Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

5. Rango

Definizione 1. *Sia $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ una matrice $m \times n$ a coefficienti nel campo K. Il* **rango** *di A è la dimensione del sottospazio vettoriale di K^m generato dalle colonne di A,*

$$\mathrm{rg}(A) := \dim\left(\mathrm{Span}\left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\right)\right) .$$

In diversi libri di testo, il rango definito qui sopra viene chiamato "rango per colonne" di A, mentre il "rango per righe" si definisce come la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}_{1,n}(K)$ generato dalle righe di A, cioè

$$\dim\left(\mathrm{Span}\left(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}\right)\right) .$$

Osserviamo che il rango per righe di A coincide con il rango della matrice trasposta di A. In seguito vedremo che $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$, quindi il rango per righe di A è uguale al rango per colonne di A.

Osservazione 1. $\mathrm{Span}\left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\right) \subset K^m$, perché le colonne di A sono vettori di K^m, quindi $\mathrm{rg}(A) \leq \dim(K^m) = m$. D'altra parte $\mathrm{rg}(A) \leq n$, perché A ha n colonne. Quindi $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Esempio 1. 1. Se A è la matrice nulla, $A = 0$, allora $\mathrm{rg}(A) = 0$. Viceversa, se $\mathrm{rg}(A) = 0$, allora $A = 0$.

2. $\mathrm{rg}(I_n) = n$. Infatti le colonne della matrice unità sono i vettori della base canonica di K^n, $(I_n)^{(1)} = e_1, \dots, (I_n)^{(n)} = e_n$.

3. Calcoliamo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Per definizione,

$$\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) .$$

Per calcolare tale dimensione, usiamo il procedimento del capitolo precedente per trovare una base $\mathcal{B}$ di $\mathrm{Span}\left(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}\right)$ costituita da colonne di A.

Siccome $A^{(1)} \neq 0$, abbiamo che $A^{(1)} \in \mathcal{B}$. Ora consideriamo $A^{(2)}$, ed osserviamo che $A^{(2)} \notin \mathrm{Span}\left(A^{(1)}\right)$, perché ogni vettore appartenente a $\mathrm{Span}\left(A^{(1)}\right)$ deve necessariamente avere come seconda componente 0. Quindi $A^{(2)} \in \mathcal{B}$. Osserviamo che $A^{(3)}, A^{(4)} \in \operatorname{Span}\left(A^{(1)}, A^{(2)}\right)$, poiché $A^{(3)} = A^{(1)} + A^{(2)}$ ed $A^{(4)} = -2A^{(1)}$. Quindi $A^{(3)}, A^{(4)} \notin \mathcal{B}$, da cui segue che $\mathcal{B} = \{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ e $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Osserviamo che anche $A^{(1)}, A^{(3)}$ sono linearmente indipendenti, così come $A^{(3)}, A^{(4)}$ sono linearmente indipendenti. Infatti il rango di una matrice A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, ma ci possono essere più collezioni formate da $\operatorname{rg}(A)$ colonne di A linearmente indipendenti.

Proposizione 1. *Sia $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, e sia $\tilde{A}$ una matrice ottenuta da A tramite una sequenza di operazioni elementari. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\tilde{A})$;
2. *se $\tilde{A}$ è a scala, $\operatorname{rg}(\tilde{A})$ è uguale al numero r delle righe non nulle di $\tilde{A}$, ed inoltre $A^{(d_1)}, \ldots, A^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti, dove $\tilde{a}_{1,d_1}, \ldots, \tilde{a}_{r,d_r}$ sono i pivot di $\tilde{A}$.*
3. $\operatorname{rg}({}^t A) = \operatorname{rg}({}^t \tilde{A})$.

