfatta anche per $n = 1$, perciò risulta:

$$2 \leq E_n < 3 \tag{4}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Da quanto acquisito finora e dal *Teorema di Regolarità per le Successioni Monotòne* discende che la successione (E_n) è convergente.

`Passo 3`. *Risulta* $2 < \lim_n E_n < 3$.
Le disuguaglianze (4) forniscono per il numero $\lim_n E_n$ le stime:

$$2 \leq \lim_n E_n \leq 3$$

---

[2]Invero, per ogni fissato numero $x \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$(1 - x)\,(1 + x + x^2 \cdots + x^{n-1}) = 1 - x^n \,,$$

sicché, per $x \neq 1$, dalla precedente si trae:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \,.$$

Per ottenere la formula usata nella dimostrazione basta scegliere $x = 1/2$.

che non sono strette come richiesto nella parte finale dell'enunciato; tuttavia, possiamo ricavare stime migliori modificando leggermente il ragionamento del `Passo 2`.
Osserviamo innanzitutto che, per la stretta monotonia della successione (E_n), risulta:

$$E_n > E_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$$

per $n > 2$ e che $\lim_n E_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, è pure:

$$\lim_n E_n \geq \frac{9}{4} > 2\ .$$

Inoltre, dalla (3) segue che:

$$\begin{aligned} E_n &< 2 + \frac{1}{2}\ \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2}\ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdots n}\right)\ ; \end{aligned}$$

poiché per $n \geq 3$ abbiamo:

$$3 \cdot 4 > 3^2, \quad 3 \cdot 4 \cdot 5 > 3^3, \quad \ldots, \quad 3 \cdot 4 \cdots\ (n-1) \cdot n > \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{n-2 \text{ volte}} = 3^{n-2}$$

dalla precedente traiamo:

$$E_n < 2 + \frac{1}{2}\ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}}\right)$$

e, ragionando come al `Passo 2`, riconosciamo che:

$$E_n < 2 + \frac{1}{2}\ \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}\ .$$

Conseguentemente otteniamo:

$$\lim_n E_n \leq \frac{11}{4} < 3\ ,$$

e ciò chiude la dimostrazione. □

Osservazione 1: La dimostrazione del `Passo 1` avrebbe potuto essere portata avanti in maniera leggermente diversa, guadagnandone in semplicità, come viene mostrato di seguito.

Usando la formula del binomio di Newton troviamo per E_n l'espressione estesa:

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ \frac{1}{n^k}\ ;$$

dato che:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\ \binom{n}{k}$$

(cfr. Appendice A, (25)), dalla precedente traiamo:

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}\ \frac{n+1-k}{n+1}\ \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}\ \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\ \frac{1}{n^k}\ . \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bernoulli[3] possiamo maggiorare la precedente come segue:

$$\begin{aligned} E_n &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &< \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ &= E_{n+1} \end{aligned}$$

e da ciò segue immediatamente che $E_n < E_{n+1}$.

♦

Essendo la successione (E_n) convergente ha senso la seguente:

Definizione 1*:* Il numero reale $\lim_n E_n$ si chiama *numero di Nepero*[4] e si denota col simbolo $\mathbf{e}$.[5]

Osservazione 2: Dal Teorema 1 segue che $2 < \mathbf{e} < 3$, ma dal `Passo 3` della sua dimostrazione si traggono le stime un po' più precise $2.25 \leq \mathbf{e} \leq 2.75$.
Un'approssimazione ancora migliore, corretta fino alla diciottesima cifra decimale, è quella calcolata da Eulero nella **Introductio**:

$$\mathbf{e} \approx 2.71828\ 18284\ 59045\ 235\ , \tag{5}$$

ma a tutt'oggi sono note approssimazioni di $\mathbf{e}$ corrette fino alla duemilionesima cifra decimale[6]. ♦

2. Il Numero di Nepero come Limite di Altre Successioni *

Una volta definito il numero $\mathbf{e}$ non è difficile dimostrare che:

Proposizione 1
Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la successione di termine generale:

$$E_n^\alpha := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \tag{6}$$

è convergente e si ha:

$$\lim_n E_n^\alpha = \mathbf{e}\ .$$

---

[3]Si chiama *disuguaglianza di Bernoulli* la seguente:

$$1 + kx \leq (1+x)^k$$

valida per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed $x \geq -1$; essa si prova per induzione. Per ottenere la maggiorazione usata nel testo basta prendere $x = -1/(n+1)$.