Dim. 1. Per dimostrare questa affermazione usiamo un risultato che vedremo più avanti, il *teorema della dimensione*. Questo teorema afferma che

$$\operatorname{rg}(A) = n - \dim(W)\,, \tag{1}$$

dove $W = \{s \in K^n \mid A \cdot s = 0\}$ è il sottospazio vettoriale di K^n formato dalle soluzioni del sistema omogeneo di equazioni lineari $A \cdot x = 0$. Se $\tilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di operazioni elementari, allora il sistema di equazioni lineari $\tilde{A} \cdot x = 0$ è equivalente ad $A \cdot x = 0$, cioè $\widetilde{W} = W$, dove $\widetilde{W} = \{s \in K^n \mid \tilde{A} \cdot s = 0\}$ è il sottospazio di K^n delle soluzioni di $\tilde{A} \cdot x = 0$. Usando la formula (1) abbiamo quindi:

$$\operatorname{rg}(A) = n - \dim(W) = n - \dim(\widetilde{W}) = \operatorname{rg}(\tilde{A})\,.$$

2. Supponiamo ora che $\tilde{A}$ sia a scala, e sia r il numero delle righe non nulle di $\tilde{A}$. Sia $\tilde{a}_{ij}$ l'elemento di posto i, j di $\tilde{A}$. Siccome $\tilde{A}$ è a scala, si ha che $\tilde{a}_{ij} = 0$, se $i > r$, quindi $\tilde{A}^{(j)} \in \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_r)$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, dove $\tilde{A}^{(j)}$ è la colonna j-ma di $\tilde{A}$ ed $e_1, \ldots, e_r$ sono i primi r vettori della base canonica di K^n. Da questo segue che $\operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}) \subseteq \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_r)$, quindi

$$\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \dim \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \ldots, \tilde{A}^{(n)}) \leq \dim \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_r) = r\,.$$

Per dimostrare che $\operatorname{rg}(\tilde{A}) = r$, è sufficiente dimostrare che le colonne $\tilde{A}^{(d_1)}, \tilde{A}^{(d_2)}, \ldots, \tilde{A}^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti, dove $\tilde{a}_{1d_1}, \tilde{a}_{2d_2}, \ldots, \tilde{a}_{rd_r}$ sono i pivot di $\tilde{A}$. A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 \tilde{A}^{(d_1)} + \lambda_2 \tilde{A}^{(d_2)} + \ldots + \lambda_r \tilde{A}^{(d_r)} \in K^m \tag{2}$$

e supponiamo che essa sia $= 0$. Osserviamo che (2) è un vettore della forma seguente:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\tilde{a}_{1d_1} + \lambda_2\tilde{a}_{1d_2} + \ldots + \lambda_r\tilde{a}_{1d_r} \\ \lambda_2\tilde{a}_{2d_2} + \ldots + \lambda_r\tilde{a}_{2d_r} \\ \vdots \\ \lambda_r\tilde{a}_{rd_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Siccome $\tilde{a}_{1d_1}, \tilde{a}_{2d_2}, \ldots, \tilde{a}_{rd_r} \neq 0$, il vettore (3) è 0 se e solo se $\lambda_r = \lambda_{r-1} = \ldots = \lambda_1 = 0$. Concludiamo quindi che le colonne $\tilde{A}^{(d_1)}, \tilde{A}^{(d_2)}, \ldots, \tilde{A}^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti e $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = r$.

Dimostriamo ora che le colonne $A^{(d_1)}, A^{(d_2)}, \ldots, A^{(d_r)}$ di A sono linearmente indipendenti, dove $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sono gli indici di colonna dei pivot $\tilde{a}_{1d_1}, \tilde{a}_{2d_2}, \ldots, \tilde{a}_{rd_r}$ di $\tilde{A}$. A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 A^{(d_1)} + \lambda_2 A^{(d_2)} + \ldots + \lambda_r A^{(d_r)} \in K^m \tag{4}$$

e supponiamo che essa sia $= 0$. Consideriamo il vettore $s \in K^n$ definito come segue: $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, dove

$$s_i = \begin{cases} 0\,, & \text{se} \quad i \neq d_1, \ldots, d_r\,, \\ \lambda_k\,, & \text{se} \quad i = d_k\,, \quad \text{per } k = 1, \ldots, r\,. \end{cases}$$

Quindi

$$A \cdot s = \lambda_1 A^{(d_1)} + \lambda_2 A^{(d_2)} + \ldots + \lambda_r A^{(d_r)} = 0\,.$$

Siccome $\tilde{A}$ è ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari, abbiamo che $\tilde{A} \cdot s = 0$. Osserviamo che

$$\tilde{A} \cdot s = \lambda_1 \tilde{A}^{(d_1)} + \lambda_2 \tilde{A}^{(d_2)} + \ldots + \lambda_r \tilde{A}^{(d_r)}\,,$$

e siccome $\tilde{A}^{(d_1)}, \tilde{A}^{(d_2)}, \ldots, \tilde{A}^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti, concludiamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$, quindi $A^{(d_1)}, A^{(d_2)}, \ldots, A^{(d_r)}$ sono linearmente indipendenti.

3. È sufficiente dimostrare l'enunciato nel caso in cui $\tilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 1, rispettivamente di tipo 2 o di tipo 3. Supponiamo dapprima che $\tilde{A}$ sia ottenuta da A scambiando la riga i-ma con quella j-ma, per qualche $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Questo corrisponde allo scambio

della colonna i-ma con la j-ma di ${}^tA$, quindi

$$({}^t\tilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}\,, & \text{se} \quad k \neq i, j\,, \\ ({}^tA)^{(j)}\,, & \text{se} \quad k = i\,, \\ ({}^tA)^{(i)}\,, & \text{se} \quad k = j\,. \end{cases}$$

Da questo segue immediatamente che

$$\mathrm{Span}(({}^tA)^{(1)}, \ldots, ({}^tA)^{(m)}) = \mathrm{Span}(({}^t\tilde{A})^{(1)}, \ldots, ({}^t\tilde{A})^{(m)})\,,$$

perciò $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}({}^t\tilde{A})$.

Supponiamo ora che $\tilde{A}$ si ottenga da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 3, precisamente sostituendo la riga j-ma con $A_{(j)}+cA_{(i)}$, per qualche $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, e $c \in K$. Allora

$$({}^t\tilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}\,, & \text{se} \quad k \neq j\,, \\ ({}^tA)^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}\,, & \text{se} \quad k = j\,, \end{cases}$$

ed in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Span}(({}^tA)^{(1)}, \ldots, ({}^tA)^{(m)}) &= \mathrm{Span}(({}^tA)^{(1)}, \ldots, ({}^tA)^{(j-1)}, ({}^tA)^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}, ({}^tA)^{(j+1)}, \ldots, ({}^tA)^{(m)}) \\ &= \mathrm{Span}(({}^t\tilde{A})^{(1)}, \ldots, ({}^t\tilde{A})^{(m)})\,, \end{aligned}$$

perciò $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}({}^t\tilde{A})$.

Si verifica analogamente che, se $\tilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 2, allora $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}({}^t\tilde{A})$. Questo conclude la dimostrazione del punto 3. □

Teorema 1. *Sia* $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. *Allora* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Dim. Per i punti 1 e 3 della precedente proposizione, è sufficiente dimostrare che $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = \mathrm{rg}({}^t\tilde{A})$, dove $\tilde{A}$ è una matrice ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari. Sia dunque $\tilde{A}$ una matrice a scala ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari. Per il punto 2 della Proposizione 1 abbiamo che $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = r$, dove r è il numero delle righe non nulle di $\tilde{A}$. Dimostriamo quindi che $\mathrm{rg}({}^t\tilde{A}) = r$. A tale scopo, sia

$$\lambda_1({}^t\tilde{A})^{(1)} + \ldots + \lambda_r({}^t\tilde{A})^{(r)} \in K^n \tag{5}$$

una combinazione lineare delle colonne di $\tilde{A}$, e supponiamo che sia uguale al vettore 0. Osserviamo che $({}^t\tilde{A})^{(r+1)} = \ldots = ({}^t\tilde{A})^{(m)} = 0$, quindi omettiamo queste colonne nella combinazione lineare. Inoltre si ha che la combinazione lineare (5) ha la seguente forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1d_1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1d_2} + \lambda_2 \tilde{a}_{2d_2} \\ \vdots \\ \lambda_1 \tilde{a}_{1d_r} + \ldots + \lambda_r \tilde{a}_{rd_r} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Siccome $\tilde{a}_{1d_1}, \ldots, \tilde{a}_{rd_r} \neq 0$, segue che $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$. Da questo segue che $(\tilde{A})^{(1)}, \ldots, ({}^t\tilde{A})^{(r)}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\mathrm{rg}({}^t\tilde{A}) = r$. $\square$