[4]In onore di John Napier (1550–1617), il cui nome è spesso usato nella variante latinizzata *Nepero*, inventore dei logaritmi.

[5]Il simbolo è stato mantenuto in onore di Leonhard Euler (1707–1783), *Eulero*. Egli fu il primo ad usare tale simbolo per denotare questa particolare costante (in **Mechanica Sive Motus Scientia Analytice Exposita** del 1736) ed inoltre dimostrò molte fondamentali proprietà di tale costante numerica: i suoi importantissimi risultati (tra cui i Teoremi 1 e 3) si trovano in **Introductio in Analysin Infinitorum** del 1748. Nei paesi di lingua anglosassone il numero $\mathbf{e}$ è addirittura chiamato *Euler's number*.

[6]Un'approssimazione di tal fatta è reperibile a questo URL: http://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.2mil

Dimostrazione. Con un semplice calcolo troviamo:

$$\lim_n E_n^\alpha = \lim_n E_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = \mathbf{e} \cdot 1 = \mathbf{e} \,.$$

□

Osservazione 3: Conseguentemente, il numero di Nepero si può approssimare anche con successioni di numeri razionali diverse da (E_n): infatti, basta prendere $\alpha \in \mathbb{Z}$ per ottenere $E_n^\alpha \in \mathbb{Q}$ per ogni indice n.
Notiamo inoltre che la stessa successione (E_n) è una successione del tipo (E_n^α), poiché essa si ottiene scegliendo $\alpha = 0$. ♦

La Proposizione 1 mostra che il limite della successione (E_n) è "stabile" rispetto ad una *qualsiasi* "perturbazione additiva" dell'esponente, cioè che il limite non cambia se all'esponente n si sostituisce $n + \alpha$.
Ciò non accade per altre proprietà della successione (E_n): ad esempio, si vede facilmente che la successione (E_n^1), cioè quella di termine generale $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, ha monotonia opposta rispetto ad (E_n).
Infatti, per ogni indice n si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{E_{n+1}^1}{E_n^1} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}} \;;
\end{aligned}$$

usando la disuguaglianza di Bernoulli e la relazione $\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+1}$, si può maggiorare come segue:

$$\begin{aligned}
\frac{E_{n+1}^1}{E_n^1} &\leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{1 + \frac{n+1}{n(n+2)}} \\
&< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

sicché $E_{n+1}^1 < E_n^1$ ed (E_n^1) è strettamente decrescente.
Circa le successioni del tipo (E_n^α) recentemente è stato dimostrato il seguente:

Teorema 2
Esistono due valori $A > a > 0$ tali che:

1. *per $\alpha \leq a$ la successione (E_n^α) è strettamente crescente;*
2. *per $a < \alpha < A$, la successione (E_n^α)* è definitivamente *strettamente crescente, cioè esiste un indice $\nu = \nu_\alpha$ tale che $E_{n+1}^\alpha > E_n^\alpha$ per ogni $n > \nu_\alpha$;*

(3) *per $A \leq \alpha$, la successione (E_n^α) è strettamente decrescente.*

In particolare, $a = 2\ \log 2 - 1 \approx 0.386294$ ed $A = 1/2$.

La funzione $\log x$ presente nell'enunciato del Teorema 2 è il cosiddetto *logaritmo naturale*[7].
Vale, inoltre, la:

PROPOSIZIONE 2 (Ordine di Convergenza delle (E_n^α))
Per ogni $\alpha \neq 1/2$ la successione di termine generale $\mathbf{e} - E_n^\alpha$ è un infinitesimo del primo ordine, mentre per $\alpha = 1/2$ la successione $\mathbf{e} - E_n^\alpha$ è un infinitesimo del secondo ordine rispetto ad $1/n$, i.e.:

$$|\mathbf{e} - E_n^\alpha| \sim^{8} \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ se } \alpha \neq 1/2 \\ \frac{1}{n^2} & , \text{ se } \alpha = 1/2. \end{cases} \tag{7}$$

Il lettore interessato può reperire le dimostrazioni di entrambe questi fatti in [LKJ].