Esempio 2. 1. Determiniamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R}) .$$

A tale scopo trasformiamo A in una matrice a scala tramite una sequenza di operazioni elementari.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} .$$

Osserviamo che $\tilde{A}$ è a scala, $r = 2$, ed i pivot sono $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}$, quindi $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$. Dalla Proposizione 1 segue che $\mathrm{rg}(A) = 2$ ed $\{A^{(1)}, A^{(2)}\}$ è una base di $\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)})$.

2. Determiniamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,5}(\mathbb{R}) .$$

A tale scopo trasformiamo A in una matrice $\tilde{A}$ a scala per mezzo di una sequenza di operazioni elementari.

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}\,.$$

Per la Proposizione 1 abbiamo che $\mathrm{rg}(A) = 3$ ed $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ formano una base di $\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, A^{(5)})$.

Teorema 2 (Rouché-Capelli)**.** *Un sistema di m equazioni lineari di ordine n, $A \cdot x = b$, è compatibile $\iff$ $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A)$. In tal caso esso possiede ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = \mathrm{rg}(A)$.*

Dim. Per la Proposizione 3 del capitolo 4, $A \cdot x = b$ è compatibile se e solo se $b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$. Per il Lemma 1 del capitolo 4, $b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ se e solo se $\mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b)$. Quindi il sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se

$$\mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b)\,.$$

Siccome $\mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \subseteq \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b)$, i due spazi vettoriali sono uguali se e solo se hanno la stessa dimensione, cioè se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

Supponiamo ora che $A \cdot x = b$ sia compatibile. Il teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari afferma che

$$S = \tilde{s} + W\,,$$

dove $S = \{s \in K^n \,|\, A \cdot s = b\}$ è l'insieme delle soluzioni, $\tilde{s}$ è una soluzione particolare, e $W = \{s \in K^n \,|\, A \cdot s = 0\}$ è il sottospazio vettoriale di K^n delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Per il teorema della dimensione (che vedremo nel capitolo 8), $\dim(W) = n - \mathrm{rg}(A) = n - r$. Fissiamo una base $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ di W, allora ogni soluzione si scrive nella forma seguente

$$s = \tilde{s} + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-r} v_{n-r}\,,$$

al variare dei parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in K$. Quindi le soluzioni di $A \cdot x = b$ dipendono da $n-r$ parametri, questo significa che $A \cdot x = b$ ha ∞^{n-r} soluzioni. $\square$

Esempio 3. 1. Vogliamo determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema di 3 equazioni lineari di ordine 4 è compatibile, e per ogni tale a l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 & = a\,. \end{cases}$$

La matrice completa del sistema lineare è

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Trasformiamo $(A|b)$ per mezzo di operazioni elementari in modo tale da ottenere una matrice $(\tilde{A}|\tilde{b})$, con $\tilde{A}$ matrice a scala:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} = (\tilde{A}|\tilde{b}).$$

Osserviamo che $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = 2$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, mentre

$$\mathrm{rg}(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{cases} 3\,, & \text{se}\, a \neq -1\,, \\ 2\,, & \text{se}\, a = -1\,. \end{cases}$$

Quindi il sistema di equazioni lineari è compatibile se e solo se $a = -1$, ed in tal caso ha ∞^2 soluzioni. Per $a = -1$, risolvendo il sistema lineare con il metodo di Gauß otteniamo

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - s_3 + 2s_4 \\ -s_3 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} : s_3, s_4 \in K \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il seguente teorema afferma che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

Teorema 3. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora A è invertibile* $\iff \mathrm{rg}(A) = n$.

Dim. Come vedremo nel capitolo 8, A è invertibile, se e solo se la funzione lineare associata ad A, $L_A\colon K^n \to K^n$, $L_A(s) = A \cdot s$, è un isomorfismo $\iff n = \mathrm{rg}(L_A) = \mathrm{rg}(A)$. □

Osservazione 2. È possibile dimostrare direttamente che, se A è invertibile, allora $\mathrm{rg}(A) = n$, come segue. Sia $M \in \mathrm{M}_n(K)$ la matrice inversa di A, quindi $A \cdot M = \mathrm{I}_n$. Osserviamo che quest'ultima equazione si può riscrivere come segue: $A \cdot M^{(i)} = e_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, dove e_i è l'i-mo vettore della base canonica di K^n. Come visto nel capitolo 4, questo implica che $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$, quindi $\mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = K^n$, e $\mathrm{rg}(A) = n$.

Osservazione 3. Se $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è invertibile, per calcolare la sua inversa A^{-1} si può procedere come segue. Ricordiamo che A^{-1} è quella matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$ tale che $A \cdot M = \mathrm{I}_n$. Quindi, per ogni $i = 1, \ldots, n$, la colonna i-ma di M è l'unica soluzione del sistema di equazioni lineari

$$A \cdot x = e_i\,,$$

dove $e_i \in K^n$ è l'i-mo vettore della base canonica di K^n (l'unicità segue dal teorema di Rouché-Capelli perché $\mathrm{rg}(A) = n$). Notiamo che è possibile risolvere questi sistemi lineari, per $i = 1, \dots, n$, "simultaneamente" nel seguente modo. Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,2n}(K)$. Siccome A è invertibile, $\mathrm{rg}(A) = n$, quindi è possibile trasformare $\begin{pmatrix} A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ tramite una sequenza di operazioni elementari OE1, OE2, OE3, nella matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & M \end{pmatrix}$. Siccome le operazioni elementari trasformano un sistema di equazioni lineari in uno equivalente, segue che la soluzione di $A \cdot x = e_i$ coincide con la soluzione di $\mathrm{I}_n \cdot x = M^{(i)}$, che è $M^{(i)}$, quindi $M = A^{-1}$.

Esempio 4. 1. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Osserviamo che $\mathrm{rg}(A) = 2$, quindi A è invertibile. Per calcolare A^{-1}, consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, ed usiamo le operazioni elementari per trasformare la matrice 2×2 a sinistra in I_2:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allora $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Osserviamo che $\mathrm{rg}(A) = 3$, quindi A è invertibile. Per calcolare A^{-1} procediamo come sopra.

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&1&0&0\\4&6&1&0&1&0\\3&3&-2&0&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&-3&1&0&0\\0&-2&13&-4&1&0\\0&-3&7&-3&0&1\end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1&2&-3&1&0&0\\0&-2&13&-4&1&0\\0&0&-\frac{25}{2}&3&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1&2&-3&1&0&0\\0&-2&13&-4&1&0\\0&0&1&\frac{-6}{25}&\frac{3}{25}&\frac{-2}{25}\end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1&2&0&\frac{7}{25}&\frac{9}{25}&-\frac{6}{25}\\0&-2&0&-\frac{22}{25}&-\frac{14}{25}&\frac{26}{25}\\0&0&1&-\frac{6}{25}&\frac{3}{25}&-\frac{2}{25}\end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&0&\frac{11}{25}&\frac{7}{25}&-\frac{13}{25}\\0&0&1&-\frac{6}{25}&\frac{3}{25}&-\frac{2}{25}\end{pmatrix}.$$

Quindi
$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{11}{25}&\frac{7}{25}&-\frac{13}{25}\\-\frac{6}{25}&\frac{3}{25}&-\frac{2}{25}\end{pmatrix}.$$

Definizione 2. *Sia $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, e siano $p \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, n\}$. Siano $1 \le i_1 < \dots < i_p \le m$, $1 \le j_1 < \dots < j_q \le n$. Con $A(i_1, \dots, i_p \,|\, j_1, \dots, j_q)$ denotiamo la matrice $p \times q$ a coefficienti in K il cui elemento di posto k, ℓ è dato da a_{i_k, j_ℓ}, per ogni $k = 1, \dots, p$ ed $\ell = 1, \dots, q$. $A(i_1, \dots, i_p \,|\, j_1, \dots, j_q)$ si chiama* **sottomatrice** *$p \times q$ di A.*