Osservazione 4: La PROPOSIZIONE 2, in un certo senso, fornisce la *velocità di convergenza* delle successioni (E_n^α) verso $\mathbf{e}$.
In pratica le (7) asseriscono che, per ottenere da E_n^α un'approssimazione di $\mathbf{e}$ con 18 cifre decimali esatte (cioè un valore di $\mathbf{e}$ con l'approssimazione $< 10^{-18}$) come la (5), bisogna prendere $n \approx 10^{18}$ o, nel caso "più fortunato", $n \approx 10^9$. ♦

3. IL NUMERO DI NEPERO COME SOMMA DI UNA SERIE. SECONDA DEFINIZIONE DI e

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che il numero $\mathbf{e}$ è il limite di opportune successioni di numeri razionali e che approssimare in maniera sufficientemente precisa il numero di Nepero usando tali successioni richiede una mole di calcoli molto elevata (anche nel caso più favorevole).
Oggigiorno, vista la possibilità di usare i calcolatori elettronici, una tale quantità di calcoli non spaventa più di tanto; tuttavia, dato che l'approssimazione (5) di $\mathbf{e}$ è nota da almeno 200 anni, viene spontaneo domandarsi come sia riuscito Eulero a determinare un'approssimazione di *ee* esatta fino alla diciottesima cifra decimale.
La risposta alla domanda precedente sta nel fatto che è possibile approssimare il numero di Nepero con una successione di numeri razionali la quale converge ad esso in modo *incredibilmente più veloce* della "più fortunata" delle (E_n^α).
In questo paragrafo vedremo come.

Consideriamo la successione di termine generale:

$$s_n := 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{8}$$

e proviamo quanto segue:

---

[7] Tale funzione di solito è introdotta come funzione inversa dell'esponenziale di base $\mathbf{e}$. Tuttavia, per quanto possa sembrare sorprendente, essa si può definire indipendentemente dal numero di Nepero usando risultati di *Calcolo Differenziale* ed *Integrale* (la cui validità è indipendente dall'esistenza di $\mathbf{e}$). In proposito, si veda il § 4.

[8] Si ricordi che la scrittura $a_n \sim b_n$, ove (a_n) e (b_n) sono successioni *non negative* e *definitivamente non nulle*, equivale a dire che il limite $\lim_n a_n/b_n$ esiste finito e non nullo.

Teorema 3
La successione (s_n) *è monotòna crescente e limitata, perciò essa converge.*
Inoltre, si ha:

$$\lim_n s_n = \mathbf{e} \; . \tag{9}$$

Osservazione 5: Il limite di una successione il cui termine generale è del tipo $\sum_{k=0}^n a_k$ (ove (a_k) è un'assegnata successione di numeri reali), qualora esista, si denota solitamente col simbolo $\sum_{n=0}^\infty a_n$.
Stabilita tale convenzione, la possiamo riscrivere la (9) nella forma più suggestiva:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathbf{e} \; ,$$

e la serie che vi figura al primo membro si chiama usualmente *serie esponenziale.* ♦

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in passi.

Passo 1. *La successione* (s_n) *è strettamente crescente.*
Per ogni fissato indice n risulta:

$$s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} > s_n \; .$$

Passo 2. *La successione* (s_n) *è limitata, dunque convergente.*
Dalla monotonia segue che $s_n \geq s_0 = 1$, quindi (s_n) è limitata dal basso.
D'altra parte, sfruttando un trucco già usato in precedenza, troviamo:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\;3} + \cdots + \frac{1}{2\;3 \cdots n} \right) \\ &\leq 1 + \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{2^h} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

ergo $s_n \leq 3$ per ogni indice n e (s_n) è limitata anche dall'alto.
Invocando *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne* possiamo affermare che (s_n) converge. E ciò chiude la prima parte della dimostrazione.

Passo 3. *Risulta* $\lim_n s_n = \mathbf{e}$.
Dalla (3) discende che per ogni indice n risulta:

$$E_n \leq s_n \; ,$$

da cui, passando al limite ambo i membri, traiamo:

$$\mathbf{e} \leq \lim_n s_n \; . \tag{10}$$

Fissiamo ora un indice N e prendiamo un qualsiasi $p \in \mathbb{N}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} E_{N+p} &= \sum_{k=0}^{N+p} \binom{N+p}{k} \frac{1}{(N+p)^k} \\ &> \sum_{k=0}^{N} \binom{N+p}{k} \frac{1}{(N+p)^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{(N+p)(N+p-1)\cdots(N+p-k+1)}{(N+p)^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{N+p}\right) \left(1 - \frac{2}{N+p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{N+p}\right) \frac{1}{k!} \; ; \end{aligned} \tag{11}$$

siccome la successione di termine generale $E_{n_p} = E_{N+p}$ è estratta da (E_n) e quest'ultima è convergente, anche (E_{n_p}) è convergente ed ha lo stesso limite di (E_n), cioè risulta:

$$\lim_p E_{N+p} = \mathbf{e} \ ;$$

d'altra parte, per $k = 1, \dots, N$, abbiamo:

$$\lim_p \left(1 - \frac{1}{N+p}\right) \left(1 - \frac{2}{N+p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{N+p}\right) = 1 \ ,$$

quindi, passando al limite per $p \to \infty$ i membri più esterni della (11) otteniamo:

$$\mathbf{e} \geq 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} = s_N$$

la quale, passata al limite per $N \to \infty$, restituisce:

$$\mathbf{e} \geq \lim_n s_n \ . \tag{12}$$

Confrontando le (10) e (12) si trae $\lim_n s_n = \mathbf{e}$ come si voleva. □

Osservato che nel `Passo 3` si dimostra l'uguaglianza $\lim_n E_n = \lim_n s_n$, si può affermare che la seguente:

Definizione 2*:* Il numero reale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ si chiama *numero di Nepero.*

è del tutto equivalente alla Definizione 1.

Come abbiamo accenato all'inizio del presente paragrafo, la successione (8) è oltremodo importante poiché essa consente di ottenere approssimazioni ottime di $\mathbf{e}$ anche per indici n "piccoli".
Ciò si desume facilmente dalla:

Proposizione 3 (Stima del Resto)
Per ogni indice $n \geq 1$ si ha:

$$0 < \mathbf{e} - s_n < \frac{1}{n \ n!} \ . \tag{13}$$

Dimostrazione. La disuguaglianza $0 \leq \mathbf{e} - s_n$ vale per ogni indice n, giacché $\mathbf{e} = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$ a norma del *Teorema sulla Regolarità delle Successioni Monotòne*; d'altra parte, la stretta crescenza di (s_n) implica che l'uguaglianza non può essere mai soddisfatta, ergo vale la disuguaglianza stretta $0 < \mathbf{e} - s_n$ per ogni indice.
Per ogni fissato indice n e per $p \in \mathbb{N}$ troviamo:

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \Bigg(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)\ (n+3)} \\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{(n+2)\ (n+3) \cdots (n+p)} \Bigg) \ ; \end{aligned}$$

ma risulta:

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+2)^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(n+2)\ (n+3) \cdots (n+p)} < \frac{1}{(n+2)^{p-1}}$$

quindi dalla precedente traiamo:

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\ \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^p}}{1 - \frac{1}{n+2}} \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\ \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\ \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^2}\ \frac{1}{n!}\ . \end{aligned}$$

Passando i membri esterni della disuguaglianza precedente al limite per $p \to \infty$ e ricordando che $\lim_p s_{n+p} = \mathbf{e}$ abbiamo:

$$\mathbf{e} - s_n \leq \frac{n+2}{(n+1)^2}\ \frac{1}{n!}\ . \tag{14}$$

D'altra parte, è immediato verificare che la disuguaglianza:

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$$

vale per ogni indice $n \geq 1$, cosicché dalla (14) segue:

$$\mathbf{e} - s_n < \frac{1}{n\ n!}$$

come volevamo. □

Osservazione 6: La stima (13) dice che la successione di termine generale $\mathbf{e} - s_n$ converge a zero almeno tanto velocemente quanto la successione di termine generale $\frac{1}{n\ n!}$. Pertanto, la velocità con cui la successione (s_n) converge verso $\mathbf{e}$ è *incommensurabilmente più grande* di quella di ogni successione del tipo (E_n^α).
Ad esempio, per ottenere da (s_n) l'approssimazione euleriana (5) di $\mathbf{e}$ basta prendere $n = 20$. ♦

La stima (13) consente di provare l'importante:

Teorema 4
Il numero di Nepero è irrazionale.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che si possa scrivere $\mathbf{e} = \mu/\nu$ con $\mu,\nu \in \mathbb{N}$ primi tra loro.
In tal caso, avremmo certamente $\nu > 1$, perché $\mathbf{e}$ non è un numero naturale (in quanto strettamente compreso tra 2 e 3); d'altra parte, ponendo $n = \nu$ nella (13), prendendo il denominatore comune e liberando dai denominatori si ottiene:

$$0 < (\nu - 1)! \cdot \mu - \nu! \cdot s_\nu < \frac{1}{\nu} < 1\ . \tag{15}$$

Per la stessa definizione di s_ν, il numero $\nu! \cdot s_\nu$ è un numero naturale, cosicché anche $(\nu-1)! \cdot \mu - \nu! \cdot s_\nu$ lo è; **ma ciò è assurdo**, perchè non esiste alcun numero naturale compreso tra 0 ed 1.
Pertanto $\mathbf{e}$ è irrazionale. □

Come già ricordato nell'introduzione, il numero $\mathbf{e}$ è anche trascendente; tuttavia, la dimostrazione della trascendenza di $\mathbf{e}$ (che si fa con tecniche elementari di *Calcolo*

Differenziale ed *Integrale*) non è riportata in questi fogli. Il lettore interessato la può reperire in [G, cap. 5, § 9].