Esempio 5. 1. Se $A = \begin{pmatrix}0&1&0&2\\3&-2&4&5\\0&2&1&1\end{pmatrix}$, e se $i_1 = 1, i_2 = 3$, $j_1 = 2, j_2 = 4$, allora
$$A(1,3 \,|\, 2,4) = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.$$
Mentre
$$A(2 \,|\, 2,3) = \begin{pmatrix}-2&4\end{pmatrix}, A(1,2,3 \,|\, 3) = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = A^{(3)}.$$

Proposizione 2. *Sia $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, e sia B una sottomatrice $p \times q$ di A. Allora $\mathrm{rg}(B) \le \mathrm{rg}(A)$.*

Dim. Supponiamo che $B = A(i_1, \dots, i_p \,|\, j_1, \dots, j_q)$, per qualche $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, p\}$ con $i_1 < \dots < i_p$ e $j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$ con $j_1 < \dots < j_q$. Consideriamo la seguente sottomatrice di A, $C := A(1, \dots, m \,|\, j_1, \dots, j_q)$, ed osserviamo che $C = (A^{(j_1)} \dots A^{(j_q)})$. Chiaramente $\mathrm{rg}(C) \le \mathrm{rg}(A)$. Inoltre, $B = \begin{pmatrix} C_{(i_1)} \\ \vdots \\ C_{(i_p)} \end{pmatrix}$, quindi $\mathrm{rg}(B) \le \mathrm{rg}(C)$, siccome il rango per righe coincide con il rango per colonne. Mettendo insieme le due disuguaglianze, $\mathrm{rg}(B) \le \mathrm{rg}(C) \le \mathrm{rg}(A)$. □

Teorema 4. *Sia* $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. *Allora*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \max\{\mathrm{rg}(B) \,|\, B \textit{ è una sottomatrice quadrata di } A\} \\ &= \textit{massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate ed invertibili di } A\,. \end{aligned}$$

Dim. Indichiamo con $r = \mathrm{rg}(A)$,

$$r_1 := \max\{\mathrm{rg}(B) \,|\, B \text{ è una sottomatrice quadrata di } A\}\,,$$

e con

$$r_2 := \text{massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate ed invertibili di } A\,.$$

Per la precedente proposizione $r \ge r_1$, e per il Teorema 3 $r_1 \ge r_2$. Quindi è sufficiente dimostrare che $r \le r_2$. A tale scopo, siano $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ r colonne linearmente indipendenti di A, con $j_1 < \dots < j_r$. Consideriamo la sottomatrice $C = A(1, \dots, m \,|\, j_1, \dots, j_r)$ ed osserviamo che $\mathrm{rg}(C) = r$. Siccome il rango per righe coincide con il rango per colonne, esistono r righe $C_{(i_1)}, \dots, C_{(i_r)}$ linearmente indipendenti. A meno di riordinare possiamo supporre che $i_1 < \dots < i_r$. Sia ora $B := C(i_1, \dots, i_r \,|\, 1, \dots, r) = A(i_1, \dots, i_r \,|\, j_1, \dots, j_r)$. Allora B è una sottomatrice quadrata di A, di ordine r e rango r. Quindi B è invertibile. Da questo segue che $r_2 \ge r$. □

Esempio 6. 1. Determiniamo il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{5,3}(\mathbb{R})\,.$$

Poiché A è una matrice 5×3, $\mathrm{rg}(A) \le \min\{3, 5\} = 3$. Osserviamo che $A(1, 2, 3 \,|\, 1, 2, 3)$ è una sottomatrice quadrata di A di rango 3. Quindi per il teorema precedente, si ha che $\mathrm{rg}(A) \ge 3$. Mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo

$$3 \le \mathrm{rg}(A) \le 3\,,$$

di conseguenza $\mathrm{rg}(A) = 3$.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{6,4}(\mathbb{R})\,.$$

Si ha che $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{6,4\} = 4$. Inoltre $\mathrm{rg}A(1,2,4,5\,|\,1,2,3,4) = 4$, quindi $\mathrm{rg}(A) = 4$.