4. Una Terza Definizione del Numero di Nepero *

In una nota al § 2 abbiamo menzionato il fatto che la funzione logaritmo naturale si può definire con metodi di *Calcolo Differenziale* ed *Integrale* la cui validità è del tutto indipendente dalla definizione del numero **e**.
In questo paragrafo vedremo come, usando tali metodi, è possibile definire il numero di Nepero senza sfruttare alcuna delle successioni presentate nei paragrafi precedenti.

Dal *Calcolo Integrale* è ben noto che la funzione $l(x) := 1/x$, definita in $]0,\infty[$ ed ivi di classe C^∞, è integrabile su ogni intervallo compatto $[a,b] \subseteq]0,\infty[$ e che però essa non è *impropriamente integrabile* in $]0,\infty[$, né in alcun intervallo del tipo $]0,b]$ od $[a,\infty[$: ciò si può dimostrare usando direttamente la definizione di integrale improprio e di integrale di Riemann (cfr. Appendice B).
Queste proprietà della funzione l consentono di provare il:

Teorema 5
La funzione $L :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}\,t \tag{16}$$

gode delle seguenti proprietà:

(1) *L è positiva in $]1,\infty[$, negativa in $]0,1[$ ed $L(1) = 0$;*

(2) *L è strettamente crescente e non limitata, né inferiormente né superiormente;*

(3) *L è di classe C^∞ in $]0,\infty[$ ed in particolare $L'(x) = \frac{1}{x}$;*

(4) *L è strettamente concava.*

Dimostrazione. Proviamo la *(1)*.
Dato che $l(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per le proprietà dell'integrale abbiamo $L(x) > 0$ per $x > 1$ ed $L(1) = 0$. D'altra parte, quando $x < 1$ per definizione risulta:

$$L(x) = -\int_x^1 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}\,t < 0\ .$$

Proviamo la (2).
Il fatto che L sia strettamente crescente segue dalla proprietà additiva dell'integrale e dalla monotònia di l, giacché per $x_1 < x_2$ si ha:

$$\begin{aligned} L(x_2) - L(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}\,t \\ &\geq \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x_2}\ \mathrm{d}\,t \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_2} \\ &> 0\ , \end{aligned}$$

ossia $L(x_1) < L(x_2)$.
Il fatto che L non sia limitata né inferiormente né superiormente, invece, discende dal fatto che l

non è impropriamente integrabile negli intervalli $]0,1]$ e $[1,\infty[$, poiché ciò equivale a dire che:

$$\lim_{x\to 0^+} L(x) = -\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = \infty\ .$$

La dimostrazione di questo fatto si trova in Appendice B.

Proviamo la (3).
Per il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* la funzione L è derivabile in $]0,\infty[$ e la sua derivata prima coincide con l. Visto che l è una funzione indefinitamente derivabile in $]0,\infty[$, ciò importa che L è di classe C^∞ nel suo insieme di definizione.

Proviamo la (4).
Poiché $L''(x) = l'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, L è strettamente concava. □

La funzione L definita sopra gode di proprietà algebriche assai importanti, come quelle elencate di seguito:

Proposizione 4
Per ogni $x, y > 0$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta:

$$L(xy) = L(x) + L(y) \tag{17}$$

$$L(x^\alpha) = \alpha\ L(x)\ . \tag{18}$$

Dimostrazione. Per la (16) si ha:

$$\begin{aligned} L(xy) &= \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= L(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t\ ; \end{aligned}$$

facendo il cambiamento di variabile $t = x\tau$ nell'integrale che figura all'ultimo membro troviamo:

$$\begin{aligned} L(xy) &= L(x) + \int_1^{y} \frac{1}{x\ \tau}\ x\ \mathrm{d}\,\tau \\ &= L(x) + \int_1^y \frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}\,\tau \\ &= L(x) + L(y) \end{aligned}$$

il che prova la (17).
Inoltre, usando la definizione di L e la sostituzione $t = \tau^\alpha$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(x^\alpha) &= \int_1^{x^\alpha} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_1^x \frac{1}{\tau^\alpha}\ \alpha\ \tau^{\alpha-1}\ \mathrm{d}\,\tau \\ &= \alpha \int_1^x \frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}\,\tau \\ &= \alpha\ L(x) \end{aligned}$$

che è la (18). □

Osservazione 7: Le proprietà illustrate nel TEOREMA 16 e nella PROPOSIZIONE 4 mostrano che la funzione L gode di alcune delle proprietà del *logaritmo naturale* apprese tra i banchi di scuola.
Ciò non è un caso, in quanto la (16) si può usare come definizione della funzione logaritmo naturale: questo approccio è illustrato in [G, cap. 5, § 8]. ♦

Le *(2)* e *(3)* del TEOREMA 5, con il *Teorema dei Valori Intermedi*, assicurano che l'equazione:

$$L(x) = 1 \tag{19}$$

ha un'unica soluzione in $\mathbb{R}$ e l'**Osservazione 7** suggerisce che tale soluzione sia proprio il numero di Nepero... Infatti vale la seguente:

PROPOSIZIONE 5
L'unica soluzione dell'equazione (19) *è il numero* $\mathbf{e}$.

Alla dimostrazione della PROPOSIZIONE 5 premettiamo due lemmi, le cui dimostrazioni sono riportate in APPENDICE C:

LEMMA 1
La funzione $L :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *è invertibile.*
Detta $E : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ *la funzione inversa di* L*, essa gode delle seguenti proprietà:*

(1) E *è strettamente crescente e risulta* $E(0) = 1$

(2) E *è di classe* C^∞ *in* $\mathbb{R}$ *e per ogni indice* $n \in \mathbb{N}$ *si ha:*

$$E^{(n)}(x) = E(x) \tag{20}$$

identicamente in $\mathbb{R}$*;*

(3) E *è strettamente convessa.*

Osservazione 8: Come conseguenza dell'**Osservazione 7**, la funzione E definita nel LEMMA 1 si può chiamare *esponenziale neperiano* e si può denotare col simbolo exp. ♦

LEMMA 2
La funzione E *si può sviluppare in serie di MacLaurin convergente in ogni* $x \in \mathbb{R}$*.*
In altre parole, lo sviluppo in serie:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \tag{21}$$

è valido per ogni $x \in \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione della PROPOSIZIONE 5*.* Scritta la (21) per $x = 1$ e ricordando quanto dimostrato nel § 3, otteniamo:

$$E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathbf{e}\,;$$

dato che E è la funzione inversa di L, dall'uguaglianza tra i membri più esterni della precedente segue immediatamente $L(\mathbf{e}) = 1$, come volevamo. □

Viceversa, dalla (21) segue immediatamente che la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ del § 3 è convergente ed ha per somma $E(1)$; ne consegue che il numero di Nepero può essere equivalentemente definito anche nella maniera seguente:

Definizione 3*:* Si chiama *numero di Nepero* l'unica soluzione dell'equazione (19), i.e. il numero reale $E(1)$.

Appendice A. La formula del binomio di Newton ed i coefficienti binomiali

Richiamiamo brevemente la nota formula di Newton per lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio:

Teorema 6 (Binomio di Newton)
Se a, b sono numeri reali ed $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \,, \tag{22}$$

in cui i coefficienti $\binom{n}{k}$ sono definiti ponendo:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \,.^{9} \tag{23}$$

e si chiamano coefficienti binomiali.

La dimostrazione del Teorema 6 si fa per induzione, sfruttando alcune proprietà aritmetiche dei coefficienti binomiali; tali proprietà sono elencate nel lemma che segue e la loro dimostrazione è lasciata al lettore:

Lemma 3
Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \le n$ risulta:

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \,, \tag{24}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1} \,, \tag{25}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \,, \tag{26}$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k} \binom{n}{k} \,, \tag{27}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \,. \tag{28}$$

---

[9]Si ricordi che:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{, se } n = 0,\ 1 \\ 1\ 2 \cdots (n-1)\ n & \text{, se } n \geq 2. \end{cases}$$

Osservazione 9: Dalla (28) segue che $\binom{n}{k}$ coincide con la k-esima entrata nella n-esima riga del *triangolo di Tartaglia*:

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

in cui l'elemento di posto $k+1$ nella riga $n+1$-esima è ottenuto sommando gli elementi della n-esima riga di posti k e $k+1$.
Di conseguenza il secondo membro di (22) coincide con l'espressione della potenza n-esima del binomio $a+b$ che si impara a costruire tra i banchi di scuola. ♦

Dimostrazione del Teorema 6. Stanti le (25), l'uguaglianza (22) è certamente vera per $n=1$; ciò costituisce la base dell'induzione.

Supposta vera la (25) per un generico esponente $n \in \mathbb{N}$, proviamo che essa vale anche per l'esponente successivo $n+1$. Per la definizione di potenza abbiamo:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n \\
&= (a+b)\cdot\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots\right. \\
&\quad \left. + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right] \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^nb + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n-2}a^3b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n + \\
&\quad + \binom{n}{0}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^nb + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]a^{n-1}b^2 + \cdots \\
&\quad + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2}\right]a^2b^{n-1} + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right]a^{n-1}b^2 + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{n}b^{n+1}\,;
\end{aligned}$$

per le (25) ed (28) (con k rimpiazzato da $k-1$) abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&\qquad = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

e da ciò segue la tesi. □

Appendice B. Circa la non-sommabilità della funzione l *

Proviamo che valgono le due relazioni:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = +\infty \tag{29}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}\, t = +\infty\ . \tag{30}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la (29), notiamo innanzitutto che per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ risulta:

$$\forall t \in [k, k+1[, \qquad \frac{1}{k+1} < \frac{1}{t}$$

ergo:

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\, t}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\, t}{t}\ ;$$

sommando membro a membro le precedenti scritte per $k = 1, 2, \ldots, n$ otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\, t}{t}\ ,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$; quindi la successione di termine generale $I_n := \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\, t}{t}$ è minorata dalla successione di termine generale $a_n := \sum_{k=2}^{n+1} 1/k$.
La successione (a_n) è divergente: invero, essa è regolare in quanto strettamente crescente; d'altra parte, scegliendo di estrarre da (a_n) la sottosuccessione d'indici $n_p := 2^p$, si trova:

$$\begin{aligned}
a_{2^p} &= \sum_{k=2}^{2^p+1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} \\
&\quad + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^p}}_{>\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{2^p}=\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^p+1} \\
&> \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{p \text{ volte}} + \frac{1}{2^p+1} \\
&= \frac{p}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^p+1}}_{>0} \\
&> \frac{p}{2}
\end{aligned}$$

sicché $\lim_p a_{n_p} = +\infty$ ed anche $\lim_n a_n = +\infty$ (per il *Teorema sul Limite delle Successioni Estratte*).
Ciò importa che anche la successione (I_n) diverge positivamente.

Infine, la divergenza di (I_n) implica la (29): infatti, detta $[x]$ la parte intera del generico $x > 0$, risulta:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}\, t}{t} \geq \int_1^{[x]} \frac{\mathrm{d}\, t}{t} = I_{[x]}$$

e, dato che $\lim_{x\to+\infty} [x] = +\infty$, dal *Teorema sul Limite delle Funzioni Composte* e dal *Teorema del Confronto* segue immediatamente:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}\, t}{t} = \lim_{x\to+\infty} I_{[x]} = +\infty\ ,$$

come si voleva.

D'altra parte, la (30) si ricava facendo un semplice cambiamento di variabile dalla (29): posto infatti $t = \frac{1}{\tau}$ si ottiene:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \overset{t=1/\tau}{=} \int_{+\infty}^1 \tau \left(-\frac{1}{\tau^2}\right) \mathrm{d}\,\tau = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} = +\infty\ .$$

□

Appendice C. Dimostrazione dei Lemmi 1 e 2 *

Dimostrazione del Lemma 1. Il fatto che L sia invertibile segue immediatamente dal fatto che L è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.
Sia $E : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ la funzione inversa di L.

Proviamo la (1).
Siccome L è strettamente crescente, la sua funzione inversa conserva lo stesso tipo di monotonia: pertanto, E cresce strettamente in $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo $L(1) = 0$, si ha evidentemente $E(0) = 1$.

Dimostriamo la (2).
Basta ragionare *per ricorrenza* facendo induzione su n. Per $n = 0$ l'uguaglianza $E^{(0)}(x) = E(x)$ è vera per definizione; d'altra parte, scelto $n = 1$, il *Teorema di Derivazione della Funzione Inversa* assicura che:

$$E'(x) = \frac{1}{L'(E(x))} = \frac{1}{\frac{1}{E(x)}} = E(x)$$

e questa è una solida *base per l'induzione*.
Per quanto riguarda il *passo induttivo*, supponiamo che l'uguaglianza (20) valga per n e proviamo che essa vale anche per $n + 1$: invero, abbiamo:

$$\begin{aligned} E^{(n+1)}(x) &= \left[E^{(n)}(x)\right]' && \text{(per definizione di derivata successiva)} \\ &= [E(x)]' && \text{(per l'}\textit{ipotesi induttiva}\text{)} \\ &= E(x) && \text{(per la }\textit{base dell'induzione}\text{)} \end{aligned}$$

come volevamo.

Proviamo la (3).
Per quanto appena acquisito, abbiamo $E''(x) = E(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ergo E è strettamente convessa in $\mathbb{R}$. □

Dimostrazione del Lemma 2. Sia x un fissato punto di $\mathbb{R}$.
Dato che E è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere la formula di Taylor centrata in 0 d'ordine n col resto nella forma di Lagrange, i.e.:

$$\begin{aligned} E(x) = E(0) &+ \frac{E'(0)}{1!}\ x + \frac{E''(0)}{2!}\ x^2 + \cdots + \frac{E^{(n)}(0)}{n!}\ x^n \\ &+ \frac{E^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ x^{n+1}\ , \end{aligned}$$

ove ξ è un *punto di Lagrange* che giace nell'intervallo di estremi 0 ed x; per la precisione, la (20) e la (1) del Lemma 1 importano che la precedente si scrive:

$$\begin{aligned} E(x) = 1 &+ \frac{1}{1!}\ x + \frac{1}{2!}\ x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\ x^n \\ &+ \frac{E^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ x^{n+1}\ . \end{aligned}$$

Il resto $R_n(\xi) := \frac{E^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ x^{n+1}$ tende a zero quando n cresce: infatti, per il *Teorema di Weierstrass* la funzione E è dotata di massimo $M(x)$ nell'intervallo chiuso d'estremi 0 ed x[10] e ciò implica che è valida la maggiorazione:

$$|R_n(\xi)| \le M(x)\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ ;$$

dato che il secondo membro della precedente è infinitesimo al divergere di n (poiché x è fissato e $x^{n+1} \prec (n+1)!$), dalla precedente ricaviamo facilmente che la relazione di limite $\lim_n R_n(\xi) = 0$

[10]Per monotònia, inoltre, è possibile affermare che $M(x) = E\big(\max\{0, x\}\big)$.

vale indipendentemente dal punto di Lagrange ξ.
Passando al limite per $n \to \infty$ ambo i membri della formula di Taylor riconosciamo che vale lo sviluppo di MacLaurin (21), e questo è quel che volevamo. □

Riferimenti bibliografici

[C] Coolidge, J. (1950) *The Number* **e**, The Amer. Math. Monthly, v. 57, n. 9, p. 591–602 [reperibile a questo URL: http://steiner.math.nthu.edu.tw/disk5/js/geometry/e.pdf].

[G] Giusti, E. (1988) **Analisi Matematica 1 - seconda edizione**, Bollati Boringhieri, Torino.

[LKJ] Liu, C.; Karim, M. R. & Jordan, C. (2010) *Tune the Sequence* $(1 + \frac{1}{n})^{n+c}$ *with the Parameter* c, Int. J. Acad. Res., v. 2, n. 5, p. 11–17.

[M] Maor, E. (1994), **e: the History of a Number**, Princeton University Press.

[OCR] O'Connor, J.J. & Robertson, E.F., The Number e, MacTutor History of Mathematics, online [reperibile al seguente URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html]

G. Di Meglio, PhD
Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
piazzale Tecchio 80
80126 Napoli – Italy
email: guglielmo.dimeglio@unina.it

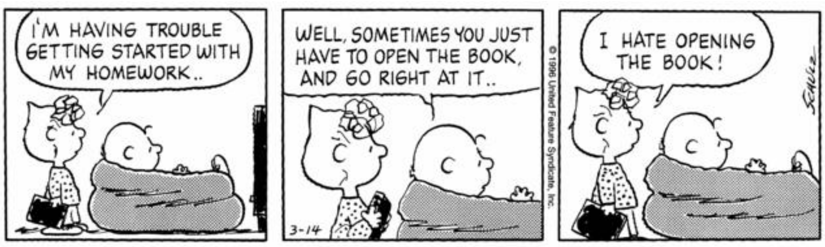

Figura 1. Sally Brown: un esempio da non imitare...